第 48 卷 第 1 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 1 月
Vol. 48 No. 1 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jan. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.01.012

温度场的有限差分计算
——以一维温度场为例①

赵锐[1,2], 杨名扬[1], 淡丹辉[1,3]

1. 新疆大学 建筑工程学院,乌鲁木齐 830017;
2. 新疆建筑结构与抗震重点实验室,乌鲁木齐 830017;
3. 同济大学 桥梁工程系,上海 200092

摘要: 已有关于温度场的研究多是从热传导方程出发的,且大多未考虑材料性能随温度的变化. 从能量平衡的角度研究温度场,能有效考虑热对流边界条件和材料性能随温度变化的问题. 为了更好地还原实际情况,首先,基于能量平衡的原理,采用有限差分法建立了瞬态传热问题的有限差分方程;其次,考虑材料性能随温度的变化,使用 MATLAB 进行编程计算温度场;最后,给出算例,并通过与相应的 ABAQUS 有限元模拟结果对比,证明该方法能有效处理此类问题. 研究发现:在升温环境中,是否考虑材料热工参数随温度变化不影响温度分布规律,但影响温度大小;当考虑材料性能随温度变化时,计算得到的物体内部温度高于不考虑材料性能变化时的温度;环境温度采用国际标准升温曲线时,在边界处物体内部温度变化与环境温度变化形式相同,均呈对数形式;在远离边界的物体内部,温度变化幅度随着离边界距离的增大而减小,温度变化呈指数形式.

关 键 词: 温度场;变系数热传导方程;有限差分法;能量平衡

中图分类号: TU111.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 1000-5471(2023)01-0090-12

Finite Differential Calculation of Temperature Fields
——One-Dimensional Temperature Field

ZHAO Rui[1,2], YANG Mingyang[1], DAN Danhui[1,3]

1. School of Architecture and Civil Engineering, Xinjiang University, Urumqi 830017, China;
2. Xinjiang Key Lab of Building Structure and Earthquake Resistance, Urumqi 830017, China;
3. School of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China

Abstract: Most of the existing researches on the temperature field are based on the heat conduction equation, and most of them do not consider the change of material properties with temperature. The thermal convection boundary condition and the change of material properties with temperature can be considered effectively by studying the temperature field from the perspective of energy balance. In order to better re-

---

① 收稿日期:2022-06-29
基金项目:新疆大学天山学者特聘教授科研启动基金(620312327).
作者简介:赵锐,博士,副教授,主要从事极端天气下钢结构的理论及其应用研究.
通信作者:杨名扬,硕士研究生.

store the actual situation, firstly, based on the principle of energy balance, finite difference method was used to establish the finite difference equation of the transient heat transfer problem. On this basis, considering the material properties with the change of temperature, MATLAB programming was used to calculate the temperature field; Finally, an example was given and compared with the corresponding ABAQUS finite element simulation results, and it is proved that this method can effectively deal with such problems. The results showed that in the heating environment, whether the material thermal parameters change with temperature does not affect the distribution of temperature, but affects the size of temperature. The internal temperature of the object calculated with the material properties changing with temperature is higher than that without the material properties changing. When the international standard temperature rise curve is adopted for the ambient temperature, the change form of the internal temperature of the object at the boundary is the same as that of the ambient temperature, which is in logarithmic form. In the object far from the boundary, the temperature range decreases with the increase of the distance from the boundary, and the temperature change is exponential.

Key words: temperature field; variable coefficient heat conduction equation; finite difference method; energy balance

热量的传递过程是通过热传导、热对流和热辐射 3 种方式进行的，其中，热传导是通过固体或者静止流体传播热量；热对流局限于液体和气体，并且往往涉及流体固体边界的热交换；热辐射能量是通过电磁波传递的[1]. 在计算物体温度场时，固态物体内部热量的传递方式为热传导，将热对流和热辐射作为边界条件. 分析传热问题时，从不同的角度出发可将传热问题分为 3 类：①根据热量传递的维度可将热传导问题分为一维热传导问题、二维热传导问题和三维热传导问题；②根据是否考虑温度场随时间变化，可分为瞬态温度场和稳态温度场；③根据是否考虑材料性能随温度的变化，可分为变系数热传导问题和常系数热传导问题.

热量传递引起的温度场变化涉及到生物[2]、医疗[3]、材料[4-6]，建筑结构[7-9]等多个领域，在温度场研究中，将与温度分布相关的物理参数称为热工参数，包括比热、热传导系数以及密度，其中密度随温度变化微小. 对于特殊材料或环境温度变化范围较小的情况，如自然环境等，可不考虑材料热工参数随温度的变化. 然而，大多材料的热工参数都会随着温度的变化而改变，以钢材为例，各国规范均给出了钢材热工参数随温度的变化规律[10]. 为了求解热工参数随温度变化的热传导问题，国内外学者做了大量研究. 在稳态温度场的研究中，Ünal[11]基于平面板模型提出一种考虑热传导率随温度线性变化的一维稳态热传导问题求解方法；Hussein[12]通过理论推导，在球坐标系中求解了实心球体在有内部热源、考虑材料热传导率随温度线性变化的情况下的一维稳态传热问题，并且对比了使用 3 种不同材料时的温度分布情况；高仲仪[13]采用 λ 变换法求解变系数稳态热传导问题，该方法假设热传导率随温度线性变化且热传导率与温度一一对应，将温度逆向表示为热传导率的函数，通过求解热传导率进而得到温度场；严治军[14]给出了具有对流换热边界条件的一维常系数热传导差分解法，考虑多层不同材料时温度场分布，最后采用 FORTRAN 语言编制成热传导解析的计算程序. 瞬态温度场的研究也大多是基于一定假设简化得到的计算结果，魏光坪[15]、康为江[16]和彭友松[17]在研究自然条件下的桥梁温度场时，由于自然环境下温度变化较小，通常将材料热工参数视为常数，考虑了 3 种热传递方式对结构温度场的影响；李国强等[18]在对火灾下二维钢板-混凝土组合楼板温度场分析时，考虑结构的热对流和热辐射边界条件，并探究火灾位置和分布对楼板温度场的影响，通过对结果进行参数分析，提出了适用于火灾下的楼板温度计算的简化公式；胡克旭等[19]采用有限单元法，假定单元温度随着位置坐标线性变化，计算了火灾下压型钢板-混凝土组合楼板在存在热对流和热辐射，同时考虑建筑材料热工参数随温度变化时的温度场.

实际上，由于材料比热和热传导率均会随着温度变化，加之边界条件的复杂性，使得求解偏微分方程得出解析解是极少数情况. 采用数值方法计算，能有效简化计算过程. 常见的数值解法有有限元法、有限体积法、边界元法和有限差分法等，这些方法中，有限差分法具有简单且稳定的优点[20]. 本研究基于热传导的有限差分方程，使用MATLAB编程计算结构温度场. 以简化的一维变系数瞬态温度场分布模型为例，阐明考虑材料热工参数随温度变化时的有限差分法计算过程，并建立有限元模型进行结果验证.

1 热传导差分方程的建立

理论推导求解物体温度场一般采用解析法和数值法. 其中，解析法是以热传导方程为基础，求解偏微分方程，寻求物体温度分布与时间和位置关系的函数表达式，即 $T(x, y, z, t)$. 实际能采用解析法求解的热传导问题是极少数情况，因此，通常采用有限差分的数值方法建立传热的有限差分方程，求解温度场近似值[21]，通过减小单元格大小(时间步长、空间步长)来提高计算精度.

有限差分方程的建立可通过两种方式完成：一是基于热传导方程建立差分方程，二是基于能量平衡建立差分方程.

1.1 基于热传导方程的差分方程

热传导方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)=\rho C \frac{\partial T}{\partial t} \tag{1}$$

式中：$\lambda(T)$ 为热传导率；ρ 为材料密度；$C(T)$ 为比热容. (1) 式表达了温度在空间上的分布与温度随时间变化的关系：

基于热传导方程建立传热的差分方程，就是以热传导方程为基础，用差分代替微分，将偏导写成差分形式进行求解. 对于任意连续函数，使用泰勒级数将 x_0 相邻两点函数值 $f(x_{-1})$ 和 $f(x_1)$ 在 x_0 处展开得：

$$f(x_{-1})=f(x_0)-\Delta x f(x_0)'+\frac{\Delta x^2}{2!}f(x_0)''-\frac{\Delta x^3}{3!}f(x_0)'''+\frac{\Delta x^4}{4!}f(x_0)^{(4)}+o(x^4) \tag{2}$$

$$f(x_1)=f(x_0)+\Delta x f(x_0)'+\frac{\Delta x^2}{2!}f(x_0)''+\frac{\Delta x^3}{3!}f(x_0)'''+\frac{\Delta x^4}{4!}f(x_0)^{(4)}+o(x^4) \tag{3}$$

(2) 式 + (3) 式得到 $f(x)$ 在 x_0 处沿着 x 方向二阶导数，略去高阶项，得到：

$$f''(x_0)=\frac{f(x_1)-2f(x_0)+f(x_{-1})}{(\Delta x)^2} \tag{4}$$

同理，在图1所示三维直角坐标系中，与点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 相邻的上下左右前后6个点的温度值分别为 $T_U, T_D, T_L, T_R, T_F, T_B$.

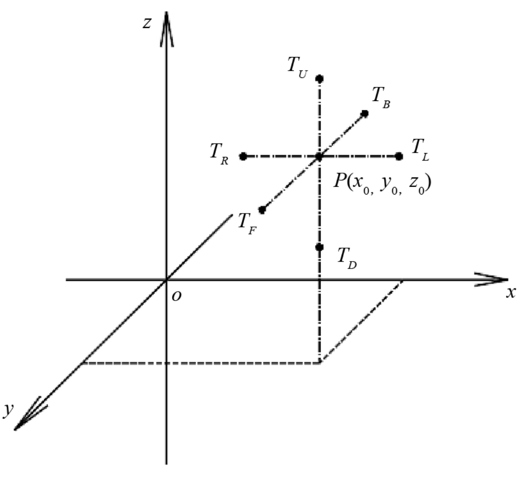


图1 空间位置示意

则 $T(x, y, z)$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处各方向二阶偏导可表示为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}=\frac{T_L-2T+T_R}{(\Delta x)^2}\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=\frac{T_F-2T+T_B}{(\Delta y)^2}\qquad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{T_U-2T+T_D}{(\Delta z)^2} \tag{5}$$

取空间间隔 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta$，时间间隔为 Δt，时间偏导采用向前差分格式则有：

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{T'-T}{\Delta t} \tag{6}$$

式中：T' 为 P 点下一时刻温度值. 将(5)式和(6)式带入(1)式中，得到基于热传导方程的差分方程，整理得：

$$T_U+T_D+T_L+T_R+T_F+T_B-6T=\frac{1}{FO}(T'-T) \tag{7}$$

式中：$FO=\frac{\alpha\Delta t}{\Delta^2}=\frac{\lambda}{\rho c}\frac{\Delta t}{\Delta^2}$，为傅里叶数. 此时，(7)式左侧取不同时刻温度可得到方程的不同差分形式：若左端温度均取此时刻温度 $T(t_0)$，则为显式格式；左端温度均取下一时刻温度 $T(t_0+\Delta t)$，则为隐式格式；若采用加权平均的形式，可表示为：

$$\beta(T'_U+T'_D+T'_L+T_R+T'_F+T'_B)-\left(6\beta+\frac{1}{FO}\right)T'=$$

$$-(1-\beta)(T_U+T_D+T_L+T_R+T_F+T_B)+\left[6(1-\beta)-\frac{1}{FO}\right]T \tag{8}$$

1.2　基于能量平衡的差分方程

基于能量平衡建立差分方程，是根据单元能量平衡的思想进行的，即：单元内输入热量和输出热量的差值，引起单元温度变化. 差值为正，单元温度升高；差值为负，单元温度降低.

在图 2 所示三维空间直角坐标系中取控制单元(图 3).

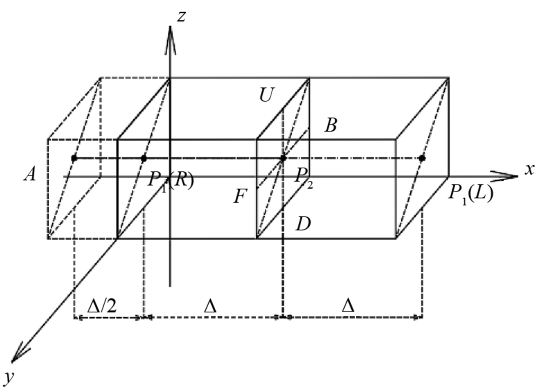


图 2　空间直角坐标

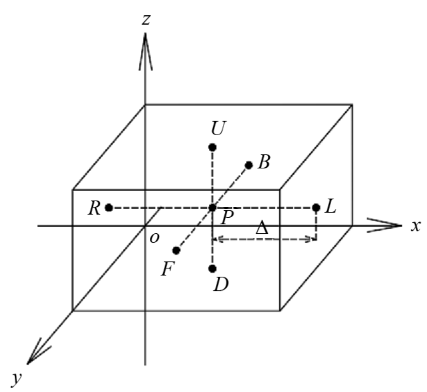


图 3　控制单元示意

图 2 中 A 为外界节点(边界条件)，P_1 为边界节点，P_2 为中间节点. 图 3 中，与点 P 相邻的 6 个点 U, D, L, R, F, B 分别代表点 P 上下左右前后相邻点. 为简化计算，令网格间隔 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta$，因此相邻各点到 P 的距离均为 Δ. 节点 i 到相邻节点 j 之间的传热系数为 K_{ij}，基于傅里叶定律，从节点 j 到 i 的热量为[13]：

$$Q_{ij}=K_{ij}(T_j-T_i) \tag{9}$$

单元内蓄积的能量使得单元内部温度发生变化，节点 i 的能量平衡方程为：

$$\sum_j Q_{ij}+HV_i=\sum_j K_{ij}(T_j-T_i)+HV_i=\rho C_P V_p\frac{\Delta T_P}{\Delta t} \tag{10}$$

式中：$V_i=\Delta x\Delta y\Delta z=\Delta^3$，为相邻坐标点之间的单元体积(在边界时 $V_i=\frac{\Delta^3}{2}$)；$K_{ij}=\frac{\lambda_{ij}A_{ij}}{L_{ij}}$，为节点 i 与节点 j 之间的传热系数，在边界时 $K_{ij}=h_jA_{ij}$，h_j 为周围温度为 T_j 时表面 A_{ij} 上的表面传热系数，λ_{ij} 为节点

i 与节点 j 之间的热传导率；A_{ij} 为垂直于节点 i 与节点 j 之间传热方向的平均表面积；L_{ij} 为节点 i 与节点 j 之间的距离，因此，在无内部热源时，节点 i 的热平衡方程为：

图 3 中，中间节点

$$\sum_{j=U,D,L,R,F,B} Q_{ij} = \sum_{j=U,D,L,R,F,B} K_{ij}(T_j - T_i) = \sum_{j=U,D,L,R,F,B} \lambda_{ij}(T_j - T_i) = \rho C_P \Delta^2 \frac{\Delta T_P}{\Delta t} \tag{11}$$

图 2 中，边界节点(假设为左侧边界，右侧同理)

$$\sum_j Q_{Pj} = Q_{PA} + Q_{PR} = hA(T_A - T_P) + K_{PR}(T_R - T_P) = \rho C_P V_P \frac{\Delta T_P}{\Delta t} \tag{12}$$

令 $A = \Delta^2$，$L_{PR} = \Delta$，$V_P = \frac{\Delta^3}{2}$ 带入(12)式，得：

$$h(T_A - T_P) + \frac{\lambda_{PR}}{\Delta}(T_R - T_P) = \rho C_P \frac{\Delta}{2} \frac{\Delta T_p}{\Delta t} \tag{13}$$

对(12)式右侧进行向前差分，左侧采用加权平均的形式，整理得：

$$\begin{aligned} &\beta(T'_U + T'_D + T'_L + T_R + T'_F + T'_B) - (6\beta + \frac{1}{FO})T' = \\ &-(1-\beta)(T_U + T_D + T_L + T_R + T_F + T_B) + \left[6(1-\beta) - \frac{1}{FO}\right]T \end{aligned} \tag{14}$$

式中，若 $\beta = 0$，方程为显式格式；$\beta = 1$，方程为隐式格式. 得到差分方程，结合相应的边界条件即可得到温度场分布.

1.3 差分方程的特殊形式

实际情况中多为三维热传导问题. 但在处理一些特定问题时，适当做出假设，可将三维简化为二维或一维情况.

按照 1.2 节思路，可得二维热传导差分方程为：

$$\begin{aligned} &\beta(T'_U + T'_D + T'_L + T_R) - (4\beta + \frac{1}{FO})T' = \\ &-(1-\beta)(T_U + T_D + T_L + T_R) + \left[4(1-\beta) - \frac{1}{FO}\right]T \end{aligned} \tag{15}$$

一维热传导差分方程为：

$$\beta(T'_L + T_R) - (2\beta + \frac{1}{FO})T' = -(1-\beta)(T_L + T_R) + \left[2(1-\beta) - \frac{1}{FO}\right]T \tag{16}$$

同于 1.1 节，若 $\beta = 0$，方程为显式格式；$\beta = 1$，方程为隐式格式.

1.4 显示差分的稳定性要求

对于显式格式的有限差分方程，在计算时，涉及到方程的稳定性问题.

令式(14)中 $\beta = 0$，得显式格式差分方程：

$$T' = FO\left[T_U + T_D + T_L + T_R + T_F + T_B - \left(6 - \frac{1}{FO}\right)T\right] \tag{17}$$

由(17)式可知，由于 $FO > 0$，所以当 T 的系数 $(1/FO - 6) < 0$ 时，T 越大 T' 就会越小，即此时刻温度越大下一时刻的温度越小，显然违背热力学原理. 因此，$(1/FO - 6) \geqslant 0$ 同理. 对于二维和一维有相同的约束.

内部节点：

$$\begin{array}{ll} \text{一维直角坐标} & FO \leqslant 1/2 \\ \text{二维直角坐标} & FO \leqslant 1/4 \\ \text{三维直角坐标} & FO \leqslant 1/6 \end{array} \tag{18}$$

边界节点(对流边界条件)：

$$\begin{array}{ll}\text{一维直角坐标} & FO \leqslant 1/[2(1+Bi)] \\ \text{二维直角坐标} & FO \leqslant 1/[2(2+Bi)] \\ \text{三维直角坐标} & FO \leqslant 1/[2(3+Bi)]\end{array} \tag{19}$$

式中：$Bi = h\Delta/\lambda$，时间步长限制取(18)式与(19)式所得交集. 在一维直角坐标系中，由(19)式可得时间步长限制为：

$$\Delta t = \frac{\Delta^2}{\alpha}FO \leqslant \frac{\Delta^2}{2\alpha(1+Bi)} \tag{20}$$

2　差分方程求解

以“一维无热源具有热对流边界条件的热传导问题”为例，分别介绍是否考虑材料热工参数随温度变化两种情况时的温度场求解方法.

已知初始时刻所有节点温度均为 $T(X, 0) = T_0$；左边界环境温度满足 $TA = A(t)$，右边界环境温度满足 $TB = B(t)$，表面传热系数为 hw. 将构件沿 x 方向均匀划分为 N 个单元格(图 4).

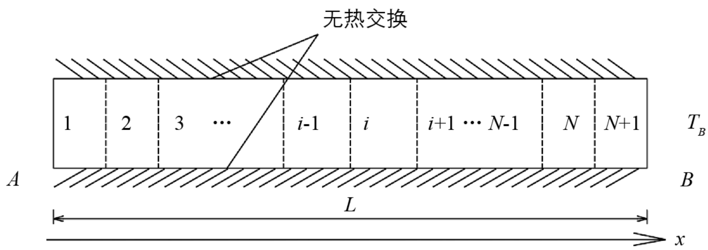


图 4　单元划分示意

2.1　常系数热传导方程

在上述一维热传导问题中，取 $T(X, 0) = T_0 = 20$ ℃，左侧环境温度取国际标准升温曲线(ISO834)[14]温度值 $A(t) = 20 + 345lg(8t+1)$，$B(t) = 20$ ℃，$L = 4$ m，$N = 80$. 热工参数见表 1.

表 1　热传导相关参数值

参数	$\lambda/(W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1})$	$\rho/(kg \cdot m^{-3})$	$c/(J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1})$	$h/(W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1})$
取值	45	7 850	600	1 500

对于常系数热传导问题，采用显式和隐式格式均可求解. 由(13)式和(16)式得节点 i 的差分方程，其中显式差分格式为：

$$\begin{aligned}&T'_i = FO(T_{i-1} + T_{i+1}) + (1-2FO)T_i \quad (i = 2, 3, \cdots, N)\\&T'_1 = 2FO\left[T_2 + BiT_A + T_1\left(\frac{1}{2FO} - 1 - Bi\right)\right]\\&T'_{N+1} = 2FO\left[T_N + BiT_B + T_{N+1}\left(\frac{1}{2FO} - 1 - Bi\right)\right]\end{aligned} \tag{21}$$

隐式差分格式为：

$$\begin{aligned}&T_i = -FO(T'_{i-1} + T'_{i+1}) + [1+2FO]T'_i \quad (i = 2, 3, \cdots, N)\\&T_1 = 2FO\left[-T'_2 - BiT'_A + T'_1\left(\frac{1}{2FO} + 1 + Bi\right)\right]\\&T_{N+1} = 2FO\left[-T'_N + BiT'_B + T'_{N+1}\left(\frac{1}{2FO} + 1 + Bi\right)\right]\end{aligned} \tag{22}$$

2.1.1 常系数显式求解

采用显式格式求解热传导问题时，首先根据精度要求，选取空间网格 Δ 大小，再根据显式格式的稳定性要求确定时间步长 Δt，最后依据递推关系(21)式，结合边界和初始条件计算得到温度场.

由 1.4 节可知，显式格式需要对方程的稳定性作出要求. 取 $\Delta = \dfrac{L}{N} = 0.05$ m，根据(18)式和(20)式得：

$$\Delta t \leqslant 49.062\ 5 \text{ s}$$

计算时间取 100 min，则所需时间步为：

$$m = 122.29$$

取 $\Delta t = 49.062\ 5$ s 时，$FO = 0.187\ 5$，$Bi = 5/3$，带入(21)式，得：

$$\begin{aligned} &T'_i = 0.1875 \times (T_{i-1} + T_{i+1}) + (1 - 0.375) T_i \quad (i = 2,\ 3,\ \cdots,\ N) \\ &T'_1 = 0.375 \times \left(T_2 + \frac{5}{3} T_A\right) \\ &T'_{N+1} = 0.375 \times \left(T_N + \frac{5}{3} T_B\right) \end{aligned} \tag{23}$$

至此得到该例的显式差分格式，已知初始温度分布 $T(x,\ 0)$ 和边界条件 TA，TB，依次沿着时间步向下计算，可得到所有节点任意时刻温度值. 计算示意图见图 5，横轴为节点位置，i 表示第 i 个节点；纵轴为时间步，j 表示第 j 个时间步.

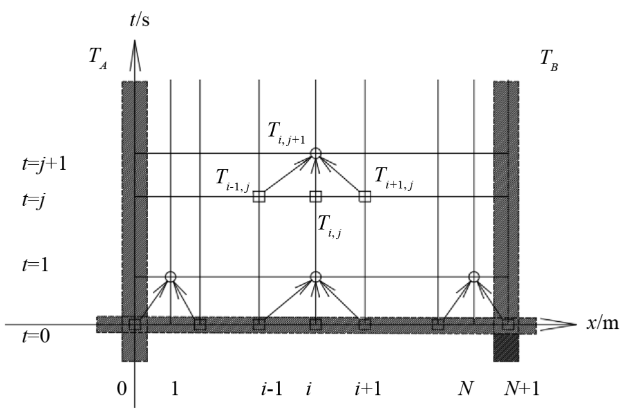


图 5 显式差分示意图

由图 5 可见，显示格式递推关系清晰，易于计算，根据(23)式采用 MATLAB 编程计算温度场即可.

2.1.2 常系数隐式求解

采用隐式格式求解热传导问题时，根据精度要求，选取空间网格 Δ 大小，隐式格式的差分方程没有稳定性要求，时间间隔可根据需求选定. 通过(22)式，结合边界和初始条件，求解方程组，得到温度场.

初始时刻，时间步 $j = 0$. 由(22)式得每个节点上的差分方程为：

$$\begin{aligned} &i = 1 \text{ 时：} && T_1^0 = 2FO\left[- T_2^1 - BiT_A^1 + T_1^1\left(\frac{1}{2FO} + 1 + Bi\right)\right] \\ &i = 2 \text{ 时：} && T_2^0 = -FO(T_1^1 + T_3^1) + (1 + 2FO)T_2^1 \\ &\quad\vdots && \quad\vdots \\ &i = N \text{ 时：} && T_N^0 = -FO(T'^1_{N-1} + T_{N+1}^1) + (1 + 2FO)T_N^1 \\ &i = N + 1 \text{ 时：} && T_{N+1}^0 = 2FO\left[- T_N^1 + BiT_B^1 + T_{N+1}^1\left(\frac{1}{2FO} + 1 + Bi\right)\right] \end{aligned}$$

式中：T_i^j 表示 i 节点 j 时刻的温度值，T_A^j 和 T_B^j 分别表示左右两侧 j 时刻环境温度值.

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} T_1^0 \\ T_2^0 \\ \vdots \\ T_N^0 \\ T_{N+1}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K1 & -2FO & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -FO & (1+2FO) & -FO & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -FO & (1+2FO) & -FO \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2FO & K1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^1 \\ T_2^1 \\ \vdots \\ T_N^1 \\ T_{N+1}^1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} KT'_A \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ KT'_B \end{bmatrix} \tag{24}$$

其中：$K1 = 1/(2FO) + (1 + Bi) \cdot 2FO$；$K = 2FO \cdot Bi$.

同理，对于下一个时间步，也可以得到相似的矩阵形式. 由此可见：对于隐式格式，虽然方程的计算不受时间间隔的影响，但是在求解每一时刻各节点温度值时，都需要联立方程组，这使得求解计算量变大. 隐式格式求解结构图见图 6.

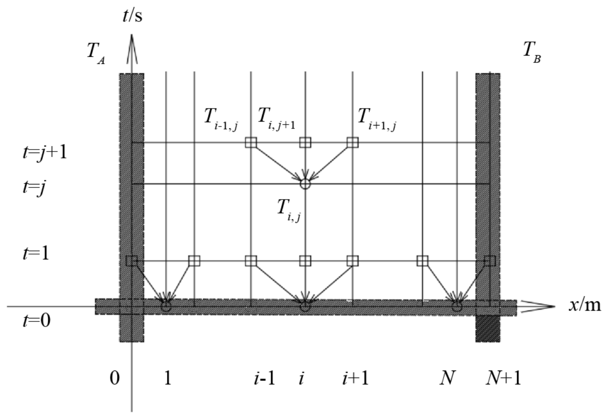


图 6　隐式差分示意图

此时基于矩阵(24)求解，所采用的方法称为三对角矩阵算法(TDMA). 取时间间隔为 20 s，空间间隔为 0.05 m，采用 MATLAB 编程求解矩阵，即可得到温度场.

2.2　变系数热传导方程

实际上，当温度较高时，材料热工参数会随着温度的改变而改变，即热传导系数和比热为温度的函数. 在计算考虑材料热工参数随着温度的温度场时，本研究采用欧洲规范 EC3[2] 中钢材热传导系数和比热容随温度变化关系，由于材料热工参数为温度的函数，热传导方程变为非线性方程，基于热传导方程直接求解会十分复杂. 采用能量平衡的方法建立显式格式的差分方程，计算时遵循以下流程：在已知初始温度场 T_0 时，依据 EC3 规范计算得到初始时刻的热工参数 λ_0 和 C_0，再通过 λ_0 和 C_0 依据差分方程计算新的温度场 T_1. 即已知前一时刻热工参数，可得到下一时刻新的温度场，多次计算得任意时刻的温度场 T_n. 依据以上思路和 1.2 节内容，建立差分方程.

对于中间节点，有：

$$\frac{\lambda_{12} A(T_1 - T_2)}{\Delta x} + \frac{\lambda_{32} A(T_3 - T_2)}{\Delta x} = \rho C_P V_P \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{25}$$

一维状态下 $\Delta x = \Delta$；$A = 1$；$V_P = A \times \Delta x = \Delta$，其中 λ_{12} 是在温度 $T = \dfrac{T_1 + T_2}{2}$ 时根据 EC3 规范计算的值.(25)式右侧取向前差分，得到显式差分格式：

$$\begin{aligned} T'_2 &= FO\left[\frac{\lambda_{12} T_1 + \lambda_{32} T_3}{\lambda_{12} + \lambda_{32}} + T_2\left(\frac{1}{FO} - 1\right)\right] \\ FO &= \frac{(\lambda_{12} + \lambda_{32})}{\rho C_P \Delta^2} \Delta t \end{aligned} \tag{26}$$

对于左侧边界节点，有：

$$\sum Q_{1,j} = Q_{1,A} + Q_{1,2} = h_A A(T_A - T_1) + \frac{\lambda_{12}}{\Delta}(T_2 - T_1) =$$

$$\rho C_P V_P \frac{\Delta T}{\Delta t} \tag{27}$$

取显式格式：

$$\begin{aligned} T'_1 &= 2FO_A\left[\frac{\Delta h_A T_A + \lambda_{12} T_2}{\Delta h_A + \lambda_{12}} + T_1\left(\frac{1}{2FO_A} - 1\right)\right] \\ FO_A &= \frac{\Delta t(\Delta h_A + \lambda_{12})}{\rho C_P \Delta^2} \end{aligned} \tag{28}$$

同理，右侧边界节点：

$$\begin{aligned} T'_{N+1} &= 2FO_B\left[\frac{\Delta h_B T_B + \lambda_{N+1,N} T_N}{\Delta h_B + \lambda_{N+1,N}} + T_{N+1}\left(\frac{1}{2FO_B} - 1\right)\right] \\ FO_B &= \frac{\Delta t(\Delta h_B + \lambda_{N+1,N})}{\rho C_P \Delta^2} \end{aligned} \tag{29}$$

若仍取 $\Delta = 0.05$ m. 由于采用显式差分格式，需满足(20)式与(22)式的稳定性要求. 结合(25)式和(26)式可知，取初始的热工参数 λ_0 和 C_0 满足要求，带入参数得：

$$\Delta t \leqslant 21.36 \text{ s} \quad 取\ \Delta t = 20 \text{ s}$$

可以看出，方程中温度的系数都是随温度变化的，即非线性方程，采用2.1节中直接求解的方法无法得到结果. 根据(28)式－(29)式，考虑温度引起的材料性能改变(遵循EC3规范公式)，使用MATLAB编程即可计算得到温度场.

3　有限元对比与分析

基于以上内容，使用ABAQUS分别建立不考虑热工参数随温度变化的有限元模型MODEL0与考虑热工参数随温度变化的有限元模型MODEL1，相关参数与2.1节、2.2节保持一致. 模型MODEL0与模型MODEL1均采用C3D8T单元，分别取 $x=0$ m 和 $x=1$ m 处截面温度进行对比.

3.1　常系数计算结果验证

不考虑材料性能随温度变化时，可采用显式和隐式两种差分格式计算，将2.1节计算结果与MODEL0计算结果进行对比，以验证计算结果的准确性(图7和图8).

由图7可知，当不考虑材料热工参数随温度变化时，采用隐式差分计算结果与ABAQUS有限元模拟结果高度吻合. 在环境温度采用国际标准升温曲线(ISO834)时，在边界处，物体内部温度变化与环境温度变化形式相同，均呈对数形式；在远离边界的物体内部，温度变化幅度随着离边界距离的增大而减小，且温度变化呈指数形式. 对比图8可知，采用显式差分计算在 $x=0$ m 边界处与ABAQUS有限元模拟结果几乎重合；在距离边界1 m处，显式计算结果和ABAQUS模拟结果随着时间的增加相差变大，但总体差距仍然较小(小于0.03 ℃). 产生这一现象的原因在于，隐式差分计算中采用的TDMA方法计算结果是理论上的精确解，而显式差分的精度取决于网格划分的大小.

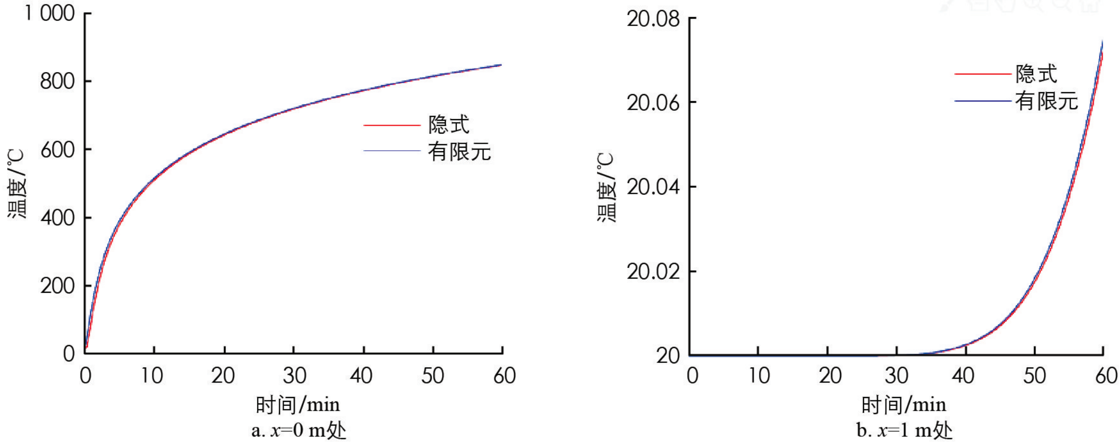
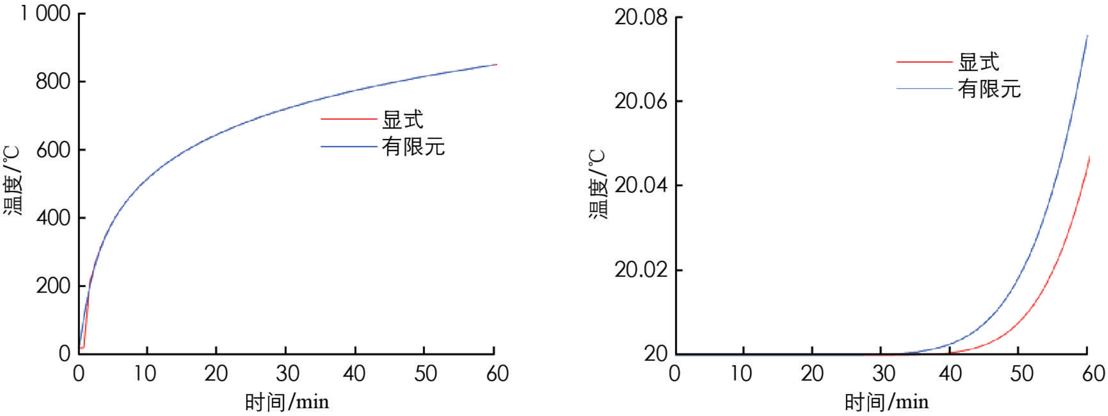


图7　常系数隐式计算结果

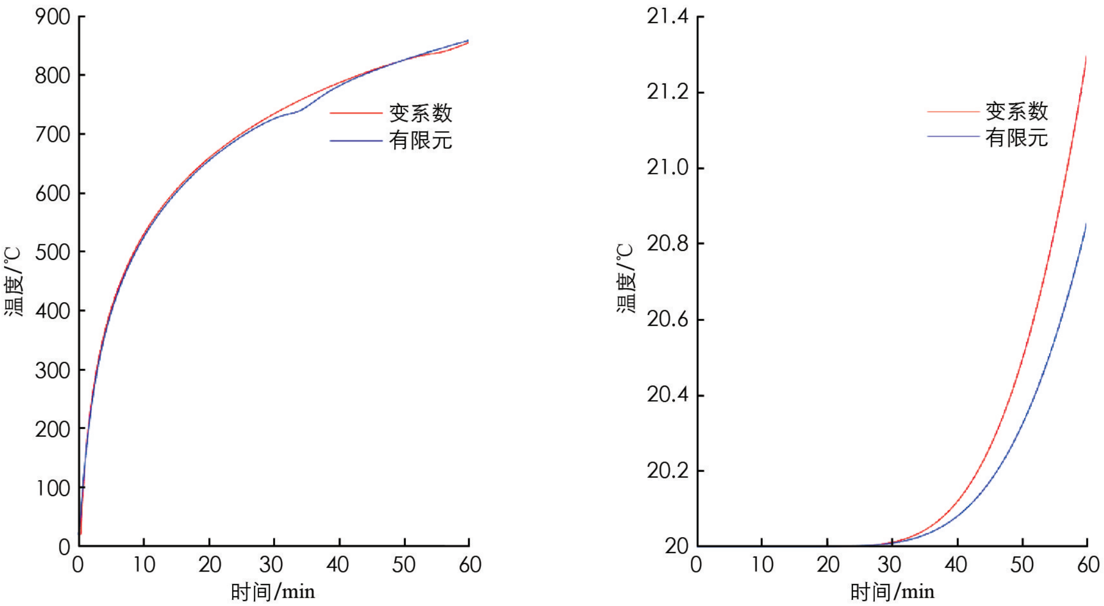


a. x=0 m处　　b. x=1 m处

图 8　常系数显式计算结果

3.2　变系数计算结果验证

当考虑材料性能随温度变化时，采用显式差分格式计算，将 2.2 节计算结果与 MODEL1 进行对比，以验证计算结果的准确性(图 9)所示.



a. x=0 m处　　b. x=1 m处

图 9　变系数计算结果

由图 9 可见，当考虑材料热工参数随温度变化时，使用 2.2 节中方法计算结果与 ABAQUS 有限元模拟结果吻合度较高. 在环境温度采用国际标准升温曲线，考虑材料热工参数随温度变化时，在边界处物体内部温度变化与环境温度变化形式相同，呈对数形式；远离边界的物体内部，温度变化范围随着离边界距离的增大而减小，温度变化呈指数形式. 温度场变化规律与常系数相同. 可以看到，采用有限差分法计算时，不论是常系数还是变系数计算结果与相应的有限元模拟结果均存在误差，这些误差主要来源于两方面：①采用有限元软件计算的温度场实际上是采用有限单元法计算的，本研究采用的是有限差分法，不论是有限单元法还是有限差分法，两者作为数值方法本身就与精确解存在误差；②两种方法的计算精度不仅与时间网格、空间网格大小的有关，有限单元法中选取的形函数、有限差分法中省略的高阶项也直接影响相应的计算精度.

3.3　常系数、变系数计算结果对比

为探究是否考虑材料热工参数对温度场的影响，分别取离左侧边界 $x=0$ m，$x=1$ m 处截面两种情况下显示格式计算所得温度场进行对比，并进行误差分析，结果见图 10 和图 11.

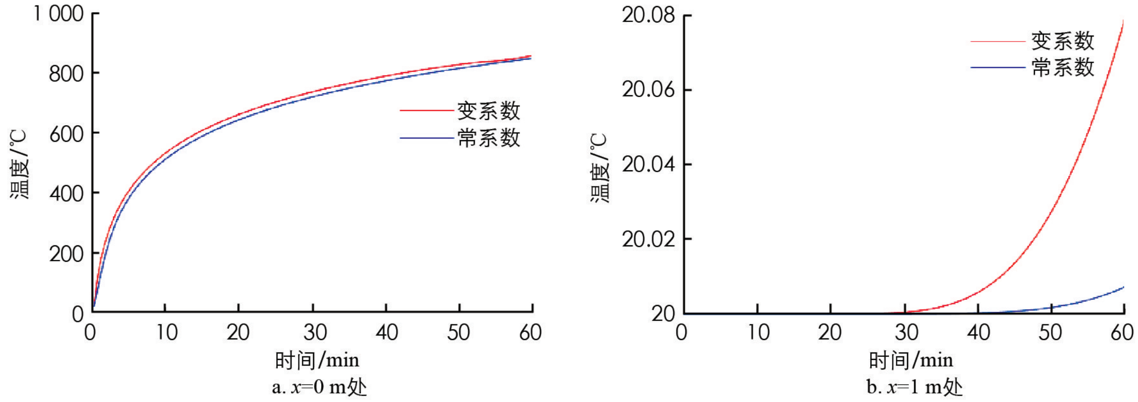


图 10 变系数和常系数温度场对比

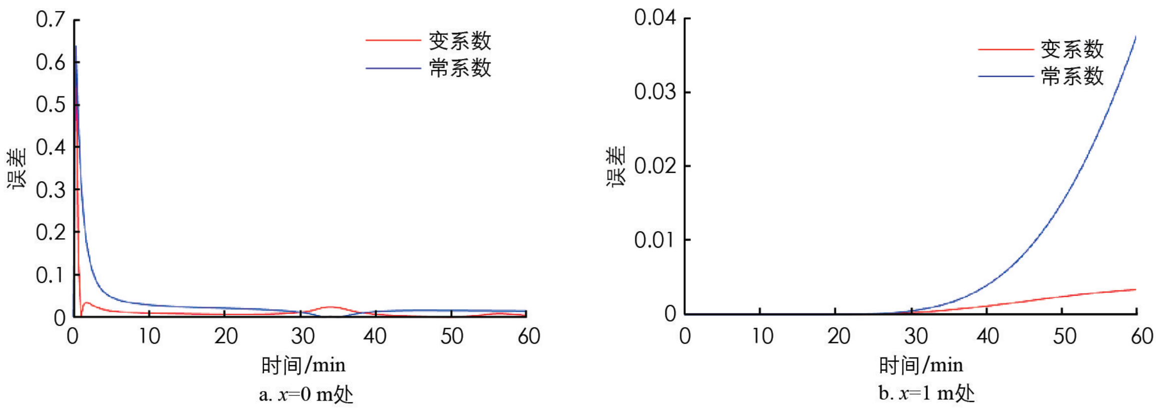


图 11 变系数和常系数温度场误差对比

由图 10 可见，是否考虑材料热工参数随温度变化不影响温度分布规律，但改变了温度大小：考虑材料热工参数随温度变化时的温度相对于不考虑材料热工参数随温度变化时的温度偏高. 由图 11 可见：采用有限差分法时不论是否考虑材料热工参数随温度变化，两者所产生的误差具有相同的变化规律，但不考虑材料热工参数随温度变化产生的误差总是高于考虑热工参数随温度变化的误差；图 11a 中，除时间 $t=20$ s 时误差为 60%，其余各个时间误差均小于 10%，这是由于采用的升温曲线初始温度变化快，同时计算时所取时间步长较大引起的. 因此，当环境温度较高或温度变化速率较大时，计算物体温度场时应考虑材料热工参数随温度的变化，且取更小的时间空间网格以提高精度.

4 结论

本研究在推导求解变系数热传导问题的基础上，以具有热对流边界条件同时考虑材料热工参数随温度变化的一维瞬态热传导问题为例，采用有限差分法分析了当环境温度为国际标准升温曲线时物体内部温度分布情况，得到以下五点结论.

1）基于能量平衡建立传热有限差分方程相对于从热传导方程出发建立传热有限差分方程，过程清晰、可考虑热工参数随温度变化的情况，更适用于特殊复杂情况.

2）通过与相应的有限元模型计算结果对比表明：本研究采用基于能量平衡建立的有限差分解法能有效计算考虑材料热工参数随温度变化时的温度场.

3）是否考虑材料热工参数随温度变化不影响温度分布规律，但影响温度大小：考虑材料热工参数随温度变化时得到的温度场，高于不考虑热工参数变化得到的温度场.

4）在环境温度采用国际标准升温曲线(ISO834)时，在边界处，物体内部温度变化与环境温度变化形式相同，均呈对数形式；在远离边界的物体内部，温度变化幅度随着离边界的距离增大而减小，且温度变化呈指数形式.

5）依据本研究的思路也可计算二维、三维温度场，进一步就特定的环境温度提出相应的物体内部温度场简化计算方法.

参考文献：

[1] 许俊. 高炉炉墙三维传热模型温度场计算软件的开发 [D]. 重庆：重庆大学，2001.

[2] 祝晶，刘星岚，谢成康. 圆柱体温度稳定的一种新方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(5)：45-50.

[3] 石春花，周晋阳，苏晋. 脉冲激光场中金微粒表面温度的探究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2014，39(5)：52-58.

[4] 何勇军，周庭燕，马朝科. 单层 AlN 类石墨烯材料热力学性质随温度的变化研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(5)：58-63.

[5] 高君华，刘炜. 石墨烯蓄热和传热性能热稳定性随温度变化规律研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(1)：52-59.

[6] 马磊，李长生，郭杰荣. 不同温度下 Ni_3Al 中疲劳裂纹扩展机理的原子模拟 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(7)：55-61.

[7] 白音. 大空间钢结构火灾下受力性能与抗火计算方法研究 [D]. 北京：清华大学，2008.

[8] 张中宇. 大跨度索穹顶结构耐火性能数值模拟与研究 [D]. 天津：天津大学，2018.

[9] 杨威，刘鑫，张建奇，等. 冷却塔表面温度场的理论计算 [J]. 西安电子科技大学学报，2003(06)：756-760.

[10] 王银志. 考虑结构整体性的组合梁抗火性能研究 [D]. 上海：同济大学，2006.

[11] ÜNAL H C. Temperature Distribution in a Plate with Temperature-Dependent Thermal Conductivity and Internal Heat Generation [J]. International Journal of Heat and Mass Transfer，1989，32(10)：1917-1926.

[12] HUSSEIN K J. Analytical and Numerical Study of the Temperature Distribution for a Solid Sphere Subjected to a Uniform Heat Generation [J]. International Journal of Computer Applications，2017，168(2)：30-37.

[13] 高仲仪. 用电热类比法解导热系数随温度而变的导热问题 [J]. 航空学报，1965(4)：50-60.

[14] 严治军. 火灾建筑的热传导解析 [J]. 重庆建筑大学学报，1997，19(5)：107-111，130.

[15] 魏光坪. 单室预应力混凝土箱梁温度场及温度应力研究 [J]. 西南交通大学学报，1989，24(4)：90-97.

[16] 康为江. 钢筋混凝土箱梁日照温度效应研究 [D]. 长沙：湖南大学，2001.

[17] 彭友松. 混凝土桥梁结构日照温度效应理论及应用研究 [D]. 成都：西南交通大学，2007.

[18] 李国强，殷颖智，蒋首超. 火灾下组合楼板的温度场分析 [J]. 工业建筑，1999，29(12)：47-49，43.

[19] 胡克旭，徐朝晖. 火灾下压型钢板－混凝土组合楼板温度场分析 [J]. 同济大学学报(自然科学版)，2001，29(6)：644-647.

[20] 克罗夫特，利利. 传热的有限差分方程计算 [M]. 张风禄，译. 北京：冶金工业出版社，1982：9-10，62-68.

[21] 中华人民共和国住房和城乡建设部. 建筑设计防火规范：GB 50016—2014 [S]. 北京：中国计划出版社，2014.

责任编辑　潘春燕