第 48 卷　第 2 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2023 年 2 月
Vol. 48　No. 2　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Feb.　2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.02.002

偶数阶极大子群均为 CBNA-子群的有限群①

唐康，　刘建军

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：设 G 为有限群，H 为 G 的子群. 如果对任意的 $x \in G$ 有 $H^x = H$ 或 $x \in \langle H, H^x \rangle$，则称 H 为 G 的 BNA-子群. 如果有限群 G 的所有极小子群和 4 阶循环子群均为 G 的 BNA-子群，则称 G 为 CBNA-群. 本文刻画了所有偶数阶极大子群均为 CBNA-群，而群本身是一个偶数阶非 CBNA-群的群结构.

关　键　词：BNA-子群；CBNA-群；偶数阶极大子群；极小非 CBNA-群

中图分类号：O152.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)02-0023-05

Finite Groups with Even Order Maximal Subgroups are CBNA-Subgroups

TANG Kang，　LIU Jianjun

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: A subgroup H of a finie group G is said to be a BNA-subgroup of G if either $H^x = H$ or $x \in \langle H, H^x \rangle$ for each $x \in G$. A finite group G is called a CBNA-group if every minimal subgroup and cyclic subgroup of order 4 of G is a BNA-subgroup of G. In this paper, we characterize that every maximal subgroup of even order is a CBNA-groups, and the group itself is a group structure of non-CBNA-groups of even order.

Key words: BNA-subgroup; CBNA-groups; maximal subgroups of even order; minimal non-CBNA-groups

本文仅研究有限群，涉及的群论术语和符号都是标准的.

近年来，利用某些特殊子群的性质来刻画有限群的结构是众多学者研究的重要课题之一. 文献[1]通过研究群 G 的非幂零自中心化子群的 TI-性及其次正规性，给出了 G 的所有非幂零子群皆次正规于 G 的判别准则. 文献[2]通过研究群 G 的完全 Hall-σ 集中子群及其极大子群的 σ 半次正规性，给出了 G 是 σ 可解群和超可解群的若干新的判别准则. 文献[3]对恰好具有 2 个非交换真子群的有限群结构进行了刻画. 文献[4]研究了四极大子群都弱 s_2-置换的偶数阶有限群的结构.

本文研究了有限群的两类覆盖避免子群，得到了群 G 的 p-超可解和 p-幂零性质的一些结果. 设 H 为

① 收稿日期：2022-08-06
基金项目：国家自然科学基金项目(11971391)；中央高校基本科研业务费项目(XDJK2020B052).
作者简介：唐康，硕士研究生，主要从事群论的研究.
通信作者：刘建军，副教授.

G 的子群，如果对任意的 $x \in G$ 有 $x \in \langle H, H^x \rangle$，则称 H 为 G 的反正规子群. 反正规子群作为正规子群的一个对偶的概念，在研究子群的嵌入性质对有限群结构的影响方面起到重要作用. 文献[5]刻画了每个子群正规或反正规的群. 文献[6]分类了满足正规或反正规的 CLT -群. 文献[7]引入了介于正规和反正规之间的子群：BNA -子群.

定义 1[7] 设 H 为 G 的子群，如果对任意的 $x \in G$，有 $H^x = H$ 或者 $x \in \langle H, H^x \rangle$，则称 H 为 G 的 BNA -子群，此时 H 也称作在群 G 中 BNA -正规.

文献[7]证明了：如果群 G 的极小子群和 4 阶循环子群均为 BNA -子群，则 G 超可解，并对满足所有素数幂阶循环子群均为 BNA -子群的群进行了刻画.

最近，文献[8]定义了 CBNA -群.

定义 2[8] 设 G 为有限群，如果 G 的所有极小子群和 4 阶循环子群均为 G 的 BNA -子群，则称群 G 为 CBNA -群.

文献[8]给出了极小非 CBNA -群的完全分类. 本文将沿着上述方向继续研究 BNA -子群对群结构的影响. 为方便叙述，我们引入以下概念：

定义 3 设 G 为有限群，如果 G 为偶阶非 CBNA -群，且 G 的所有偶数阶极大子群均为 CBNA -群，则称群 G 为 EBNA -群.

本文将给出 EBNA -群的结构刻画. 我们证明了如下定理：

定理 1 设群 G 为 EBNA -群. 则 G 可解，$|\pi(G)| \leqslant 3$，且 G 满足下列条件之一：

(i) G 为极小非 2 -幂零群；

(ii) G 为 2 -幂零的极小非 CBNA -群；

(iii) $G = P \times N$，$|P| = 2$，N 为 G 的 $2'$ - Hall -子群. 当 $|\pi(G)| = 2$ 时，N 为极小非 CBNA -群；当 $|\pi(G)| = 3$ 时，N 为 CBNA -群.

引理 1[7] 设 G 是一个群，$H \leqslant K \leqslant G$ 且 $N \trianglelefteq G$. 若 H 是 G 的 BNA -子群，则：

(i) H 是 K 的 BNA -子群；

(ii) HN 是 G 的 BNA -子群；

(iii) HN/N 是 G/N 的 BNA -子群；

(iv) G 的每个极大子群都是 G 的 BNA -子群.

引理 2[7] 设 H 是群 G 的 BNA -子群，则：

(i) H 的正规闭包 H^G 要么是 H，要么是 G；

(ii) 若 H 次正规于 G，则 H 正规于 G.

设 H 是群 G 的子群. 如果对任意的 $x \in G$，有 H 与 H^x 在 $\langle H, H^x \rangle$ 中共轭，则称 H 为 G 的类正规子群. 显然，正规子群和反正规子群都是类正规子群. 而我们可以得到类正规子群和 BNA -子群的如下关系：

引理 3 设 H 是群 G 的子群. 则下列命题等价：

(i) H 为 G 的 BNA -子群；

(ii) H 为 G 的类正规子群，且对 G 的任意满足 $H \leqslant K \leqslant G$ 的子群 K，有 $K \leqslant N_G(H)$，或者 $N_G(H) \leqslant K$.

证 先证(i)为(ii)的充分条件. 显然 H 为 G 的类正规子群. 假设存在 $x \in N_G(H) \backslash K$ 且 $y \in K \backslash N_G(H)$，则 $xy \notin K$ 且 $H \neq H^{xy}$. 而 $\langle H, H^{xy} \rangle \leqslant K$，这与 H 为 G 的 BNA -子群矛盾.

再证(ii)为(i)的充分条件. 假定存在 $x \in G$ 满足 $x \notin \langle H, H^x \rangle$. 则由 H 为 G 的类正规子群知 $H^x = H^y$，这里 $y \in \langle H, H^x \rangle$，即 $xy^{-1} \in N_G(H) \backslash \langle H, H^x \rangle$. 由已知条件可得

$$\langle H, H^x \rangle \leqslant N_G(H)$$

故 $y \in N_G(H)$，这意味着 $H = H^x$. 所以 H 为 G 的 BNA -子群.

引理 4[9]　设群 G 是一个 CBNA -群. 则 G 超可解.

引理 5[10]　设 p' -群 H 作用在 p -群 G 上，

$$\Omega(G)=\begin{cases}\Omega_1(G) & p>2\\ \Omega_2(G) & p=2\end{cases}$$

若 H 平凡作用在 $\Omega(G)$ 上，则 H 平凡作用在 G 上.

引理 6[11]　设群 G 的所有 p 阶子群均为 G 的正规子群，其中 p 为一个固定素数. 若 $|Z(G)|_p\neq 1$，则 G 的所有 p 阶元均属于 $Z(G)$.

引理 7[12]　设群 G 存在 2 阶无不动点自同构，则 G 为交换群.

我们将通过完成以下几个定理的证明来证明定理 1：

定理 2　设群 G 为 EBNA -群，则下列命题之一成立：

(i) G 为极小非 2 -幂零群；

(ii) G 为 2 -幂零的极小非 CBNA -群，且 $|G|_2>2$；

(iii) G 为 2 -幂零的 EBNA -群，且满足 $|G|_2=2$ 和 $|\pi(G)|\leqslant 3$.

证　令 M 为 G 的任意极大子群. 若 M 为奇数阶，则显然 M 为 2 -幂零的；若 M 为偶数阶，则由已知可得 M 为 EBNA -群. 根据引理 4，M 为超可解群，故 M 为 2 -幂零群. 因此，G 的任意极大子群均为 2 -幂零群，即 G 为 2 -幂零群或极小非 2 -幂零群. 接下来我们只需考虑 G 为 2 -幂零群时的情形.

情形 1　$|G|_2>2$.

由于 G 的 $2'$ - Hall 子群的子群不可能为 G 的极大子群，故 G 的极大子群必为偶数阶. 因此，G 为极小非 CBNA -群.

情形 2　$|G|_2=2$.

设

$$\pi(G)=\{p_1,\cdots,p_r\}\qquad 2=p_1<\cdots<p_r$$

由于 G 可解，所以 G 存在 Sylow 系，我们记之为$\{P_1,\cdots,P_r\}$，这里 $P_i\in \mathrm{Syl}_{p_i}(G)$. 假设 $r\geqslant 4$. 令

$$G_i=\prod_{j\neq i}P_j$$

其中 $i=2,\cdots,r$. 由已知条件和引理 1，P_1 为每个 G_i 的 BNA -子群.

我们断言 $N_{G_i}(P_1)=P_1$,G_i. 令

$$K=G_i\qquad \pi(K)=\{q_1,\cdots,q_{r-1}\}$$

其中

$$2=p_1=q_1<\cdots<q_{r-1}$$

则 K 有 Sylow 系$\{P_1=Q_1,\cdots,Q_{r-1}\}$，这里 $Q_i\in \mathrm{Syl}_{q_i}(K)$. 令

$$K_s=\prod_{j\neq s}Q_j$$

其中 $s=2,\cdots,r-1$. 由引理 3，我们有 $N_K(P_1)\leqslant K_s$ 或 $K_s\leqslant N_K(P_1)$. 若对于任意的 s 都有 $N_K(P_1)\leqslant K_s$，则有 $N_K(P_1)=P_1$. 如果存在某个 t，有 $K_t\leqslant N_K(P_1)$，则引理 3 再次说明

$$K_l\leqslant N_K(P_1)\qquad l\in\{2,\cdots,r-1\}\backslash\{t\}$$

因此

$$N_K(P_1)\geqslant K_tK_l=K$$

这就说明了 $N_K(P_1)=P_1$,K，断言成立.

如果 $N_{G_i}(P_1)=G_i$，则由引理 3 必有 $P_1\trianglelefteq G$；如果 $N_{G_i}(P_1)=P_1$，则必有 $N_G(P_1)=P_1$. 令 A 为 G 中的奇数阶极小子群. 由引理 2 及 G 为 2 -幂零群，可知 $A\trianglelefteq G$. 不论哪种情况，我们都可以说明 G 是 CBNA -群，这是一个矛盾.

极小非2-幂零群与极小非CBNA-群的结构分别由文献[13]与文献[8]给出. 当$\pi(G)=\{2, q\}$，我们可得以下结论：

定理3 设群$G=PQ$为EBNA-群，其中P为G的2阶子群，Q为G的Sylow q-子群. 则下列命题之一成立：

(i) $G=\langle a, b, c \mid a^2=b^q=c^q=1, b^a=b^{-1}, c^a=c^b=c\rangle$；

(ii) $G=P\times Q$且Q为极小非CBNA-群.

证 首先证明群G为超可解的. 当G幂零时，显然(ii)成立. 不妨设G非幂零. 令K/L为G的主因子且满足$K\leqslant Q$. 则K/L为初等交换q-群. 由文献[13]得

$$Q=F(G)\leqslant C_G(K/L)$$

故G在K/L上诱导的自同构群的阶为2. 再由文献[14]的引理1.3，K/L为q阶循环群. 显然，P作用在Q上，也作用在$Q/\Phi(Q)$上. 由完全可约定理得

$$Q/\Phi(Q)=V_1/\Phi(Q)\times V_2/\Phi(Q)\times\cdots\times V_d/\Phi(Q)$$

其中$V_i/\Phi(Q)$为$Q/\Phi(Q)$的q阶P-不变子群，$i=1,2,\cdots,d$. 令

$$Q_i=\prod_{j\neq i}V_j$$

则Q_i为Q的P-不变的极大子群. 由假设及引理2，PQ_i为CBNA-群，且Q_i的任意q阶子群均为PQ_i的正规子群. 接下来我们分两种情形来讨论：

情形1 存在k使得$C_{Q_k}(P)\neq 1$.

令x为$C_{Q_k}(P)$中的任意q阶元，则$x\in Z(PQ_k)$. 由引理6，Q_k的所有q阶元均属于$Z(PQ_k)$. 由于Q_k为P-不变q-群，且应用引理5，我们可以得到$PQ_k= P\times Q_k$. 因此

$$[P, Q_j\cap Q_k]=1 \qquad [P, \Phi(Q)]=1 \qquad j\neq k$$

假设$|Q/\Phi(Q)|>q^2$或$\Phi(Q)\neq 1$. 再由引理6，得到$[P, Q]=1$，所以G幂零，这与我们的假设矛盾. 因此Q为q^2阶初等交换群. 易验证G满足(i).

情形2 对任意k都有$C_{Q_k}(P)=1$，但$C_Q(P)\neq 1$.

由$C_Q(P)\cap Q_i=1$知$|C_Q(P)|=q$. 令$V=C_Q(P)\Phi(Q)$. 则V为Q的P-不变真子群，从而PV为CBNA-群. 假设$\Phi(Q)\neq 1$，则由引理6，我们得到$[P, Q]=1$，从而G幂零，矛盾. 因此$\Phi(Q)=1$. 重新取$V_1\leqslant C_Q(P)$，与情形1类似，易证G满足(i).

最后我们假设$\pi(G)=\{2, r, q\}$，得到如下结论：

定理4 设群$G=PM$为EBNA-群，且$M=RQ$，其中$|P|=2$，R和Q分别为G的Sylow r-子群和Sylow q-子群. 则下列命题之一成立：

(i) G为极小非CBNA-群；

(ii) $G=P\times M$且M为极小非CBNA-群.

证 由于P为G的2阶Sylow子群，故G为2-幂零群，即G存在正规2-补群M. 由G可解知G存在Sylow系$\{P, R, Q\}$. 当$C_M(P)=1$时，P为M的一个2阶无不动点自同构. 由引理7，M交换，故M为CBNA-群，从而G满足(i). 下面假定$C_M(P)\neq 1$.

由于PR为CBNA-群，所以R的任意r阶子群均为PR的BNA-子群. 由引理2，R的任意r阶子群均在PR中正规. 若$r\,\Big|\,|C_M(P)|$，由引理6，R的所有r阶元均属于$Z(PR)$. 再根据引理5，我们可以得到$PR=P\times R$，从而$C_R(P)=R$. 同理，若$q\,\Big|\,|C_M(P)|$，则$PQ=P\times Q$. 故有$rq\,\Big|\,|C_M(P)|$，即$G=P\times M$. 因此PH为CBNA-群，其中H为M的任意真子群. 因此M为极小非CBNA-群，故G满足(ii).

不失一般性，不妨设

$$C_R(P)=R \qquad C_Q(P)=1$$

则

$$N_G(P)=C_G(P)=PR$$

因 $|P|=2$，由 Frattini 论断知

$$G=N_G(P)P^G=PRP^G$$

故 $Q\leqslant P^G$. 又由

$$P^G=\langle P^g: g\in G\rangle=\langle P^x: x\in Q\rangle\leqslant PQ$$

可得 $P^G=PQ$. 由引理 2，$P\trianglelefteq PQ$，故 $C_Q(P)=Q$，矛盾.

参考文献：

[1] 陈婵婵，李玉，卢家宽，等. 非幂零自中心化子群是 TI-子群或次正规子群的有限群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(10)：5-9.

[2] 郑毅，吴珍凤，殷霞，等. 有限群的 σ-半次正规子群 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(7)：14-20.

[3] TAERI B，TAYANLOO-BEYG F. Finite Groups with Three Non-Abelian Subgroups [J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society，2021，45(6)：2393-2405.

[4] ASAAD M. Finite Groups of Even Orders All of Whose Fourth Maximal Subgroups are Weakly s_2-Permutable [J]. Acta Mathematica Hungarica，2022，167(1)：278-286.

[5] FATTAHI A. Groups with Only Normal and Abnormal Subgroups [J]. Journal of Algebra，1974，28(1)：15-19.

[6] LIU J J，LI S R，HE J. CLT-Groups with Normal or Abnormal Subgroups [J]. Journal of Algebra，2012，362(1)：99-106.

[7] HE X L，LI S R，WANG Y M. On BNA-Normality and Solvability of Finite Groups [J]. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova，2016，136(1)：51-60.

[8] 郭鹏飞，石化国. 某些子群介于正规与反正规之间的有限群 [J]. 数学学报(中文版)，2022，65(5)：841-848.

[9] HE X L，LI S R，WANG Y M. Groups All Cyclic Subgroups of Which are BNA-Subgroups [J]. Ukrainian Mathematical Journal，2017，69(2)：1-6.

[10] LAFFEY T J. A Lemma on Finite p-Groups and Some Consequences [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society，1974，75(2)：133-137.

[11] SHEN Z C，LI S R. Finite Groups with $\mathscr{H}$-Subgroups or Strongly Closed Subgroups [J]. Journal of Group Theory，2012，15(1)：85-100.

[12] GORENSTEIN D. Finite Groups [M]. New York：Harper & Row Publishers，1968：336-336.

[13] HUPPERT B. Endliche Gruppern I [M]. New York：Springer-Verlag，1967：434-435，686-687.

[14] WEINSTEEIN M. Between Nilpotent and Solvable [M]. Passaic，New Jersey：Polygonal Publishing House，1982：3-3.

责任编辑　廖坤