DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.02.003

# 二元对称多项式空间的幂和基①

倪雨晴，　李雪珊

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

**摘要**：对称多项式在许多领域都有重要的应用，对称多项式空间的基复杂多样. 本文主要研究二元对称多项式空间的幂和基，给出构造幂和基的一个递推方法. 根据此方法能够得到二元对称多项式空间的多组基.

**关　键　词**：对称多项式；幂和对称多项式；分拆

**中图分类号**：**O157**　　**文献标志码**：**A**　　**文章编号**：1000 - 5471(2023)02 - 0028 - 05

# On Power Sum Bases for the Space of Symmetric Polynomials in 2 Variables

NI Yuqing，　LI Xueshan

*School of mathematics and statistics，southwest university，Chongqing 400715，China*

**Abstract**：Symmetric polynomials have important applications in many fields，and the bases for the space of symmetric polynomials are complex and diverse. In this paper，we study the power sum bases for the space of symmetric polynomials in 2 variables，and give a recursive method to construct the power sum bases. Based on this method，we can obtain many bases for the space of symmetric polynomials in 2 variables.

**Key words**：symmetric polynomial；power sum symmetric polynomial；partition

给定正整数 $k$，设 $f(x)=f(x_1, x_2, \cdots, x_k)$ 是域 $K$ 上的一个多项式，若对 $\{1, 2, \cdots, k\}$ 的任意一个排列 $\omega$，有

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_k)=f(x_{\omega(1)}, x_{\omega(2)}, \cdots, x_{\omega(k)})$$

则称 $f(x)$ 是一个 $k$ 元对称多项式. 令 $\Lambda^k$ 为所有 $k$ 元对称多项式构成的向量空间，则

$$\Lambda^k=\bigoplus_{n\geqslant 0}\Lambda_n^k$$

其中 $\Lambda_n^k$ 为所有 $k$ 元 $n$ 次齐次对称多项式构成的子空间. 对称的概念出现在很多领域中[1-4]，而对称多项式在组合数学[5-10]、对称群和一般线性群表示[11-13]、几何[14] 以及数学物理[15-17] 等领域都有重要的应用. 本文主要研究线性空间 $\Lambda^k$ 的基.

首先，给出一些基本概念及记号.

给定正整数 $n$，如果非负整数序列 $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k)$ 满足 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_k$ 且 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=n$，

①　收稿日期：2022 - 06 - 20
基金项目：国家自然科学基金项目(12071383).
作者简介：倪雨晴，硕士研究生，主要从事代数组合的研究.
通信作者：李雪珊，副教授.

则称 $\lambda$ 为 $n$ 的一个分拆，记为 $\lambda \vdash n$，$\lambda_i$ 称为 $\lambda$ 的部分，并称 $l(\lambda)=\#\{i:\lambda_i>0\}$ 为 $\lambda$ 的长度. 令 $\mathrm{Par}(n)$ 表示 $n$ 的所有分拆构成的集合，记 $\mathrm{Par}=\bigcup\limits_{n\geqslant 0}\mathrm{Par}(n)$. 假设 $\lambda \vdash n$，且 $\lambda$ 有 $j_i$ 个部分等于 $i$，记 $\lambda=\langle 1^{j_1}2^{j_2}\cdots\rangle$，或简记为 $\lambda=1^{j_1}2^{j_2}\cdots$. 由定义知，整数分拆可以看成元素为正整数的有限多重集，对 $\lambda=\langle 1^{i_1}2^{i_2}\cdots\rangle$，$\mu=\langle 1^{j_1}2^{j_2}\cdots\rangle$，令 $\lambda\cup\mu=\langle 1^{i_1+j_1}2^{i_2+j_2}\cdots\rangle$.

给定非负整数序列 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$，记 $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_k^{\alpha_k}$. 设 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k)\vdash n$，定义单项式对称多项式为

$$m_\lambda=\sum_\alpha x^\alpha$$

其中 $\alpha$ 取遍 $\lambda$ 的所有不同排列.

对正整数 $i$，定义

$$e_i=\begin{cases}\sum\limits_{1\leqslant j_1<\cdots<j_i\leqslant k}x_{j_1}\cdots x_{j_i} & 1\leqslant i\leqslant k\\ 0 & i>k\end{cases}$$

$$h_i=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_i\leqslant k}x_{j_1}\cdots x_{j_i}$$

及

$$p_i=\sum_{j=1}^k x_j^i$$

给定分拆 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_l)$，定义初等对称多项式 $e_\lambda=e_{\lambda_1}e_{\lambda_2}\cdots e_{\lambda_l}$，完全齐次对称多项式 $h_\lambda=h_{\lambda_1}h_{\lambda_2}\cdots h_{\lambda_l}$ 以及幂和对称多项式 $p_\lambda=p_{\lambda_1}p_{\lambda_2}\cdots p_{\lambda_l}$.

**命题 1**[8]　对任意正整数 $n$，

$$\{m_\lambda:\lambda\vdash n,\ l(\lambda)\leqslant k\}\tag{1}$$

$$\{e_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}\tag{2}$$

$$\{h_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}\tag{3}$$

$$\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ l(\lambda)\leqslant k\}\tag{4}$$

都是 $\Lambda_n^k$ 的基.

**注**　文献[8]的推论 7.8.2 实际给出的是(1),(2),(3)式以及

$$\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}\tag{5}$$

是 $\Lambda_n^k$ 的基. 根据证明提示容易证明(1),(2),(3),(4)式是 $\Lambda_n^k$ 的基. 但(5)式也是 $\Lambda_n^k$ 的基这一事实的证明则需要用到对称多项式基本定理. 为了文章的完整性，下面给出这一命题的证明.

**命题 2**　对任意正整数 $n$，$\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$ 是 $\Lambda_n^k$ 的一组基.

**证**　由文献[8]的推论 7.7.6，

$$e_i=\sum_{\lambda\vdash i}\varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1}p_\lambda$$

其中对 $\lambda=\langle 1^{j_1}2^{j_2}\cdots\rangle\vdash i$，有 $z_\lambda=1^{j_1}j_1!\ 2^{j_2}j_2!\ \cdots$，$\varepsilon_\lambda=(-1)^{i-l(\lambda)}$. 由对称多项式基本定理知，$\{e_1,e_2,\cdots,e_k\}$ 是 $\Lambda^k$ 的代数独立生成元，所以 $\{p_1,p_2,\cdots,p_k\}$ 是 $\Lambda^k$ 的生成元. 因此

$$\Lambda_n^k=\mathrm{span}\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$$

由命题 1，$\{e_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$ 是 $\Lambda_n^k$ 的一组基，而 $\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$ 与 $\{e_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$ 是同基数的，所以 $\{p_\lambda:\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$ 是 $\Lambda_n^k$ 的一组基.

**定义 1**　给定正整数 $n$，设 $A$ 是 $\mathrm{Par}(n)$ 的子集，若

$$\{p_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_k):\lambda\in A\}\tag{6}$$

线性无关(相关)，则称 $A$ 是 $k$-线性无关(相关)的. 记

$$p(n,k)=\#\{\lambda:\lambda\vdash n,\ l(\lambda)\leqslant k\}$$

若 $A$ 是 $k$-线性无关的且 $|A|=p(n,k)$，则称(6)式为 $\Lambda_n^k$ 的一组幂和基.

由命题 1 及命题 2 知

$$s^1(n,k)=\{p_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_k):\lambda\vdash n,\ l(\lambda)\leqslant k\}$$

及

$$s^2(n,k)=\{p_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_k):\lambda\vdash n,\ \lambda_1\leqslant k\}$$

都是 $\Lambda_n^k$ 的幂和基. 令

$$s(n,k)=\{p_\lambda(x_1,x_2,\cdots,x_k):\lambda\vdash n\}$$

自然地，我们会问是否 $s(n,k)$ 的任意 $p(n,k)$ 元子集都是 $\Lambda_n^k$ 的幂和基. 答案是否定的，例如：$n=4$，$k=2$ 时，$p(4,2)=3$，且有

$$\begin{aligned}p_{(1,1,1,1)}(x_1,x_2)=(x_1+x_2)^4=&\\ &3(x_1^2+x_2^2)(x_1+x_2)^2-2(x_1^3+x_2^3)(x_1+x_2)=\\ &3p_{(2,1,1)}(x_1,x_2)-2p_{(3,1)}(x_1,x_2)\end{aligned}\tag{7}$$

即 $p_{(1,1,1,1)}(x_1,x_2)$，$p_{(2,1,1)}(x_1,x_2)$，$p_{(3,1)}(x_1,x_2)$ 线性相关.

一般地，$n\geqslant 4$ 时，对任意 $\mu\vdash(n-4)$，在(7)式左右两端同时乘 $p_\mu(x_1,x_2)$，得 $\Lambda_n^2$ 的一组线性关系

$$p_{\mu\cup(1,1,1,1)}(x_1,x_2)=3p_{\mu\cup(2,1,1)}(x_1,x_2)-2p_{\mu\cup(3,1)}(x_1,x_2)$$

因此 $s(n,2)$ 的任意包含 $\{p_{\mu\cup(1,1,1,1)}(x_1,x_2),\ p_{\mu\cup(2,1,1)}(x_1,x_2),\ p_{\mu\cup(3,1)}(x_1,x_2)\}$ 的 $p(n,2)$ 元子集都是线性相关的. 更一般地，我们有：

**命题 3** 设 $A$ 是 $\mathrm{Par}(n)$ 的一个 $p(n,k)$ 元子集，若存在 $\mu\in\mathrm{Par}$，及 $A'\subseteq\mathrm{Par}$，使得 $A'$ 是 $k$-线性相关的，且 $\{\lambda\cup\mu:\lambda\in A'\}\subseteq A$，则 $A$ 也是 $k$-线性相关的.

本文主要研究 $\Lambda_n^k$ 的幂和基. 一般地，刻画 $\Lambda_n^k$ 的幂和基是很困难的事情，本文考虑 $k=2$ 时的特殊情形，给出一个构造 $\Lambda_n^2$ 的幂和基的递推方法，主要结果如下：

**定理 1** 设 $A\subseteq\mathrm{Par}(n)$，令

$$A'=\begin{cases}\{\mu:\mu=\lambda^*\text{或}\mu=\lambda\cup(1),\ \lambda\in A\} & n=2r-1\\ \{\mu:\mu=\lambda\cup(1),\ \lambda\in A\} & n=2r\end{cases}$$

其中 $\lambda^*\vdash(n+1)$ 且各部分都是偶数. 若 $\{p_\lambda:\lambda\in A\}$ 是 $\Lambda_n^2$ 的幂和基，则 $\{p_\lambda:\lambda\in A'\}$ 是 $\Lambda_{n+1}^2$ 的幂和基.

**证** 对正整数 $n$，有

$$\{\lambda:\lambda\vdash n,\ l(\lambda)\leqslant 2\}=\left\{(n,0),(n-1,1),(n-2,2),\cdots,\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\right\}$$

其中 $\lfloor t\rfloor$ 表示不大于 $t$ 的最大整数，则 $p(n,2)=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor+1$. 对 $0\leqslant i\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$，有

$$m_{(n-i,i)}(x_1,x_2)=\begin{cases}x_1^ix_2^{n-i}+x_1^{n-i}x_2^i & n-i>i\\ x_1^ix_2^{n-i} & n-i=i\end{cases}$$

由命题 1，$\left\{m_{(n-i,i)}(x_1,x_2):0\leqslant i\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right\}$ 是 $\Lambda_n^2$ 的基.

当 $n=2r$ 时，$p(n,2)=p(n+1,2)=r+1$，由 $A$ 线性无关易知 $A'$ 也线性无关，即 $\{p_\lambda:\lambda\in A'\}$ 是 $\Lambda_{n+1}^2$ 的幂和基.

当 $n=2r-1$ 时，$|A|=r$，将 $A$ 中分拆按反字典序排列为 $\lambda^1,\lambda^2,\cdots,\lambda^r$，则存在 $s(0\leqslant s\leqslant r)$，使得 $A'$ 中的分拆按反字典序排列为 $\lambda^1\cup(1),\lambda^2\cup(1),\cdots,\lambda^s\cup(1),\lambda^*,\lambda^{s+1}\cup(1),\cdots,\lambda^r\cup(1)$. 对任意 $1\leqslant i,j\leqslant r$，记 $c_{ij}$ 表示 $p_{\lambda^i}(x_1,x_2)$ 中 $x_1^{n-j+1}x_2^{j-1}$ 的系数，即

$$\begin{aligned}p_{\lambda^i}(x_1,x_2)=c_{i1}m_{(n,0)}(x_1,x_2)+c_{i2}m_{(n-1,1)}(x_1,x_2)+\cdots+c_{ir}m_{(r,r-1)}(x_1,x_2)=&\\ \sum_{1\leqslant j\leqslant r}c_{ij}m_{(n-j+1,j-1)}(x_1,x_2)&\end{aligned}$$

以下用反证法证明当 $n=2r-1$ 时，$A'$ 也线性无关. 若不然，则存在常数 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，使得

$$\begin{aligned}p_{\lambda^*}(x_1,x_2)=a_1p_{\lambda^1\cup(1)}(x_1,x_2)+a_2p_{\lambda^2\cup(1)}(x_1,x_2)+\cdots+a_rp_{\lambda^r\cup(1)}(x_1,x_2)=&\\ \sum_{i=1}^{r}a_ip_{\lambda^i\cup(1)}(x_1,x_2)&\end{aligned}\tag{8}$$

一方面，考虑到

$$p_{\lambda^i\cup(1)}(x_1, x_2)=p_{\lambda^i}(x_1, x_2)p_1(x_1, x_2)=$$
$$[c_{i1}m_{(n,0)}(x_1, x_2)+c_{i2}m_{(n-1,1)}(x_1, x_2)+\cdots+c_{ir}m_{(r,r-1)}(x_1, x_2)]\cdot(x_1+x_2)=$$
$$c_{i1}m_{(n+1,0)}(x_1, x_2)+(c_{i1}+c_{i2})m_{(n,1)}(x_1, x_2)+(c_{i2}+c_{i3})m_{(n-1,2)}(x_1, x_2)+\cdots+$$
$$(c_{i(r-1)}+c_{ir})m_{(r+1,r-1)}(x_1, x_2)+2c_{ir}m_{(r,r)}(x_1, x_2)$$

因此我们有

$$\sum_{i=1}^{r}a_ip_{\lambda^i\cup(1)}(x_1, x_2)=$$
$$\sum_{i=1}^{r}a_i\cdot\left[c_{i1}m_{(n+1,0)}(x_1, x_2)+\sum_{j=1}^{r-1}(c_{ij}+c_{i(j+1)})m_{(n-j+1,j)}(x_1, x_2)+2c_{ir}m_{(r,r)}(x_1, x_2)\right]=$$
$$\left(\sum_{i=1}^{r}a_ic_{i1}\right)m_{(n+1,0)}(x_1, x_2)+\sum_{j=1}^{r-1}\left[\sum_{i=1}^{r}a_i(c_{ij}+c_{i(j+1)})\right]m_{(n-j+1,j)}(x_1, x_2)+$$
$$2\left(\sum_{i=1}^{r}a_ic_{ir}\right)m_{(r,r)}(x_1, x_2) \tag{9}$$

另一方面，设 $\lambda^*=\langle 2^{m_2}4^{m_4}\cdots 2r^{m_{2r}}\rangle$，则我们有

$$p_{\lambda^*}(x_1, x_2)=(x_1^2+x_2^2)^{m_2}(x_1^4+x_2^4)^{m_4}\cdots(x_1^{2r}+x_2^{2r})^{m_{2r}}=$$
$$\sum_{j=0}^{n+1}\sum_{\substack{j_2,j_4,\cdots,j_{2r}\\2j_2+4j_4+\cdots+2rj_{2r}=j}}\binom{m_2}{j_2}\binom{m_4}{j_4}\cdots\binom{m_{2r}}{j_{2r}}x_1^jx_2^{n+1-j}=$$
$$\sum_{j=0}^{r}\sum_{\substack{j_2,j_4,\cdots,j_{2r}\\2j_2+4j_4+\cdots+2rj_{2r}=j}}\binom{m_2}{j_2}\binom{m_4}{j_4}\cdots\binom{m_{2r}}{j_{2r}}m_{(n+1-j,j)} \tag{10}$$

将(9)，(10) 式代入(8) 式并比较 $m_{(n+1-j,j)}(0\leqslant j\leqslant r)$ 的系数得如下 $r+1$ 个等式：

$$\sum_{i=1}^{r}a_ic_{i1}=1$$
$$\sum_{i=1}^{r}a_i(c_{ij}+c_{i(j+1)})=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{j_2,j_4,\cdots,j_{2r}\\2j_2+4j_4+\cdots+2rj_{2r}=j}}\binom{m_2}{j_2}\binom{m_4}{j_4}\cdots\binom{m_{2r}}{j_{2r}} & 2\mid j\\ 0 & 2\nmid j\end{cases}, 1\leqslant j\leqslant r-1$$
$$2\sum_{i=1}^{r}a_ic_{ir}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{\substack{j_2,j_4,\cdots,j_{2r}\\2j_2+4j_4+\cdots+2rj_{2r}=r}}\binom{m_2}{j_2}\binom{m_4}{j_4}\cdots\binom{m_{2r}}{j_{2r}} & 2\mid r\\ 0 & 2\nmid r\end{cases} \tag{11}$$

由前 $r$ 个等式，有

$$\sum_{i=1}^{r}a_ic_{i1}+\sum_{j=1}^{r-1}(-1)^j\sum_{i=1}^{r}a_i(c_{ij}+c_{i(j+1)})=$$
$$(-1)^{r-1}\sum_{i=1}^{r}a_ic_{ir}=$$
$$1+\sum_{j=1}^{r-1}\left[\sum_{\substack{j_2,j_4,\cdots,j_{2r}\\2j_2+4j_4+\cdots+2rj_{2r}=j}}\binom{m_2}{j_2}\binom{m_4}{j_4}\cdots\binom{m_{2r}}{j_{2r}}\right]>0$$

因此当 $r$ 为偶数时，$\sum_{i=1}^{r}a_ic_{ir}<0$；当 $r$ 为奇数时，$\sum_{i=1}^{r}a_ic_{ir}>0$，这与(11) 式矛盾.

根据定理1，从 $\Lambda_4^2$ 的 9 组幂和基出发，可以得到 $\Lambda_5^2$ 的 9 组幂和基，取 $\lambda^*\in\{(6),(4,2),(2,2,2)\}$，可以得到 $\Lambda_6^2$ 的 27 组幂和基. 一般地，应用定理 1 我们可以得到 $\Lambda_n^2$ 的很多组幂和基，但是根据计算机编程，当 $n$ 较大时得到的幂和基只占 $\Lambda_n^2$ 的所有幂和基的一小部分，如何刻画 $\Lambda_n^2$ 甚至更一般的 $\Lambda_n^k$ 的幂和基则有待

进一步研究. 除此以外，在接下来的研究工作中，我们还将考虑与本研究有关的其他问题，比如：

1）令 $c(n, k)$ 表示 $\Lambda_n^k$ 的幂和基的个数，研究数列$\{c(n, k)\}$的组合性质；

2）如何刻画 $\Lambda_n^k$ 的其他特殊形式的基，如完全齐次基、Schur 基.

**参考文献：**


[1] 杨亚军，陈秀真，马进. 基于对称多项式的智能家居设备安全认证方案研究 [J]. 计算机应用研究，2021，38(1)：215-217.

[2] 李梦琪，李雪珊. 排列的右弱 Bruhat 序与拟对称生成函数 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(6)：14-19.

[3] 耿肖肖，程浩，朱承澄. 球对称区域上分数阶扩散方程逆源问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(5)：97-107.

[4] 张小双，陈震，刘奇龙. 求解不同阶对称张量组特征值的带位移高阶幂法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(8)：81-87.

[5] WINKEL R. Sequences of Symmetric Polynomials and Combinatorial Properties of Tableaux [J]. Advances in Mathematics，1998，134(1)：46-89.

[6] MIMACHI K. A New Derivation of the Inner Product Formula for the Macdonald Symmetric Polynomials [J]. Compositio Mathematica，1998，113(2)：117-122.

[7] STANLEY R P. Some Combinatorial Properties of Jack Symmetric Functions [J]. Advances in Mathematics，1989，77(1)：76-115.

[8] STANLEY R P. Enumerative Combinatorics，Volume 2 [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1999.

[9] STANLEY R P. Enumerative Combinatorics，Volume 1 [M]. 2th ed. Cambridge：Cambridge University Press，2012.

[10] MOTEGI K. Combinatorial Properties of Symmetric Polynomials from Integrable Vertex Models in Finite Lattice [J]. Journal of Mathematical Physics，2017，58(9)：091703.

[11] SAGAN B E. The Symmetric Group：Representations Combinatorial Algorithms，and Symmetric Functions [M]. 2th ed. New York：Springer，2013.

[12] MACDONALD I G. Symmetric Functions and Hall Polynomials [M]. 2th ed. Oxford：Oxford University Press，1999.

[13] URURE R I. Symmetric and Skew-Symmetric Polynomial Identities with Involution for the Upper Triangular Matrix Algebras of Even Order [J]. Linear Algebra and its Applications：2022，641：98-114.

[14] HELGASON S. Differential Geometry and Symmetric Spaces [M]. 2th ed. Rhode Island：American Mathematical Society，2001.

[15] MIWA T，JIMBO M，DATE E. Solitons：Differential Equations，Symmetries and Infinite Dimensional Algebras [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2000.

[16] SERGEEV A N，VESELOV A P. Generalised Discriminants，Deformed Calogero-Moser-Sutherland Operators and Super-Jack Polynomials [J]. Advances in Mathematics，2005，192(2)：341-375.

[17] SCHMIDT H J，SCHNACK J. Partition Functions and Symmetric Polynomials [J]. American Journal of Physics，2002，70(1)：53-57.


**责任编辑　廖坤**