DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.02.004

一类带记忆项半线性时间分数阶 σ-发展方程解的爆破[①]

何鑫海，　陈雪丽，　杨晗

西南交通大学 数学学院，成都 611756

摘要：研究了一类带记忆项半线性时间分数阶 σ-发展方程解的爆破，通过构造合适的测试函数，在非线性项指数满足一定条件时证明了解的有限时刻爆破，并得到了生命跨度的上界估计，且所得到的指数 p 的范围在极限情形下与经典爆破结论一致.

关　键　词：时间分数阶 σ-发展方程；柯西问题；记忆项；测试函数法；爆破

中图分类号：O175.29　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)02-0033-07

Blow-Up for a Class of Semilinear Time Fractional Order σ-Development Equation with Memory Term

HE Xinhai，　CHEN Xueli，　YANG Han

School of Mathematics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China

Abstract: The blow-up of a class of semilinear time-fractional order σ-development equation solutions with memory terms is studied. By constructing a suitable test function, the finite time blow-up of the solution is proved when the index of the nonlinear term satisfies certain conditions and the upper bound estimate of the life span is obtained, and the range of the obtained index is consistent with the classical blow-up conclusion in the limit case.

Key words: time-fractional order σ-development equation; Cauchy problem; memory term; test function method; blow-up

本文研究以下半线性时间分数阶 σ -发展方程的柯西问题：

$$\begin{cases} \partial_t^{1+\alpha} u + (-\Delta)^\sigma u = \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} \mid u \mid^p \mathrm{d}\tau & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0,\ x) = \varepsilon u_0,\ u_t(0,\ x) = 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha \in (0,\ 1)$，$\sigma \geqslant 1$，$\gamma \in (0,\ 1)$，$p > 1$，ε 充分小. $\partial_t^{1+\alpha} u$ 为 $1+\alpha$ 阶 Caputo 型分数阶导数，定义为

① 收稿日期：2022-06-23

基金项目：国家自然科学基金项目(11701477，11971394).

作者简介：何鑫海，硕士研究生，主要从事偏微分方程解的适定性的研究.

通信作者：杨晗，教授，博士研究生导师.

$$\partial_t^{1+\alpha} u = D_{0|t}^{\alpha}(u_t) \qquad D_{0|t}^{\alpha} f = \partial_t (J_{0|t}^{1-\alpha} f) \tag{2}$$

这里

$$J_{0|t}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad \beta > 0,\ t > 0$$

为 Riemann-Liouville 型积分，$\Gamma(\beta)$ 为 Gamma 函数. 算子$(-\Delta)^{\sigma}$ 定义为

$$(-\Delta)^{\sigma} u = F^{-1}(|\xi|^{2\sigma} \hat{u}) \qquad \hat{u}(\xi) = F(u)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} u \mathrm{d}x$$

上述时间分数阶σ-发展方程(1)在物理学、力学和其他应用科学中有着大量应用[1-3]，通常用于刻画具有幂律变特性的粘弹性介质中机械波的传播问题，也可描述介于扩散和波传播模型的中间现象，且这种现象通常发生在粘弹性介质中，融合了表现波传播的类固体材料和支持扩散过程类流体材料的特性，近年来关于该类方程解的适定性研究引起了不少研究者的关注[4-7].

注意到非线性项有如下性质

$$\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} |u(\tau, \cdot)|^p \mathrm{d}\tau = \Gamma(1-\gamma) J_{0|t}^{1-\gamma} |u(t, \cdot)|^p$$

进而有

$$\lim_{\gamma \to 1^-} \Gamma(1-\gamma) \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} |u(\tau, \cdot)|^p \mathrm{d}\tau = |u(t, \cdot)|^p$$

因此，当指数$\gamma \to 1^-$且参数α,σ取极限情形时，本文所研究的非线性记忆项的柯西问题(1)可转化为非线性项为$|u|^p$的经典问题. 探讨问题(1)与经典柯西问题解的性质之间的联系是一件很有意义的事情.

当$\alpha = 0$，$\sigma = 1$，$\gamma = 1$时，问题(1)转化为如下半线性热传导方程的柯西问题：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = |u|^p & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

文献[8]给出了其临界指数$\tilde{p} = 1 + \dfrac{2}{n}$，即在$p > \tilde{p}$时该问题在小初值情况下存在整体解，$1 < p \leqslant \tilde{p}$时该问题的解在有限时刻爆破. 对于超临界与次临界的情形，文献[8]分别进行了解的整体存在性与爆破证明，对于临界的情形，文献[9-10]研究了解的爆破情况.

当$\alpha = 0$，$\sigma = 1$，$\gamma \in (0, 1)$时，问题(1)则转化为如下带记忆项半线性热传导方程的柯西问题：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \displaystyle\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} |u|^p \mathrm{d}\tau & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

文献[11]证明了在

$$p \leqslant p_{\dot{a}} = \max\left\{\frac{1}{\gamma},\ p_{\gamma}\right\} \qquad p_{\gamma} = 1 + \frac{4-2\gamma}{(n-2+2\gamma)^+}$$

时解在有限时刻爆破，并证明了$p > p_{\dot{a}}$时小初值情况下存在整体解，此处

$$(n-2+2\gamma)^+ = \max\{0,\ n-2+2\gamma\}$$

可以看到当$\gamma \to 1^-$时，此时的临界指数与 Fujita 临界指数一致.

当$\alpha = 1$，$\sigma = 1$，$\gamma = 1$时，问题(1)转化为如下半线性波动方程的双初值问题：

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = |u|^p & t \geqslant 0,\ x \in \mathbb{R}^n \\ u(0, x) = u_0,\ u_t(0, x) = u_1 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3}$$

文献[12]在

$$1 < p < \bar{p} = 1 + \frac{2}{n-1} \qquad n \geqslant 2$$

和$p > 1$，$n = 1$时证明了解在有限时刻爆破. 根据 Strauss 猜想[13]，问题(3)的临界指数$p_0(n)$为二次方程

$$(n-1)p^2 - (n+1)p - 2 = 0$$

的正根，并且在$n \geqslant 2$，$p > p_0(n)$时，问题(3)在小初值情况下存在整体解，在$p \leqslant p_0(n)$时问题(3)的

解在有限时刻爆破. 文献[14-16]在超临界情况下针对不同空间维数证明了整体解的存在性，文献[17-18]在临界情况下、文献[19-20]在次临界情况下分别针对不同空间维数证明了解的有限时刻爆破.

对于时间分数阶方程，当 $\alpha \in (0,1)$，$\sigma=1$，$\gamma=1$ 时，问题(1)转化为如下时间分数阶扩散-波动方程的柯西问题：

$$\begin{cases}\partial_t^{1+\alpha}u-\Delta u=|u|^p & t\geqslant 0,\ x\in\mathbb{R}^n\\ u(0,x)=u_0,\ u_t(0,x)=u_1 & x\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

文献[4]得到了在小初值情况下，$u_1=0$ 及 $u_1\neq 0$ 时该问题的两个临界指数，分别为

$$\tilde{p}=1+\frac{2}{n-2+2(1+\alpha)^{-1}}$$

$$\bar{p}=1+\frac{2}{n-2(1+\alpha)^{-1}}$$

当 $\alpha\to 0^+$ 时，$\tilde{p}\to 1+\dfrac{2}{n}$ 为 Fujita 临界指数，当 $\alpha\to 1^-$ 时 $\bar{p}\to 1+\dfrac{2}{n-1}$，这与文献[12]所得到的指数相对应.

文献[6]证明了当小初值 $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 且指数满足

$$p>p_c=1+\frac{2\sigma(2+\alpha-\gamma)}{2\sigma(\gamma-\alpha-1)+(1+\alpha)n}$$

时问题(1)存在唯一整体解. 那么在 $1<p\leqslant p_c$ 时，问题(1)的解又有怎样的性质呢？ 本文拟通过构造合适的测试函数，在 $1<p<p_c$ 与 $p=p_c$ 的情形下于不同空间维数中分别证明解在有限时刻爆破，并得到生命跨度上界的估计. 下面给出本文主要结论.

定理 1　当 $\alpha\in(0,1)$，$\sigma\geqslant 1$，$\gamma\in(0,1)$ 时，假设初值 $u_0\in L^1(\mathbb{R}^n)\cap L^2(\mathbb{R}^n)$ 且满足

$$\int_{\mathbb{R}^n}u_0(x)\mathrm{d}x>0 \tag{4}$$

若

$$\begin{cases}1<p<p_c & n>\dfrac{2\sigma(1+\alpha-\gamma)}{1+\alpha}\\ p=p_c & n>\dfrac{2\sigma}{1-\gamma}\end{cases} \tag{5}$$

则问题(1)的解在有限时刻爆破. 且在 $p<1+\dfrac{2\sigma(2+\alpha-\gamma)}{(1+\alpha)n}<p_c$ 时，可以得到 $t\in[0,T]$ 时问题(1)生命跨度的上界估计

$$T\leqslant C\varepsilon^{-k}$$

其中

$$k=\frac{2\sigma(p-1)}{2\sigma(2+\alpha-\gamma)-(1+\alpha)(p-1)n}>0$$

C 是与 ε 无关的正常数.

注 1　考虑次临界情形 $p<p_c$. 当 $\alpha\to 0^+$，$\sigma=1$，$\gamma\to 1^-$ 时，$p_c\to 1+\dfrac{2}{n}$ 为 Fujita 临界指数，此时要求空间维数 $n\geqslant 1$；当 $\alpha\to 1^-$，$\sigma=1$，$\gamma\to 1^-$ 时有 $p_c\to 1+\dfrac{2}{n-1}$，这与文献[12]所得到的指数相对应，此时要求空间维数 $n\geqslant 2$.

考虑临界情形 $p=p_c$. 可以看到此时 γ 不能太靠近 1，当 $\alpha\to 1^-$，$\sigma=1$ 时有 $p_c\to 1+\dfrac{4-2\gamma}{n-2+2\gamma}$，这与文献[11]所得到的临界指数一致.

定义 1[21] (Riemann-Liouville 型分数阶积分)　令 $T>0$，$f\in L^1(0,T)$，$\alpha\in(0,1)$ 阶左侧与右侧 Riemann-Liouville 型分数阶积分分别定义为

$$J_{0|t}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t>0$$

与

$$J_{t|T}^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t<T$$

此处 $\Gamma(\alpha)$ 为伽马函数.

定义 2[21](Riemann-Liouville 型分数阶导数) 令 $T>0$, $f \in AC[0, T]$, $\alpha \in (0, 1)$ 阶左侧与右侧 Riemann-Liouville 型分数阶导数分别定义为

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t)=\partial_t (J_{0|t}^{1-\alpha} f)(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \partial_t \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t>0$$

与

$$D_{t|T}^{\alpha} f(t)=-\partial_t (J_{t|T}^{1-\alpha} f)(t)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \partial_t \int_t^T (\tau-t)^{-\alpha} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad t<T$$

对于以上微积分定义，有如下性质成立：

命题 1[21] 令 $T>0$, $\alpha \in (0, 1)$，若 $f \in J_{t|T}^{\alpha}(L^p(0, T))$, $g \in J_{0|t}^{\alpha}(L^q(0, T))$，则以下分部积分成立：

$$\int_0^T f(t) D_{0|t}^{\alpha} g(t) \mathrm{d}t=\int_0^T g(t) D_{t|T}^{\alpha} f(t) \mathrm{d}t \tag{6}$$

其中

$$J_{0|t}^{\alpha}(L^q(0, T))=\{f=J_{0|t}^{\alpha} h: h \in L^q(0, T)\}$$

与

$$J_{t|T}^{\alpha}(L^p(0, T))=\{f=J_{t|T}^{\alpha} h: h \in L^p(0, T)\}$$

此处要求

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \leqslant 1+\alpha \qquad p, q>1$$

命题 2[22] 令 $T>0$, $\alpha \in (0, 1)$，则对任意 $f \in L^r(0, T)$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$，等式

$$D_{0|t}^{\alpha} I_{0|t}^{\alpha} f(t)=f(t)$$

在 $t \in (0, T)$ 上几乎处处成立.

引理 1[23] 令$\langle x\rangle=(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}$，设 $m \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1)$，则对 $\forall q>n$ 以及 $x \in \mathbb{R}^n$，有如下不等式成立：

$$|(-\Delta)^{m+s}\langle x\rangle^{-q}| \wedge \begin{cases}\langle x\rangle^{-n-2m} & s=0 \\ \langle x\rangle^{-n-2s} & s \in (0, 1)\end{cases}$$

此处 $f \wedge g$ 表示存在一正常数 C，满足 $f \leqslant Cg$.

引理 2[23] 令 $\sigma \geqslant 1$，记 $\varphi=\varphi(x)=\langle x\rangle^{-q}$, $q>0$. 对于任意 $R>0$，定义 φ_R 为

$$\varphi_R(x)=\varphi(x/R) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

则$(-\Delta)^{\sigma}(\varphi_R)$满足以下伸缩变换性质

$$(-\Delta)^{\sigma}(\varphi_R)(x)=R^{-2\sigma}((-\Delta)^{\sigma} \varphi)(x/R) \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

在证明爆破之前，通过 Caputo 型分数阶导数的定义(2)及分部积分公式(6)，先给出问题(1)弱解的定义.

定义 3 令 $p>1$, $T>0$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. 若函数

$$u \in L^p([0, T], L^{2p}(\mathbb{R}^n)) \cap L^1([0, T], L^2(\mathbb{R}^n))$$

且对任意测试函数 $\varphi_R(x) \in H^{2\sigma}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(t) \in C^2([0, T])$，有

$$\Gamma(1-\gamma) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} J_{0|t}^{1-\gamma}|u|^p \varphi_R(x) \mathrm{d}x \varphi(t) \mathrm{d}t+D_{0|T}^{\alpha} \varphi(t) \int_{\mathbb{R}^n} \varepsilon u_0 \varphi_R(x) \mathrm{d}x=$$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta)\sigma\varphi_R(x)\mathrm{d}x\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_R(x)\mathrm{d}x\,\partial_t D^{\alpha}_{t|T}\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

则称 u 是问题(1) 的局部弱解. 若 $T=\infty$，则称 u 是问题(1) 的整体弱解.

现在引入测试函数 $\varphi(t)=D^{1-\gamma}_{t|T}\tilde{\varphi}(t)$，其中 $\tilde{\varphi}(t)=\omega(t)^{\beta}$，$\beta$ 足够大，

$$\omega(t)=\begin{cases}1-\dfrac{t}{T} & t\in[0,T]\\ 0 & t>T\end{cases}$$

关于此测试函数，有

$$\operatorname{supp}\tilde{\varphi}=[0,T]\qquad \tilde{\varphi}(t)\in C^k_c([0,\infty))\qquad \beta>k\geqslant 0$$

且有如下求导性质：

引理 3[22]　令 $T>0$，$\alpha\in(0,1)$，$\beta>\alpha$，对任意 $t\in[0,T]$，存在 $C=C(\alpha,\beta)$，有

$$D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}=C(\alpha,\beta)T^{-\alpha}\omega^{\beta-\alpha}$$

以及

$$\partial_t D^{\alpha}_{t|T}\tilde{\varphi}=-C(\alpha,\beta)T^{-\alpha-1}\omega^{\beta-\alpha-1}$$

定理 1 的证明

引入测试函数

$$\varphi_R(x)=\varphi(x/R)\qquad \varphi(x)=\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}\in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

在 $\mathbb{R}^n$ 上可积. 这里

$$s_\sigma\in\begin{cases}(0,1) & \sigma\in\mathbb{R}^n\\ (0,\sigma-[\sigma]] & \sigma\notin\mathbb{R}^n\end{cases}$$

$[\sigma]$ 为 σ 的取整. 由引理 1，可以看出对 $\forall\sigma\geqslant 1$，有

$$|(-\Delta)^{\sigma}\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}|\lesssim\langle x\rangle^{-n-2s_\sigma}$$

现将测试函数 $\varphi_{\mathbb{R}}$ 和 φ 带入(7) 式中，有

$$\Gamma(1-\gamma)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} J^{1-\gamma}_{0|t}|u|^p\varphi_R(x)\mathrm{d}x D^{1-\gamma}_{t|T}\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t+D^{\alpha}_{0|T}D^{1-\gamma}_{t|T}\tilde{\varphi}(t)\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u_0\varphi_R(x)\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta)^{\sigma}\varphi_R(x)\mathrm{d}x D^{1-\gamma}_{t|T}\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t-\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_R(x)\mathrm{d}x\,\partial_t D^{\alpha}_{t|T}D^{1-\gamma}_{t|T}\tilde{\varphi}(t)\mathrm{d}t$$

记 $\Phi_R(x,t)=\varphi_R(x)\tilde{\varphi}(t)$，由命题 1、命题 2 以及引理 3，可得

$$\Gamma(1-\gamma)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\Phi_R(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+C_1T^{\gamma-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u_0\varphi_R(x)\mathrm{d}x=$$

$$C_2T^{\gamma-1}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u(-\Delta)^{\sigma}\varphi_R(x)\mathrm{d}x\omega(t)^{\beta+\gamma-1}\mathrm{d}t+C_3T^{\gamma-\alpha-2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi_R(x)\mathrm{d}x\omega(t)^{\beta+\gamma-\alpha-2}\mathrm{d}t=I_1+I_2$$

现假设 $u(x,t)$ 为问题(1) 的整体解，令 $I_R=\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|^p\Phi_R(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$，下面分别建立 I_1 和 I_2 的估计，

$$|I_1|\lesssim T^{\gamma-1}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}|u|\Phi_R(x,t)^{\frac{1}{p}}\Phi_R(x,t)^{-\frac{1}{p}}|(-\Delta)^{\sigma}\varphi_R(x)|\mathrm{d}x|\omega(t)^{\beta+\gamma-1}|\mathrm{d}t\lesssim$$

$$I_R^{\frac{1}{p}}T^{\gamma-1}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\Phi_R(x,t)^{-\frac{p'}{p}}|(-\Delta)^{\sigma}\varphi_R(x)|^{p'}\mathrm{d}x|\omega(t)^{(\beta+\gamma-1)p'}|\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}=$$

$$I_R^{\frac{1}{p}}T^{\gamma-1}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_R(x)^{-\frac{p'}{p}}|(-\Delta)^{\sigma}\varphi_R(x)|^{p'}\mathrm{d}x|\omega(t)^{\beta+(\gamma-1)p'}|\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}}\lesssim$$

$$I_R^{\frac{1}{p}}T^{\gamma-1+\frac{1}{p'}}R^{-2\sigma+\frac{n}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{R}\right)^{-\frac{p'}{p}}\left|(-\Delta)^{\sigma}\varphi\left(\frac{x}{R}\right)\right|^{p'}\mathrm{d}\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\lesssim$$

$$I_R^{\frac{1}{p}}T^{\gamma-1+\frac{1}{p'}}R^{-2\sigma+\frac{n}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle\frac{x}{R}\rangle^{-n-2s_\sigma}\mathrm{d}\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{1}{p'}}\lesssim$$

$$I_R^{\frac{1}{p}}T^{\gamma-1+\frac{1}{p'}}R^{-2\sigma+\frac{n}{p'}}$$

以及

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\lesssim T^{\gamma-\alpha-2}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |u| \Phi_R(x,t)^{\frac{1}{p}}\Phi_R(x,t)^{-\frac{1}{p}} |\varphi_R(x)| \mathrm{d}x |\omega(t)^{\beta+\gamma-\alpha-2}| \mathrm{d}t \lesssim \\
&I_R^{\frac{1}{p}} T^{\gamma-\alpha-2}\left(\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}\varphi_R(x)\mathrm{d}x |\omega(t)^{\beta+(\gamma-\alpha-2)p'}| \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p'}} \lesssim \\
&I_R^{\frac{1}{p}} T^{\gamma-\alpha-2+\frac{1}{p'}} R^{\frac{n}{p'}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\left(\frac{x}{R}\right)\mathrm{d}\left(\frac{x}{R}\right)\right)^{\frac{1}{p'}} \lesssim \\
&I_R^{\frac{1}{p}} T^{\gamma-\alpha-2+\frac{1}{p'}} R^{\frac{n}{p'}}
\end{aligned}
$$

从而有

$$
I_R+\widetilde{C}T^{\gamma-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u_0\varphi_R(x)\mathrm{d}x \leqslant C' I_R^{\frac{1}{p}} T^{\gamma-1+\frac{1}{p}} R^{\frac{n}{p'}}(R^{-2\sigma}+T^{-1-\alpha}) \tag{8}
$$

此处 p' 为 p 的共轭指数，即$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'}=1$. 令 $R=T^{\frac{1+\alpha}{2\sigma}}$，由 Young 不等式可得

$$
I_R^{\frac{1}{p}} T^{\gamma-2-\alpha+\frac{1}{p'}+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma p'}} \leqslant \theta I_R + C(\theta) T^{\left(\gamma-2-\alpha+\frac{1}{p'}+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma p'}\right)p'}
$$

此处取 $\theta\in\left(0,\dfrac{1}{C'}\right)$，进而有

$$
I_R+CT^{\gamma-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u_0\varphi_R(x)\mathrm{d}x \lesssim T^{(\gamma-2-\alpha)p'+1+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}} \tag{9}
$$

由(5)式，当且当 $p<p_c$ 时有

$$
(\gamma-2-\alpha)p'+1+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}<0
$$

令 $T\to\infty$，可以推出

$$
I_R \lesssim T^{(\gamma-2-\alpha)p'+1+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}} \to 0
$$

故 $u=0$，这与假设(4)矛盾，所以问题(1)在次临界条件下不存在整体解.

当 $p=p_c$ 时，有

$$
(\gamma-2-\alpha)p'+1+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}=0
$$

此时令

$$
R=T^{\frac{1+\alpha}{2\sigma}}K^{-\frac{1+\alpha}{2\sigma}} \qquad \forall K\geqslant 1
$$

由(8)式及 Young 不等式可得

$$
I_R+CT^{\gamma-\alpha-1}\int_{\mathbb{R}^n}\varepsilon u_0\varphi_R(x)\mathrm{d}x \lesssim K^{(1+\alpha)p'-\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}}+K^{-\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}}
$$

当 K 足够大时，由(5)式可以推出

$$
I_R \lesssim K^{(1+\alpha)p'-\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}}+K^{-\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}} \to 0
$$

同样产生了矛盾，故问题(1)在临界条件下不存在整体解.

由(9)式可知

$$
\varepsilon T^{\gamma-\alpha-1} \lesssim T^{(\gamma-2-\alpha)p'+1+\frac{(1+\alpha)n}{2\sigma}}
$$

当 $p<1+\dfrac{2\sigma(2+\alpha-\gamma)}{(1+\alpha)n}<p_c$ 时即可得到此时生命跨度的上界估计

$$
T\leqslant C\varepsilon^{-k}
$$

其中

$$
k=\frac{2\sigma(p-1)}{2\sigma(2+\alpha-\gamma)-(1+\alpha)(p-1)n}>0
$$

C 是与 ε 无关的正常数.

参考文献：

[1] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations [M]. San Diego：Academic Press，1999.

[2] CARPINTERI A，MAINARDI F. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics [M]. New York：Springer，1997.

[3] MAINARDI F. Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity [M]. London：Imperial College Press，2010.

[4] D'ABBICCO M，EBERT M R，PICON T H. The Critical Exponent(s) for the Semilinear Fractional Diffusive Equation [J]. Journal of Fourier Analysis and Applications，2019，25(3)：696-731.

[5] MEZADEK A K，REISSIG M. Semi-Linear Fractional σ-Evolution Equations with Mass or Power Non-Linearity [J]. Nonlinear Differential Equations and Applications，2018，25(5)：42-85.

[6] ABDELATIF K M. Semi-Linear Fractional σ-Evolution Equations with Nonlinear Memory [J]. Journal of Partial Differential Equations，2020，33(4)：291-312.

[7] MEZADEK A K. Global Existence of Small Data Solutions to Semi-Linear Fractional σ-Evolution Equations with Mass and Nonlinear Memory [J]. Mediterranean Journal of Mathematics，2020，17(5)：159-179.

[8] FUJITA H. On the Blowing Up of Solutions of the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$ [J]. Journal of the Faculty of Science of the University of Toky，1966，13：109-124.

[9] HAYAKAWA K. On Nonexistence of Global Solutions of Some Semilinear Parabolic Differential Equations [J]. Proceedings of the Japan Academy，Series A，Mathematical Sciences，1973，49(7)：503-505.

[10] KOBAYASHI K，SIRAO T，TANAKA H. On the Growing Up Problem for Semilinear Heat Equations [J]. Journal of the Mathematical Society of Japan，1977，29(3)：407-424.

[11] CAZENAVE T，DICKSTEIN F，WEISSLER F B. An Equation Whose Fujita Critical Exponent is Not Given by Scaling [J]. Nonlinear Analysis，2008，68(4)：862-874.

[12] KATO T. Blow-Up of Solutions of Some Nonlinear Hyperbolic Equations [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics，1980，33(4)：501-505.

[13] STRAUSS W A. Everywhere Defined Wave Operators. In：Nonlinear Evolution Equations [M]. New York：Academic Press，1978.

[14] GLASSEY R T. Existence in the Large for $\square u = F(u)$ in Two Space Dimensions [J]. Mathematische Zeitschrift，1981，178(2)：233-261.

[15] ZHOU Y. Cauchy Problem for Semilinear Wave Equations in Four Space Dimensions with Small Initial Data [J]. Journal of Partial Differential Equations，1995，8(2)：135-144.

[16] GEORGIEV V，LINDBLAD H，SOGGE C D. Weighted Strichartz Estimates and Global Existence for Semilinear Wave Equations [J]. American Journal of Mathematics，1997，119(6)：1291-1319.

[17] SCHAEFFER J. The Equation $u_{tt} - \Delta u = |u|^p$ for the Critical Value of p [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh，1985，101(1-2)：31-44.

[18] ZHOU Y. Blow Up of Solutions to Semilinear Wave Equations with Critical Exponent in High Dimensions [J]. Chinese Annals of Mathematics(Series B)，2007，28(2)：205-212.

[19] JOHN F. Blow-Up of Solutions of Nonlinear Wave Equations in Three Space Dimensions [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America，1979，28(1-3)：235-268.

[20] GLASSEY R T. Finite-Time Blow-Up for Solutions of Nonlinear Wave Equations [J]. Mathematische Zeitschrift，1981，177(3)：323-340.

[21] SAMKO S G，KILBAS A A，MARICHEV O I. Fractional Integrals and Derivatives：Theory and Applications [M]. Yverdon：Gordon and Breach Science Publishers，1987.

[22] KILBAS A A，SRIVASTAVA H M，TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations [M]. New York：Elsevier Science Inc，2006.

[23] CHEN W H，DAO T A. On the Cauchy Problem for Semilinear Regularity-Loss-Type σ-Evolution Models with Memory Term [J]. Nonlinear Analysis：Real World Applications，2021，59：103265.

责任编辑　廖坤