

Hardy 空间上的 Volterra-复合算子^①丁宣浩^{1,2}, 邵长慧¹, 李永宁^{1,2}

1. 重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室, 重庆 400067

摘要: Hardy 空间是一类在单位圆盘上的很重要的解析函数空间, 其上的 Volterra 算子经过广泛的研究, 已经获得了很显著的理论成果. 复合算子理论也建立起了算子理论与函数论中经典问题研究之间的桥梁. 记 H^2 为单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的 Hardy 空间. 通过对 H^2 上的 Volterra 算子 V 以及复合算子 C_φ 的研究, 本文引入了 Hardy 空间上的 Volterra-复合算子 V_φ , 给出了 V_φ 的有界性、紧性、核的刻画, 同时还研究了 V_φ 的特征值及其奇异值.

关键词: Hardy 空间; Volterra-复合算子; 有界性; 紧性; 核; 特征值; 奇异值

中图分类号: O177.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)02-0040-06

Volterra-Composition Operator on the Hardy Spaces

DING Xuanhao^{1,2}, SHAO Changhui¹, LI Yongning^{1,2}

1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;

2. Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China

Abstract: Hardy space is a kind of very important analytic function spaces on the unit disk. Volterra operators on Hardy space have been extensively studied and have been obtained very significant theoretical results. The theory of complex operators also establishes a bridge between the study of operator theory and the study of classical problems in function theory. Denote H^2 the Hardy space on the unit disk $\mathbb{D}$, in this paper, we introduce the Volterra-composition operators V_φ on Hardy spaces of the unit disk by studying Volterra operators V and composition operators C_φ in H^2 . We give characterizations of the boundedness, compactness and the kernel of V_φ , and we also study the eigenvalues and singular values of V_φ .

Key words: Hardy space; Volterra-composition operator; boundedness; compactness; kernel; eigenvalues; singular values

本文中记 $\mathbb{D}$ 为复平面上的单位圆盘, $\partial\mathbb{D}$ 为单位圆周. 单位圆盘上的 Hardy 空间^[1] H^2 定义为: 由单位圆盘上的解析函数所构成的 Hilbert 空间. 设 $L^2(\partial\mathbb{D})$ 为单位圆周上的 Lebesgue 平方可积函数全体, Hardy 空

① 收稿日期: 2022-06-10

基金项目: 国家自然科学基金项目(11871122, 12101092); 重庆市自然科学基金项目(CSTB2022NSCQ-MSX1045, cstc2020jcyj-msxmX0318); 重庆市教委基金项目(KJQN202100822).

作者简介: 丁宣浩, 教授, 博士, 主要从事函数空间上算子理论的研究.

间的另一常用定义为

$$H^2 = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \in L^2(\partial \mathbb{D}) : \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{f}(n))^2 < \infty \right\}$$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$ 为函数 f 的幂级数展开式. 由 Fatou 引理和调和延拓^[2] 知: 两种关于 Hardy 空间的定义是等价的, 从而 H^2 可视为 $L^2(\partial \mathbb{D})$ 的子空间.

Volterra 算子是算子理论中一类重要的有界线性算子, 在很多数学分支, 例如线性微分方程的初值问题、优化、种群动态等问题上有着重要应用. Hardy 空间 H^2 上的经典的 Volterra 算子定义为

$$Vf(z) = \int_0^z f(s) ds \quad f \in H^2$$

该算子是紧的、拟幂零的, 没有特征值且谱集只有零点的线性算子^[3]. 文献[4] 给出了 Hardy 空间上 Volterra 算子的不变子空间的刻画: M 是 V 的不变子空间当且仅当 $M = z^n H^2(\mathbb{D})$, 这里 $n \in \mathbb{N}$. 这之后, 文献[5] 研究并解决了定义在 H^p 空间上的 Volterra 型积分算子

$$J_{\varphi} f(z) = \int_0^z f(s) \varphi'(s) ds$$

的有界性和紧性的刻画问题, 紧接着, 文献[6] 给出了该算子在 Bergman 空间上的有界性和紧性的充要条件. 随后, 文献[7] 给出了该算子在 BMOA 空间上的有界性和紧性的完全刻画. 文献[8] 研究了单位圆盘 Hardy 空间上的复 Volterra 算子的不变子空间问题.

设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为解析函数, 那么 φ 按照下述方式导出的 H^2 上的线性算子 C_{φ}

$$C_{\varphi} f(z) = f \circ \varphi(z) \quad f \in H^2$$

称为 H^2 上的由 φ 导出的复合算子^[9]. 复合算子是解析函数论与算子理论相结合的产物, 它是泛函分析中一类十分有趣的具体算子, 其研究推动着算子理论的发展, 并在动力系统、遍历理论、解析函数论等数学领域中有着重要的应用. Hardy 空间上复合算子的研究涉及算子理论与解析函数中许多经典结果之间的联系, 目前该类算子的研究已经取得比较系统的理论成果. 关于不同函数空间上的复合算子的范数、有界性、紧性、谱、Schatten 类的结果可参见文献[9-12].

文献[11] 用 Berezin 变换的方法研究了广义 Fock 空间的 Volterra 算子与复合算子乘积的有界性、紧性、Schatten- p 类性质及本性范数估计. 这激发了我们引入 Volterra-复合算子 V_{φ} , 其定义为

$$V_{\varphi} f(z) = \int_0^{\varphi(z)} f(s) ds \quad f \in H^2$$

由该算子的定义可知 $V_{\varphi} = C_{\varphi} V$, 这是我们将 V_{φ} 命名为 Volterra-复合算子的一个原因.

文献[13-14] 研究了 Hardy 空间上 Volterra 算子的其他性质. 关于 Hardy 空间上算子理论的研究, 虽然已经有超过 60 年的历史, 但仍焕发着勃勃生机. 本文的第一、第三作者和其他人合作分别研究了 Hardy 空间及其子空间上的一些算子的性质^[14-16], 这些结果对于研究其他函数空间上的算子理论有着积极作用.

在本文中, 记 $\sigma(V_{\varphi})$ 为 Volterra-复合算子 V_{φ} 的谱. 设 T 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性变换, 则 T 的核定义为

$$\ker(T) = \{X \in \mathbb{R}^n : T(X) = 0\}$$

本文安排如下: 首先, 回顾了 Volterra 算子和复合算子的研究结果, 并引入了 Volterra-复合算子 V_{φ} 的定义; 在第一节, 刻画 V_{φ} 的有界性、紧性、核等一些基本性质; 在第二节, 给出 Volterra-复合算子 V_{φ} 的特征值和奇异值.

1 基本性质

本节主要讨论 Volterra-复合算子 V_{φ} 的有界性、紧性以及核的刻画, 给出了 3 个定理.

引理 1^[9] 设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为解析函数, $p > 0$, 则对一切 $f \in H^p$, 有

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi(e^{i\theta}))|^p d\theta \leq \frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|} \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^p d\theta$$

下述结论给出了 Volterra-复合算子的范数估计:

定理 1 设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为解析函数, 那么 V_φ 为 H^2 上的有界线性算子, 并且

$$\|V_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

证 因为 $V_\varphi = C_\varphi V$, 并且对 $\forall f \in H^2$, f 有幂级数展开式

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$$

将 $f(z)$ 代入 $Vf(z)$, 则有

$$Vf(z) = \int_0^z f(s) ds = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \int_0^z s^n ds = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

特别地, 因为

$$Vz^n = \int_0^z s^n ds = \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

其中的 $\{z^n: n \geq 0\}$ 是 H^2 的一组标准正交基, 所以 V 是权序列为 $\left\{\frac{1}{n+1}: n \geq 0\right\}$ 的向右加权移位算子, 从而可知

$$\|V\| = \sup\left\{\frac{1}{n+1}: n \geq 0\right\} = 1$$

这样便有了

$$\|V_\varphi\| = \|C_\varphi V\| \leq \|C_\varphi\| \|V\| = \|C_\varphi\|$$

又由引理 1 可知

$$\|C_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

从而可以得到

$$\|V_\varphi\| \leq \sqrt{\frac{1+|\varphi(0)|}{1-|\varphi(0)|}}$$

定理 2 设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 为解析函数, 则 V_φ 是 H^2 上的紧算子.

证 由于 $V_\varphi = C_\varphi V$, 并且 V 是 H^2 上的带权序列 $\left\{\omega_n = \frac{1}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty}$ 的加权移位算子, 又因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0$,

所以 V 是紧算子. 进一步, 由于紧算子的全体是一个理想, 所以 $V_\varphi = C_\varphi V$ 是紧算子.

定理 3 设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 是非常值的解析函数, 则 $\ker V_\varphi = \{0\}$.

证 设 $f \in H^2$, 使得

$$V_\varphi f = 0$$

即

$$V_\varphi f = \int_0^{\varphi(z)} f(s) ds = 0$$

两边同时对 z 求导, 则可得 $f(\varphi(z))\varphi'(z) = 0$. 由于 φ 是非常值函数, 所以 $\varphi'(z) \neq 0$, 从而 $f(\varphi(z)) = 0$, 即 $f|_{\varphi(\mathbb{D})} = 0$. 又因为 $\varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$ 且 f 为解析函数, 由解析函数的零点定理知, 对 $z \in \mathbb{D}$, 恒有 $f(z) = 0$, 从而 $\ker V_\varphi = \{0\}$.

2 特征值与奇异值

本节主要讨论了 Volterra-复合算子 V_φ 的特征值和奇异值问题.

引理 2^[9] 设 φ 为内函数, 则 C_φ 为等距算子当且仅当 $\int \varphi dm = 0$ (即 $\varphi(0) = 0$).

定义 1 设 H 是可分的 Hilbert 空间, T 是 H 上的有界线性算子, 若对 $\lambda \in \mathbb{C}$, 存在非零向量 $x \in H$, 使得 $Tx = \lambda x$, 则称 λ 是 T 的特征值, 称 x 是 T 的对应特征值 λ 的特征向量.

定理 4 对 $\forall a \in \mathbb{D}, z \in \mathbb{D}$, 记 $\varphi_a(z) = \frac{a-z}{1-\bar{a}z}$, 则 V_{φ_a} 没有非零的特征值, 即 $\sigma(V_{\varphi_a}) = \{0\}$.

证 假设 $\lambda \neq 0$ 是 V_{φ_a} 的特征值, 则存在非零函数 $f \in H^2$, 使得 $V_{\varphi_a} f = \lambda f$, 即

$$C_{\varphi_a} V f = \lambda f$$

首先等式两边作用复合算子 C_{φ_a} , 可得

$$C_{\varphi_a} C_{\varphi_a} V f = \lambda C_{\varphi_a} f$$

注意到

$$C_{\varphi_a} C_{\varphi_a} = I$$

从而

$$V f(z) = \lambda f \circ \varphi_a(z) \quad (1)$$

再将 V 作用于等式(1)的两边, 由 $\varphi_a \circ \varphi_a(z) = z$ 可得

$$V^2 f(z) = \lambda V f \circ \varphi_a(z) = \lambda (\lambda f \circ \varphi_a \circ \varphi_a(z)) = \lambda^2 f(z) \quad (2)$$

将 $f(z)$ 在 $\mathbb{D}$ 中展开成幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n$, 则

$$V^2 f(z) = V \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n+1} z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{(n+1)(n+2)} z^{n+2}$$

代入(2)式, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{(n+1)(n+2)} z^{n+2} = \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \quad (3)$$

比较(3)式中左右两端中常数项的系数, 则有 $\lambda^2 \hat{f}(0) = 0$, 因为 $\lambda \neq 0$, 从而 $\hat{f}(0) = 0$.

比较(3)式中左右两端 z 的系数, 则

$$\lambda^2 \hat{f}(1) = 0 \quad \lambda \neq 0$$

进而得到 $\hat{f}(1) = 0$.

同理比较(3)式两端 z^2 的系数, 可得

$$\lambda^2 \hat{f}(2) = \frac{\hat{f}(0)}{2} = 0 \quad \lambda \neq 0$$

从而推得 $\hat{f}(2) = 0$.

依次进行下去, 比较(3)式两端 z 的同次幂系数, 可以得到, 当 $n \geq 0$ 时, 皆有 $\hat{f}(n) = 0$. 从而 $f = 0$, 这与 f 非零矛盾, 故 V_{φ_a} 没有非零特征值, 由定理 2 知, V_{φ_a} 是紧的, 所以 $\sigma(V_{\varphi_a}) = \{0\}$.

定义 2 设 T 是可分 Hilbert 空间上的有界线性算子, 若 λ 是正算子 $T^* T$ 的特征值, 则称 $\sqrt{\lambda}$ 为 T 的奇异值.

下述定理给出了 V_φ 的奇异值刻画:

定理 5 设 $\varphi: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ 是内函数且 $\varphi(0) = 0$, 则 V_φ 的奇异值全体为 $\left\{ \frac{1}{n+1} : n = 0, 1, 2, \dots \right\}$.

证 由 φ 为内函数且 $\varphi(0) = 0$, 根据引理 2 可知 C_φ 为等距算子, 即有

$$C_\varphi^* C_\varphi = I$$

这样我们可以得到

$$V_{\varphi}^* V_{\varphi} = V^* C_{\varphi}^* C_{\varphi} V = V^* V$$

又因为

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n \quad f \in H^2$$

所以

$$\langle Vf, 1 \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n+1} z^{n+1}, 1 \rangle = \langle f, V^* 1 \rangle = 0$$

从而可以得到 $V^* 1 = 0$.

同理, 由于

$$\langle Vf, z^k \rangle = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(n)}{n+1} z^{n+1}, z^k \rangle = \frac{\hat{f}(k-1)}{k}$$

所以有

$$\langle Vf, z^k \rangle = \frac{\hat{f}(k-1)}{k} = \langle \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n, \frac{z^{k-1}}{k} \rangle = \langle f, V^* z^k \rangle$$

从而

$$V^* z^k = \frac{1}{k} z^{k-1} \quad k \geq 1$$

于是

$$V^* V z^k = V^* \frac{1}{k+1} z^{k+1} = \frac{1}{k+1} V^* z^{k+1} = \frac{1}{(k+1)^2} z^k$$

这表明 $V^* V$ 是对角线为 $\left\{ \frac{1}{(k+1)^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$ 的正对角算子, 因此 $V^* V$ 的特征值为 $\left\{ \frac{1}{(k+1)^2} \right\}_{k=0}^{\infty}$, 从而 $V_{\varphi}^* V_{\varphi}$ 的

特征值为 $\left\{ \frac{1}{(k+1)^2} : k \geq 0 \right\}$, 故可得 V_{φ} 的奇异值为 $\left\{ \frac{1}{k+1} : k \geq 0 \right\}$.

例 1 设 $\varphi = z^N$, 其中 N 为大于 1 的正整数, 则 $\sigma(V_{\varphi}) = \{0\}$.

证 假设 $\lambda \neq 0$ 是 V_{φ} 的特征值, 那么存在非零函数 $f \in H^2$, 使得

$$V_{\varphi} f = \lambda f$$

根据定义知

$$V_{\varphi} f = \int_0^{z^N} f(s) ds = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) \int_0^{z^N} s^i ds = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(i)}{i+1} z^{(i+1)N}$$

$$\lambda f = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) z^i$$

则有

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(i)}{i+1} z^{(i+1)N} = \lambda \sum_{i=0}^{\infty} \hat{f}(i) z^i \quad (4)$$

首先, 比较(4)式两端的常数项, 可得

$$\lambda \hat{f}(0) = 0$$

由于 $\lambda \neq 0$, 所以 $\hat{f}(0) = 0$. 比较(4)式两端 z 的系数可得

$$\lambda \hat{f}(1) = 0$$

由 $\lambda \neq 0$ 可推出 $\hat{f}(1) = 0$. 依次进行下去, 比较(4) 式两端 z 的同次幂的系数, 则当 $i > 0$ 时, $\hat{f}(i) = 0$, 故 $f = 0$, 而这与假设相矛盾. 因此 V_φ 没有非零的特征值, 又由定理 2 知 V_φ 是紧的, 所以 $\sigma(V_\varphi) = \{0\}$.

参考文献:

- [1] DOUGLAS R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [2] ZHU K H. Operator Theory in Function Spaces [M]. Providence: American Mathematical Society, 2007.
- [3] GOHBERG I C, KREIN M G. Theory and Applications of Volterra Operators in Hilbert Space [M]. Providence: American Mathematical Society, 1970.
- [4] DONOGHUE W F. The Lattice of Invariant Subspaces of a Completely Continuous Quasi-Nilpotent Transformation [J]. Pacific Journal of Mathematics, 1957, 7(2): 1031-1035.
- [5] ALEMAN A, SISKAKIS A G. An Integral Operator on H^p [J]. Complex Variables, Theory and Applications, 1995, 28(2): 149-158.
- [6] ALEMAN A, SISKAKIS A G. Integration Operators on Bergman Spaces [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1997, 46(2): 337-356.
- [7] SISKAKIS A, ZHAO R H. A Volterra Type Operator on Spaces of Analytic Functions [J]. Contemporary Mathematics, 1999, 232: 299-311.
- [8] ALEMAN A, KORENBLUM B. Volterra Invariant Subspaces of H^p [J]. Bulletin des Sciences Mathématiques, 2008, 132(6): 510-528.
- [9] 徐宪民. 复合算子理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1999: 105-139.
- [10] COWEN C, MACCLUER B D. Composition Operators on Spaces of Analytic Functions [M]. Boca Raton: Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, 1995.
- [11] 罗小娟, 王晓峰, 夏锦. 广义 Fock 空间之间的 Volterra 型积分算子与复合算子的乘积 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2020, 57(1): 32-42.
- [12] 林庆泽. Volterra 型算子在导数 Hardy 空间上的紧性及谱 [J]. 海南师范大学学报(自然科学版), 2020, 33(4): 388-390.
- [13] 李腾飞. 从 Hardy 空间到 Bloch 空间的 Volterra 型复合算子 [J]. 应用数学学报, 2019, 42(3): 306-307.
- [14] 李永宁, 梁焕超, 丁宣浩. 圆周上的小 Hankel 算子 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 89-94.
- [15] 李永宁, 梁焕超, 丁宣浩. 3 个 Toeplitz 算子的乘积 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(8): 18-23.
- [16] 丁宣浩, 梁焕超, 李永宁. 可交换的 Toeplitz 算子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(2): 27-31.

责任编辑 廖坤