第 48 卷　第 2 期　　西 南 师 范 大 学 学 报（自然科学版）　　2023 年 2 月
Vol. 48　No. 2　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Feb.　2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.02.006

非自治 Schrödinger-Bopp-Podolsky 系统的基态解①

贾春容[1]，　李麟[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

摘要：讨论如下非自治的 Schrödinger-Bopp-Podolsky 系统

$$\begin{cases}-\Delta u+u+K(x)\phi u=b(x)|u|^{p-2}u & \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}\\ -\Delta\phi+a^2\Delta^2\phi=4\pi K(x)u^2 & \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}\end{cases}$$

其中 $4<p<6$ 且 $K(x)$ 和 $b(x)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中不要求任何对称性的非负函数. 利用 Nehari 流形与分裂引理的方法证明 Schrödinger-Bopp-Podolsky 系统存在基态解.

关　键　词：非自治 Schrödinger-Bopp-Podolsky 系统；基态解；Nehari 流形；分裂引理

中图分类号：O176.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)02-0046-05

Ground State Solution for Non-autonomous Schrödinger-Bopp-Podolsky System

JIA Chunrong[1]，　LI Lin[1,2]

1. *School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;*
2. *Chongqing Key Laboratory of Social Economy and Applied Statistics, Chongqing 400067, China*

Abstract: The following non-autonomous system is discussed in $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases}-\Delta u+u+K(x)\phi u=b(x)|u|^{p-2}u\\ -\Delta\phi+a^2\Delta^2\phi=4\pi K(x)u^2\end{cases}$$

where $4<p<6$, $K(x)$ and $b(x)$ are both nonnegative functions in $\mathbb{R}^3$ which do not require any symmetry. By using the Nehari manifold and splitting lemma, we prove the existence of ground state solution for Schrödinger-Bopp-Podolsky system.

Key words: non-autonomous Schrödinger-Bopp-Podolsky system; ground state solutions; Nehari manifold; splitting lemma

本文主要研究非自治 Schrödinger-Bopp-Podolsky 系统基态解的存在性：

$$\begin{cases}-\Delta u+u+K(x)\phi u=b(x)|u|^{p-2}u & \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}\\ -\Delta\phi+a^2\Delta^2\phi=4\pi K(x)u^2 & \text{在 } \mathbb{R}^3 \text{ 中}\end{cases}\tag{1}$$

① 收稿日期：2021-11-20
基金项目：重庆市教育委员会基金(KJQN20190081)，重庆工商大学基金(CTBUZDPTTD201909)，重庆工商大学研究生创新型科研项目(yjscxx2022-112-187).
作者简介：贾春容，硕士研究生，主要从事非线性泛函分析的研究.
通信作者：李麟，教授.

其中 $a>0$，$K(x)$ 和 $b(x)$ 满足条件：

(A) $\lim_{|x|\to\infty} b(x)=b_\infty>0$，$\lim_{|x|\to\infty} K(x)=K_\infty>0$.

近年来，Schrödinger-Bopp-Podolsky（简称 SBP）系统受到越来越多的关注. 文献[1]证明 SBP 系统解的存在性与不存在性依赖于参数 p 和 q；随后文献[2]通过纤维法证明当 q 足够大时，SBP 系统没有解；当 q 足够小时，SBP 系统有两个镜像解；文献[3]使用 Pohozaev-Nehari 流形的方法证明非线性项临界增长的 SBP 系统存在基态解. 目前只有关于 SBP 系统自治的研究，如文献[3-6]，未考虑非自治的情况. 受文献[7-8]的启发，发现 $K(x)$ 和 $b(x)$ 对系统有影响. 本文利用文献[8]中的思想来研究非自治 SBP 系统的基态解. 变分方法是一类很重要的方法，已经在其他问题上用这个办法解决了很多问题[9-11].

本文通过建立紧性引理和使用 Nehari 流形的方法去找 SBP 系统的基态解. 为得到基态解的存在，对 $K(x)$ 和 $b(x)$ 给出如下假设条件：

(B) 对所有的 $x\in\mathbb{R}^3$ 有 $K(x)\leqslant K_\infty$，$b(x)\geqslant b_\infty$ 成立，且 $b(x)-b_\infty>0$ 在一个正可测集上.

本文主要结果如下：

定理 1　如果满足条件(A)和(B)，则系统(1)有一个基态解.

注 1　本文主要在 $\mathbb{R}^3$ 中讨论 SBP 系统基态解的存在，最大的困难在于我们无法在全空间 $\mathbb{R}^3$ 中得到嵌入紧性. 为了克服障碍我们利用分裂引理恢复有界 Palais-Smale 序列的紧性. 同时为了找到方程对应能量泛函的临界点，我们将通过限制在一个 Nehari 流形上，然后寻找最小能量解. 文献[12]已经证过 Nehari 流形上的解，就是原问题的基态解.

符号说明：C,C_0,C_i 均是正常数. $H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 Hilbert 空间，具有内积 $\langle u,v\rangle=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla v+uv)\mathrm{d}x$ 和范数 $\|u\|^2=\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x$. 为了方便，记 $\|\cdot\|$ 表示 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 的范数，$\|\cdot\|_q$ 表示空间 $L^q(\mathbb{R}^3)$ 的范数. 且定义 $\mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3)=\{u\in L^6(\mathbb{R}^3):\nabla u\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$，$\mathscr{D}=\{\phi\in\mathscr{D}^{1,2}(\mathbb{R}^3):\Delta\phi\in L^2(\mathbb{R}^3)\}$ 是 $C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ 的完备化，由内积 $\langle\varphi,\psi\rangle_{\mathscr{D}}=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla\varphi\nabla\psi+a^2\Delta\varphi\Delta\psi)\mathrm{d}x$ 诱导下的范数表示为 $\|\cdot\|_{\mathscr{D}}$（其相关引理已在参考文献[1]中给出）.

本文根据文献[1]中的方法，首先对系统的第二个方程进行约化，变成单变量方程，系统(1)约化后的单变量方程如下：

$$-\Delta u+u+K(x)\phi_{K,u}u=b(x)|u|^{p-2}u\qquad 在\ \mathbb{R}^3\ 中 \tag{2}$$

方程对应的能量泛函为 $\mathscr{J}(u)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^3}(|\nabla u|^2+u^2)\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^p\mathrm{d}x$. 其导函数为 $\mathscr{J}'(u)[\varphi]=\int_{\mathbb{R}^3}(\nabla u\nabla\varphi+u\varphi+K(x)\phi_{K,u}u\varphi-b(x)|u|^{p-2}u\varphi)\mathrm{d}x$，其中 $\varphi\in H^1(\mathbb{R}^3)$.

用文献[1]中方法求得 SBP 系统的第二个方程的解为 $\phi_{K,u}(x)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{a}}}{|x-y|}K(y)u^2(y)\mathrm{d}y$. 现在需要求方程(2)的解，即找 $\mathscr{J}$ 的一个临界点. 不难验证泛函 $\mathscr{J}$ 既不是下方有界也不是上方有界，所以此时考虑将 $\mathscr{J}$ 限制在一个自然约束 Nehari 流形中. 在 Nehari 流形上 $\mathscr{J}$ 是下方有界的. 如果 $u\in H^1(\mathbb{R}^3)$ 是 $\mathscr{J}$ 的临界点，则一对 $(u,\phi_{K,u})\in H^1(\mathbb{R}^3)\times\mathscr{D}$ 是方程(1)的一个基态解（相关证明参考文献[13]）.

此时，定义 Nehari 流形，$\mathscr{N}:=\{u\in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}:G(u)=0\}$，其中 $G(u)=\mathscr{J}'(u)[u]=\|u\|^2+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^p\mathrm{d}x$. 则有下面等式成立：

$$\mathscr{J}_{|\mathscr{N}}(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|u\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x \tag{3}$$

$$\mathscr{J}_{|\mathscr{N}}(u)=\frac{1}{4}\|u\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^p\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\mathscr{J}_{|\mathscr{N}}(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}b(x)|u|^p\mathrm{d}x-\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x \tag{5}$$

然后给出包含$\mathcal{N}$的主要性质的引理.

引理1

(i) $\mathcal{N}$是一个C^1正则流形同构于$H^1(\mathbb{R}^3)$的一个球;

(ii) 在$\mathcal{N}$上，存在$C_2 \in \mathbb{R}$，有$u \in \mathcal{N}$，使得$\mathcal{J}(u) > C_2 > 0$;

(iii) u是$\mathcal{J}$的一个自由临界点当且仅当u是$\mathcal{J}$限制在$\mathcal{N}$上的临界点.

证 (i) 利用文献[7]中引理3.1(1)的证明方法可得，$\mathcal{J}(t(u)u)=\max_{t>0}\mathcal{J}(t(u)u)$. 设$u \in \mathcal{N}$，则有$0=\| u \|^2+\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3} b(x)\,|\,u\,|^p\mathrm{d}x \geqslant \| u \|^2-C_0\| u \|^p$，故得出

$$\| u_n \| \geqslant C > 0 \tag{6}$$

因为$\mathcal{J}$是一个$C^2(H^1(\mathbb{R}^3),\mathbb{R})$泛函，$G$是一个$C^1$泛函，则由(6)式推出

$$\begin{aligned} G'(u)[u]=\mathcal{J}''(u)[u][u]=2\| u \|^2+4\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x-p\int_{\mathbb{R}^3} b(x)\,|\,u\,|^p\mathrm{d}x=\\ (2-p)\| u \|^2+(4-p)\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x \leqslant\\ (2-p)\| u \|^2 \leqslant -(p-2)C_1 < 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(ii) 设$u \in \mathcal{N}$，由(3)式和(6)式有$\mathcal{J}(u)=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\| u \|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3} K(x)\phi_{K,u}u^2\mathrm{d}x \geqslant \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\| u \|^2 > C_2 > 0$.

(iii) 与文献[7]中的引理3.1(3)的证明一样.

设$m:=\inf\{\mathcal{J}(u):u \in \mathcal{N}\}$. 由引理1中(ii)知，$m$是一个正常数. 由引理1中(i)知，任意的$u \in H^1(\mathbb{R}^3)$对应(唯一)一个$t(u)>0$，使得$\mathcal{J}(t(u)u)=\max_{t(u)>0}\mathcal{J}(t(u)u)$成立.

现在考虑$K(x)\xrightarrow{|\,x\,|\to\infty}K_\infty$和$b(x)\xrightarrow{|\,x\,|\to\infty}b_\infty$的情况，在无穷远处时同样对系统进行约化，约化后的方程如下:

$$-\Delta u+u+K_\infty\,\tilde{\phi}_{K,u}u=b_\infty\,|\,u\,|^{p-2}u \tag{8}$$

方程对应的能量泛函为$\mathcal{I}(u)=\frac{1}{2}\| u \|^2+\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty\,\tilde{\phi}_{K,u}u^2\mathrm{d}x-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} b_\infty\,|\,u\,|^p\mathrm{d}x$. 利用求$\phi_{K,u}$的方法可以求出方程$-\Delta\tilde{\phi}_{K,u}+a^2\Delta^2\tilde{\phi}_{K,u}=4\pi K_\infty u^2$的解，表示为$\tilde{\phi}_{K,u}=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{a}}}{|\,x-y\,|}K_\infty u^2(y)\mathrm{d}y$. 定义Nehari流形$\mathcal{M}:=\{u \in H^1(\mathbb{R}^3)\backslash\{0\}:H(u)=0\}$，其中$H(u)=\mathcal{I}'(u)[u]=\| u \|^2+\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty\,\tilde{\phi}_{K,u}u^2\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3} b_\infty\,|\,u\,|^p\mathrm{d}x$. 定义$c:=\inf\{\mathcal{I}(u):u \in \mathcal{M}\}$. 因为引理1中的(i),(ii),(iii)对于$\mathcal{M}$也是成立的，故c是一个正常数. 则对任意的$u \in H^1(\mathbb{R}^3)$对应(唯一)一个$\xi(u)>0$使得$\mathcal{I}(\xi(u)u)=\max_{\xi(u)\geqslant 0}\mathcal{I}(\xi(u)u)$成立. 现在考虑在无穷远处约化后方程的Palais-Smale(简称(PS))序列的紧性情况.

引理2 设$\{u_n\}$是$\mathcal{I}$的一个有界Palais-Smale序列，则有$\mathcal{I}(u_n)$是有界的，且在$H^1(\mathbb{R}^3)$中，$\mathcal{I}'(u_n)\to 0$. 现取其子序列仍记为$\{u_n\}$，若有$l \in \mathbb{N}\cup\{0\}$和$H^1(\mathbb{R}^3)$中的$l$个函数$u^1,\cdots,u^l$以及点列$y_n^k \in \mathbb{R}^3(0 \leqslant k \leqslant l)$，使得下面条件成立:

(i) 如果$1 \leqslant k \neq h \leqslant l$，$n\to+\infty$，则$|\,y_n^k\,|\to+\infty$，$|\,y_n^k-y_n^h\,|\to+\infty$;

(ii) 在$H^1(\mathbb{R}^3)$中，有$u_n-\sum_{k=1}^{l}u^k(\cdot-y_n^k)\to\bar{u}$;

(iii) $\mathcal{I}(u_n)\to\mathcal{I}(\bar{u})+\sum_{k=1}^{l}\mathcal{I}(u^k)$;

(iv) u^k是方程(8)的非平凡解. 上述条件中若$l=0$，则(8)式存在一个解$\bar{u}$.

证 与文献[1]中引理4.5证明类似，此处省略证明过程.

命题1 存在$w \in \mathcal{M}$，使得$\mathcal{I}(w)=c$成立.

证 设$u_n \in \mathcal{M}$是$\mathcal{I}$的一个极小化序列，则当$n\to+\infty$时，有$\mathcal{I}(u_n)\to c$. 设$t_n>0$使$t_n\,|\,u_n\,| \in \mathcal{M}$

成立. 因为 $u_n \in \mathscr{M}$，则有$(t_n^2 - t_n^p)\| u_n \|^2 + (t_n^4 - t_n^P)\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty \tilde{\phi}_{K,u_n}(u_n)^2 \mathrm{d}x = 0$，故对 $n \in \mathbb{N}$，有 $t_n = 1$.

通过 Ekeland 变分原理存在 $\tilde{u}_n \in \mathscr{M}$ 使得下面条件成立：

(a) 当 $n \to +\infty$ 时，$\mathscr{I}(\tilde{u}_n) \to c$；

(b) 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，当 $n \to +\infty$ 时，有 $\nabla \mathscr{I}_{|\mathscr{M}}(\tilde{u}_n) \to 0$；

(c) 当 $n \to +\infty$ 时，$\| u_n - \tilde{u}_n \| \to 0$.

现在需要证明当 $n \to +\infty$ 时，$\nabla \mathscr{I}(\tilde{u}) \to 0$ 成立. 则对 $\sigma_n \in \mathbb{R}$，有 $o(1) = \nabla \mathscr{I}_{|\mathscr{M}}(\tilde{u}_n) = \nabla \mathscr{I}(\tilde{u}_n) - \sigma_n \nabla H(\tilde{u}_n)$. 因为 $\tilde{u}_n \in \mathscr{M}$，得到 $o(1) = (\nabla \mathscr{I}(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n) - \sigma_n(\nabla H(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n)$. 推出 $\sigma_n(\nabla H(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n) \to 0$. 此时用与(7) 式相同的计算方法可得$(\nabla H(\tilde{u}_n), \tilde{u}_n) < -C_3 < 0$. 所以当 $n \to +\infty$ 时，有 $\sigma_n \to 0$. 此外，又因为 $\nabla H(\tilde{u}_n)$ 是有界的，则当 $n \to +\infty$ 时，有 $\sigma_n \nabla H(\tilde{u}_n) \to 0$. 故在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中有 $\nabla \mathscr{I}(\tilde{u}_n) \to 0$.

又因为 $\mathscr{I}''$ 将有界集映射到有界集，则通过中值定理可知，在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，当 $n \to +\infty$ 时，有 $\nabla \mathscr{I}(u_n) \to 0$. 则$\{u_n\}$ 是 $\mathscr{I}$ 的一个有界(PS) 序列. 由引理 2 知，如果 $\bar{u} \neq 0$，则有 $c = \mathscr{I}(\bar{u}) + \sum_{k=1}^{l} \mathscr{I}(u^k) \geqslant (l+1)c$，可得 $l = 0$. 则在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，有 u_n 强收敛到 $\bar{u}$. 相反，如果 $\bar{u} = 0$，则有 $c = \mathscr{I}(\bar{u}) + \sum_{k=1}^{l} \mathscr{I}(u^k) \geqslant lc$，可得 $l = 1$. 在平移意义下，有 $u_n \to u^1$. 综上，c 可由非负的 w 达到. 又由(6) 式知，$\| u_n \| \geqslant C > 0$，故由强收敛性知 $w \neq 0$，得 $w \in \mathscr{M}$. 最后通过连续性和极限的唯一性可知，$\mathscr{I}(w) = c$ 成立.

现回到方程(2)，基于 $\mathscr{J}$ 的临界点的研究，通过考虑(1) 式的(PS) 序列的情况，得出如下引理.

引理 3　设$\{u_n\}$ 是 $\mathscr{J}$ 限制在 $\mathscr{N}$ 上的一个有界(PS) 序列，故 $u_n \in \mathscr{N}$，有 $\mathscr{J}(u_n)$ 是有界的；且在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，有 $\mathscr{J}'_{|\mathscr{N}}(u_n) \to 0$. 现取其子序列仍记为$\{u_n\}$，若有 $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ 和 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中的 l 个函数 $u^1, \cdots, u^l$ 以及点列 $y_n^k \in \mathbb{R}^3 (0 \leqslant k \leqslant l)$，使得下面条件成立：

(i) 如果 $1 \leqslant k \neq h \leqslant l$，$n \to +\infty$，则 $| y_n^k | \to +\infty$，$| y_n^k - y_n^h | \to +\infty$；

(ii) 在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，有 $u_n - \sum_{k=1}^{l} u^k(\cdot - y_n^k) \to u$；

(iii) $\mathscr{J}(u_n) \to \mathscr{J}(u) + \sum_{k=1}^{l} \mathscr{I}(u^k)$；

(iv) u^k 是方程(8) 的非平凡解. 若 $l = 0$，则(2) 式存在一个解 u.

证　因为 $\phi_{K,u} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1 - \mathrm{e}^{-\frac{|x-y|}{a}}}{|x-y|} K(y) u^2(y) \mathrm{d}y \leqslant \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} K(y) u^2(y) \mathrm{d}y$，所以与文献[1] 的引理 4.5 中的证明方法类似，故在这省略证明过程.

定义 1　如果 $\mathscr{J}(u_n) \to d$ 且 $\mathscr{J}'(u_n) \to 0$，则$\{u_n\}$ 是一个$(\mathrm{PS})_d$ 序列.

推论 1　设$\{u_n\}$ 是一个$(\mathrm{PS})_d$ 序列，则对所有 $d \in (0, c)$，$\{u_n\}$ 是相对紧的.

证　设$\{u_n\}$ 是一个$(\mathrm{PS})_d$ 序列，则 $\mathscr{J}(u_n) \to d$. 由引理 3 可知，对所有的 k 有 $\mathscr{I}(u^k) \geqslant c$. 当 $\mathscr{J}(u_n) = d < c$ 时，引理 3 的(iii) 给出 $l = 0$，则在 $H^1(\mathbb{R}^3)$ 中，有 $u_n \to u$. 故对所有 $d \in (0, c)$，$\{u_n\}$ 是相对紧的.

利用上述已证引理，现给出定理 1 的证明.

定理 1 的证明　为求证定理 1，由推论 1 可知，现只需证明 $m < c$. 由命题 1 知，有 $w \in \mathscr{M}$ 使得 $\mathscr{I}(w) = c$ 成立. 取 $t > 0$ 使 $tw \in \mathscr{N}$. 因为 $tw \in \mathscr{N}$，$w \in \mathscr{M}$ 和(B) 成立，则

$$
\begin{aligned}
& t^p \| w \|^2 + t^p \int_{\mathbb{R}^3} K_\infty \tilde{\phi}_{K,w} w^2 \mathrm{d}x = t^p \int_{\mathbb{R}^3} b_\infty | w |^p \mathrm{d}x \leqslant \\
& t^p \int_{\mathbb{R}^3} b(x) | w |^p \mathrm{d}x = t^2 \| w \|^2 + t^4 \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{K,w} w^2 \mathrm{d}x \leqslant \\
& t^2 \| w \|^2 + t^4 \int_{\mathbb{R}^3} K_\infty \tilde{\phi}_{K,w} w^2 \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

推出$(t^p - t^2)\| w \|^2 + (t^p - t^4)\int_{\mathbb{R}^3} K_\infty \tilde{\phi}_{K,w} w^2 \mathrm{d}x \leqslant 0$，所以得出 $t \leqslant 1$. 此外 $t \neq 1$，因为当 $t = 1$ 时，有 $\int_{\mathbb{R}^3} b_\infty | w |^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} K_\infty \tilde{\phi}_{K,w} w^2 \mathrm{d}x = \| w \|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} b(x) | w |^p \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^3} K(x) \phi_{K,w} w^2 \mathrm{d}x$，即$\int_{\mathbb{R}^3} (b_\infty -$

$b(x))|w|^p\mathrm{d}x-\int_{\mathbb{R}^3}K_\infty\tilde{\phi}_{K,w}w^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,w}w^2\mathrm{d}x=0$. 由(B)可得 $-\int_{\mathbb{R}^3}K_\infty\tilde{\phi}_{K,w}w^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,w}w^2\mathrm{d}x\leqslant 0$ 和 $\int_{\mathbb{R}^3}(b_\infty-b(x))|w|^p\mathrm{d}x\leqslant 0$，又因为 $b(x)-b_\infty>0$ 在一个正可测集上，故 $\int_{\mathbb{R}^3}(b_\infty-b(x))|w|^p\mathrm{d}x\neq 0$，与 $t=1$ 矛盾. 最后得出

$$\begin{aligned}m\leqslant\mathscr{J}(tw)=&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|tw\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}K(x)\phi_{K,tw}(tw)^2\mathrm{d}x\leqslant\\&t^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|w\|^2+t^4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}K_\infty\tilde{\phi}_{K,w}w^2\mathrm{d}x<\\&\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{p}\right)\|w\|^2+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^3}K_\infty\tilde{\phi}_{K,w}w^2\mathrm{d}x=\\&\mathscr{I}(w)=c\end{aligned}$$

即 $w\in\mathscr{N}$，有 $\mathscr{I}(w)=c$. 所以 $w\in\mathscr{N}$ 是 $\mathscr{J}$ 的一个临界点，故由引理1(iii)知，w 是 $\mathscr{J}$ 的一个自由临界点，最后得出 $(w,\phi_{K,w})\in H^1(\mathbb{R}^3)\times\mathscr{D}$ 是(1)式的一个基态解.

参考文献：

[1] D'AVENIA P, SICILIANO G. Nonlinear Schrödinger Equation in the Bopp-Podolsky Electrodynamics: Solutions in the Electrostatic Case [J]. Journal of Differential Equations, 2019, 267(2): 1025-1065.

[2] SICILIANO G, SILVA K. The Fibering Method Approach for a Non-Linear Schrödinger Equation Coupled with the Electromagnetic Field [J]. Publicacions Matemàtiques, 2020, 64: 373-390.

[3] LI L, PUCCI P, TANG X H. Ground State Solutions for the Nonlinear Schrödinger-Bopp-Podolsky System with Critical Sobolev Exponent [J]. Advanced Nonlinear Studies, 2020, 20(3): 511-538.

[4] ZHU Y T, CHEN C F, CHEN J H. The Schrödinger-Bopp-Podolsky Equation under the Effect of Nonlinearities [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2021, 44(2): 953-980.

[5] CHEN S T, TANG X H. On the Critical Schrödinger-Bopp-Podolsky System with General Nonlinearities [J]. Nonlinear Analysis, 2020, 195: 111734.

[6] YANG J, CHEN H B, LIU S L. The Existence of Nontrivial Solution of a Class of Schrödinger-Bopp-Podolsky System with Critical Growth [J]. Boundary Value Problems, 2020, 2020: 144.

[7] CERAMI G, VAIRA G. Positive Solutions for some Non-Autonomous Schrödinger-Poisson Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248(3): 521-543.

[8] VAIRA G. Ground States for Schrödinger-Poisson Type Systems [J]. Ricerche Di Matematica, 2011, 60(2): 263-297.

[9] 王德菊，唐春雷，吴行平. 一类区域分数阶 Schrödinger 方程的基态解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2018，43(6): 21-26.

[10] 毕文静，唐春雷，丁凌. 一类耦合非线性 Schrödinger-KdV 系统基态解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(2): 37-42.

[11] 陈卫，唐春雷. 一类超线性分数阶 Schrödinger 方程解的多重性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(4): 26-30.

[12] WILLEM M. Minimax Theorems [M]. Boston: Birkhäuser, 1996.

[13] BADIALE M, SERRA E. Semilinear Elliptic Equations for Beginners: Existence Results via the Variational Approach [M]. Boston: Birkhäuser, 2010.

责任编辑 张栒