第 48 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 3 月
Vol. 48 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.03.004

一类微分形式的椭圆方程很弱解梯度的零点①

康迪[1]，　赵崧[1]，　徐秀娟[1,2]

1. 华北理工大学 理学院，河北 唐山 063210；
2. 河北省数据科学与应用重点实验室，河北 唐山 063210

摘要：文章考虑了一类微分形式的椭圆方程，通过 Hodge 分解、Poincaré 不等式等工具，证明了其很弱解的梯度满足弱逆 Hölder 不等式，并得到了该方程很弱解梯度的几乎每一个零点都有无穷阶.

关 键 词：微分形式；很弱解；Hodge 分解；零点

中图分类号：O175.23　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)03-0025-06

Zeros of Very Weak Solution Gradients for a Class of Differential Form Elliptic Equations

KANG Di[1]，　ZHAO Song[1]，　XU Xiujuan[1,2]

1. College of Science, North China University of Technology, Tangshan Hebei 063210, China;
2. Hebei Key Laboratory of Data Science and Application, Tangshan Hebei 063210, China

Abstract: The article considers a class of differential form elliptic equations, and proves that the gradient of their very weak solutions satisfies the weak inverse Hölder inequality by tools such as Hodge decomposition, Poincaré inequality, and obtains that almost every zero of the gradient of the very weak solutions of this equation has infinite order.

Key words: differential forms; very weak solutions; Hodge decomposition; zeros

设 Ω 是 $\mathbb{R}^n (n \geqslant 2)$ 中的正则区域，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ 为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基. 由外积 $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_l}$ 张成的 l 维线性空间记为 $\Lambda^l = \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$，$I = (i_1, i_2, \cdots, i_l)(1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant n, l = 0, 1, \cdots, n)$ 取遍所有的 l 重数. 定义 Hodge 星算子 $*: \Lambda \longrightarrow \Lambda$，对任意 $\alpha, \beta \in \Lambda$，满足 $*1 = e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$，且 $\alpha \wedge *\beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \alpha, \beta \rangle * 1$.

微分形式是实值函数和分布的重要推广形式. Ω 上的 l-微分形式是 Ω 上的一个 Schwartz 分布，其值属于 $\Lambda^l(\mathbb{R}^n)$. 将所有的 l-形式空间记为 $D'(\Omega, \Lambda^l)$，用 $L^p(\Omega, \Lambda^l)$ 表示 l-形式

$$\omega(x) = \sum_I \omega_I(x) \mathrm{d}x_I = \sum \omega_{i_1 i_2 \cdots i_l}(x) \mathrm{d}x_{i_1} \wedge \mathrm{d}x_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{i_l}$$

① 收稿日期：2022-08-09
基金项目：河北省自然科学基金项目(A2019209533).
作者简介：康迪，硕士研究生，主要从事偏微分方程及其应用的研究.
通信作者：徐秀娟，教授.

的空间，其中对于所有的有序 l-重数 I，$\omega_I \in L^p(\Omega, \mathbb{R})$. 于是 $L^p(\Omega, \Lambda^l)$ 为一个 Banach 空间，其上的范数定义为

$$\|\omega\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |\omega(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega \left(\sum |\omega_I(x)|^2\right)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

同样地，l-微分形式的 Sobolev 空间为

$$W^{1,p}(\Omega, \Lambda^l) = L^p(\Omega, \Lambda^l) \cap L^{1,p}(\Omega, \Lambda^l)$$

且具有范数

$$\|\omega\|_{W^{1,p}(\Omega, \Lambda^l)} = \mathrm{diam}(\Omega^{-1}) \|\omega\|_{p,\Omega} + \|\mathrm{d}\omega\|_{p,\Omega}$$

其中，对 $\omega \in D'(\Omega, \Lambda^l)$，微分形式 $\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial\omega}{\partial x_1}, \frac{\partial\omega}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial\omega}{\partial x_n}\right)$ 由微分形式 $\frac{\partial\omega}{\partial x_i} \in D'(\Omega, \Lambda^l)$ 组成.

记外导数

$$\mathrm{d}: D'(\Omega, \Lambda^l) \longrightarrow D'(\Omega, \Lambda^{l+1}) \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

其共轭算子

$$\mathrm{d}^*: D'(\Omega, \Lambda^{l+1}) \longrightarrow D'(\Omega, \Lambda^l)$$

在 $D'(\Omega, \Lambda^{l+1})$ 上定义为

$$\mathrm{d}^* = (-1)^{nl+1} * \mathrm{d} * \qquad l = 0, 1, 2, \cdots, n$$

上述符号及定义可参见文献[1].

本文考虑以下微分形式的椭圆方程

$$\mathrm{d}^* A(x, \mathrm{d}u) = \mathrm{d}^* F(x) \tag{1}$$

其中算子 $A: \Omega \times \Lambda^l(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$ 满足：对所有的 $x \in \Omega$ 和 $\xi \in \Lambda^l(\mathbb{R}^n)$，有

$$|A(x, \xi)| \leqslant \beta |\xi|^{p-1} \tag{2}$$

$$\langle A(x, \xi), \xi \rangle \geqslant \alpha |\xi|^p \tag{3}$$

这里

$$0 < \alpha \leqslant \beta < \infty \qquad \max\{1, p-1\} < r < p < n \qquad F(x) \in L^{\frac{r}{p-1}}(\Omega, \Lambda^l)$$

下面给出方程(1)很弱解的定义.

定义 1 若 u 对所有具有紧支集的 $\varphi \in W^{1,\frac{r}{r-p+1}}(\Omega, \Lambda^{l-1})$，满足

$$\int_\Omega \langle A(x, \mathrm{d}u), \mathrm{d}\varphi \rangle \mathrm{d}x = \int_\Omega \langle F(x), \mathrm{d}\varphi \rangle \mathrm{d}x \tag{4}$$

则称 $u \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 为方程(1)的很弱解.

这里“弱”指的是 u 的可积指数 r 可以小于自然指数 p. 很弱解是弱解的推广，它降低了弱解的可积性要求. 近年来，关于很弱解的性质引起了很多学者的关注. 例如，文献[2]获得了拟线性椭圆方程

$$X * A(x, u, Du) + B(x, u, Du) = 0$$

很弱解的梯度估计；文献[3]研究了散度型椭圆方程

$$\mathrm{div}\, G(x) \nabla u(x) = 0$$

很弱解梯度的零点性质；文献[4]研究了二阶非线性椭圆组

$$\mathrm{div}\, A(x, u, Du) = B(x, u, Du)$$

很弱解的局部正则性；文献[5]考虑了非线性椭圆方程

$$-\mathrm{div}\, A(x, \nabla u) = B(x, \nabla u)$$

对应障碍问题很弱解的全局可积性；文献[6]研究了微分形式的非齐次椭圆方程

$$\mathrm{d} * A(x, \omega(x)) = B(x, \omega(x), \mathrm{d}\omega(x))$$

障碍问题很弱解的正则性. 更多关于椭圆问题的研究，参见文献[7-11].

受以上文献的启发，本文研究了方程(1)在条件(2),(3)下的零点性质，得到如下主要定理：

定理 1　存在常数 $r_0 = r_0\left(n, p, \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \in (1, p)$，使得当 $r > r_0$ 时，方程(1)的很弱解 $u \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^{l-1})$，$\mathrm{d}u$ 的几乎每一个零点都有无穷阶.

1　弱逆 Hölder 不等式

为证弱逆 Hölder 不等式，需用到以下引理：

引理 1[12]（Poincaré 引理）　令 D 为立方体或球，$w \in L^s(D, \Lambda^l)$，$\mathrm{d}w \in L^s(D, \Lambda^{l+1})$，则

$$\frac{1}{\operatorname{diam} D}\left(⨍_D |w - w_D|^s \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant C(n, s)\left(⨍_D |\mathrm{d}w|^{\frac{ns}{n+s-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{n+s-1}{ns}}$$

其中$⨍_D$为 D 上的积分平均.

引理 2[13]　令 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 为内积空间中的向量，则当 $0 \leqslant \varepsilon < 1$ 时，有

$$\left| |\boldsymbol{X}|^{-\varepsilon}\boldsymbol{X} - |\boldsymbol{Y}|^{-\varepsilon}\boldsymbol{Y} \right| \leqslant \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} 2^{\varepsilon} |\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}|^{1-\varepsilon}$$

引理 3[14]　设 $f(x)$ 为定义在 $0 \leqslant T_0 \leqslant t \leqslant T_1$ 上的非负有界函数，若对 $T_0 \leqslant t < s \leqslant T_1$，有

$$f(t) \leqslant A(s-t)^{-\sigma} + B + \theta f(s)$$

其中 A, B, σ, θ 为非负常数，$\theta < 1$，则存在常数 $C(\sigma, \theta)$，使得对任意 R, ρ，当 $T_0 \leqslant \rho < R \leqslant T_1$ 时，有

$$f(\rho) \leqslant C(A(R-\rho)^{-\sigma} + B)$$

下面给出 $\mathrm{d}u$ 满足的弱逆 Hölder 不等式.

引理 4　存在 $r_0 = r_0\left(n, p, \dfrac{\beta}{\alpha}\right) \in (1, p)$，使得当 $r > r_0$ 时，方程(1)的很弱解 $u \in W^{1,r}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \Lambda^{l-1})$ 的梯度 $\mathrm{d}u$ 满足弱逆 Hölder 不等式

$$⨍_{B_{\frac{R}{2}}} |\mathrm{d}u|^r \mathrm{d}x \leqslant C\left(⨍_{B_R} |\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}} \mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}} + C⨍_{B_R} |F|^{\frac{r}{p-1}} \mathrm{d}x \tag{5}$$

其中 C 为常数，$B_R \subset\subset \Omega$.

证　任取 $x_0 \in \Omega$，固定 R_0：$R_0 \leqslant d = \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$. 令 $B_R = B_R(R_0) \subset\subset \Omega$ 为任意立方体.

取截断函数 $\eta(x) \in C_0^\infty(B_R)$，满足

$$0 \leqslant \eta \leqslant 1 \qquad |\mathrm{d}\eta| \leqslant \frac{C(n)}{R}$$

且在 $B_{\frac{R}{2}}$ 上 $\eta \equiv 1$. 为了给方程(1)选取一个适当的检验函数，作关于 $|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^{r-p}\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R})) \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(B_R, \Lambda^l)$ 的 Hodge 分解[15]，可得

$$|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^{r-p}\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R})) = \mathrm{d}\varphi + h \tag{6}$$

其中 $\mathrm{d}\varphi, h \in L^{\frac{r}{r-p+1}}(B_R, \Lambda^l)$，且有

$$\|h\|_{\frac{r}{r-p+1}} \leqslant C(n)(p-r)\|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))\|_r^{r-p+1} \tag{7}$$

令

$$E = |\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^{r-p}\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R})) - |\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})|^{r-p}\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R}) \tag{8}$$

由引理 2，可得

$$|E| \leqslant 2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^{r-p+1} \tag{9}$$

将(6)式中的 φ 充当(4)式中的检验函数，并利用(8)式，可得

$$\int_{B_R} \langle A(x, \mathrm{d}u), |\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})|^{r-p}\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})\rangle \mathrm{d}x =$$

$$\int_{B_R}\langle A(x,\mathrm{d}u),h\rangle\mathrm{d}x-\int_{B_R}\langle A(x,\mathrm{d}u),E\rangle\mathrm{d}x+$$
$$\int_{B_R}\langle F,|\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})|^{r-p}\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})\rangle\mathrm{d}x+\int_{B_R}\langle F,E\rangle\mathrm{d}x-\int_{B_R}\langle F,h\rangle\mathrm{d}x=$$
$$I_1+I_2+I_3+I_4+I_5 \tag{10}$$

因为 $\mathrm{d}u_{B_R}=0$，于是由(3)式，可得

$$\int_{B_R}\langle A(x,\mathrm{d}u),|\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})|^{r-p}\eta\mathrm{d}(u-u_{B_R})\rangle\mathrm{d}x=$$
$$\int_{B_R}\langle A(x,\mathrm{d}u),|\eta\mathrm{d}u|^{r-p}\eta\mathrm{d}u\rangle\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x \tag{11}$$

下面估计 I_1. 由(2)式、Hölder 不等式和(7)式，可得

$$|I_1|\leqslant\int_{B_R}|A(x,\mathrm{d}u)||h|\mathrm{d}x\leqslant\beta\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{p-1}|h|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\beta\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_R}|h|^{\frac{r}{r-p+1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$
$$\beta C(n)(p-r)\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}} \tag{12}$$

由于

$$\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}=\left(\int_{B_R}|\eta\mathrm{d}u+(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$
$$C(p,r)\left(\int_{B_R}|\eta\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}+C(p,r)\left(\int_{B_R}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$
$$C(p,r)\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}+C(n,p,r)\left(\int_{B_R}\left|\frac{u-u_{B_R}}{R}\right|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}} \tag{13}$$

将(13)式代入(12)式，再使用 Young 不等式和引理 1，可得

$$|I_1|\leqslant\beta C(n,p,r)(p-r)\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\beta C(n,p,r)(p-r)\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_R}\left|\frac{u-u_{B_R}}{R}\right|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$
$$\beta C(n,p,r)(p-r)\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\beta C(n,p,r)(p-r)\varepsilon\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+$$
$$\beta C(\varepsilon,n,p,r)(p-r)\int_{B_R}\left|\frac{u-u_{B_R}}{R}\right|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\beta C(p-r)(1+\varepsilon)\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\frac{\beta C(p-r)}{R^r}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}} \tag{14}$$

下面估计 I_2. 由(2)式、(9)式、Hölder 不等式、Young 不等式和引理 1，可得

$$|I_2|\leqslant\int_{B_R}|A(x,\mathrm{d}u)||E|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\beta\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{p-1}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^{r-p+1}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\beta C(n,p,r)\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_R}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$

$$\beta C(n,p,r)\varepsilon\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\beta C(\varepsilon,n,p,r)\int_{B_R}\left|\frac{u-u_{B_R}}{R}\right|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$\beta C\varepsilon\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\frac{\beta C}{R^r}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}} \tag{15}$$

下面估计 I_3. 由 Young 不等式，可得

$$|I_3|\leqslant\int_{B_R}|F||\eta\mathrm{d}u|^{r-p+1}\mathrm{d}x\leqslant\varepsilon\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x \tag{16}$$

下面估计 I_4. 由(9)式、Hölder 不等式、Young 不等式和引理 1，可得

$$|I_4|\leqslant\int_{B_R}|F||E|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$2^{p-r}\frac{p-r+1}{r-p+1}\int_{B_R}|F||(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^{r-p+1}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C(n,p,r)\left(\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{r}}\left(\int_{B_R}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{r-p+1}{r}}\leqslant$$
$$C(n,p,r)\varepsilon\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+C(\varepsilon,n,p,r)\int_{B_R}\left|\frac{u-u_{B_R}}{R}\right|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+\frac{C(\varepsilon,n,p,r)}{R^r}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}} \tag{17}$$

下面估计 I_5. 由 Young 不等式、(7) 式和引理 1，可得

$$|I_5|\leqslant\int_{B_R}|F||h|\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+\varepsilon\int_{B_R}|h|^{\frac{r}{r-p+1}}\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+\varepsilon(C(n)(p-r))^{\frac{r}{r-p+1}}\int_{B_R}|\mathrm{d}(\eta(u-u_{B_R}))|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+\varepsilon C(n,p,r)\int_{B_R}|\eta\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\varepsilon C(n,p,r)\int_{B_R}|(u-u_{B_R})\mathrm{d}\eta|^r\mathrm{d}x\leqslant$$
$$C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x+\varepsilon C(n,p,r)\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon C(n,p,r)}{R^r}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}} \tag{18}$$

结合(10) 式、(11) 式、(14) 式－(18) 式，可得

$$\alpha\int_{B_{\frac{R}{2}}}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\leqslant[\beta C(p-r)(1+\varepsilon)+(\beta C+1+C(n,p,r))\varepsilon]\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+$$
$$\frac{C(n,p,r)}{R^r}\left(\int_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}}+C\int_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x \tag{19}$$

令 r 足够接近 p，且 ε 足够小，使得

$$\frac{\beta C(p-r)(1+\varepsilon)+(\beta C+1+C(n,p,r))\varepsilon}{\alpha}=\theta<1 \tag{20}$$

又因为在本文情况下，r 充分接近于 p，于是常数 $C(n,p,r)$ 与 r 无关. 因此，由(19) 式和(20) 式，可得

$$⨍_{B_{\frac{R}{2}}}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x\leqslant\theta⨍_{B_R}|\mathrm{d}u|^r\mathrm{d}x+C\left(⨍_{B_R}|\mathrm{d}u|^{\frac{nr}{n+r-1}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{n+r-1}{n}}+C⨍_{B_R}|F|^{\frac{r}{p-1}}\mathrm{d}x \tag{21}$$

再使用引理 3，可得(5) 式. 证毕.

2 主要定理的证明

定义 2[16] 若

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^n}\int_{Q(x_0,R)}|h(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

则称 $x_0\in\Omega$ 为函数 $h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 的本性零点. 其中 $Q(x_0,R)$ 是以 x_0 为心、$2R$ 为边长的立方体. 本性零点的阶数定义为

$$N_0=\sup\left\{\alpha:\lim_{R\to 0}\frac{1}{R^{n+\alpha}}\int_{Q(x_0,R)}|h(x)|\,\mathrm{d}x=0\right\}$$

引理 5[16] 令 $h\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 对所有立方体 $Q\subset 2Q\subset\Omega$ 满足弱逆 Hölder 不等式

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q h^p\,\mathrm{d}x\leqslant A_p\left(\frac{1}{|2Q|}\int_{2Q}h\,\mathrm{d}x\right)^p$$

则 h 的每一个零点都有无穷阶. 其中 $1<p<\infty$，常数 A_p 与立方体无关.

定理 1 的证明 根据弱逆 Hölder 不等式(5) 和引理 5，可得所需结论. 证毕.

参考文献:

[1] 高红亚，陈艳敏. 共轭 A-调和张量新的双权积分不等式 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版)，2006，27(5)：625-634.

[2] 郑神州，王喜芬. 拟线性次椭圆方程很弱解的正则性 [J]. 数学物理学报，2010，30(2)：432-439.

[3] 高红亚，张华，佟玉霞. 一类散度型椭圆方程很弱解梯度的零点 [J]. 河北大学学报(自然科学版)，2005，25(1)：9-12.

[4] 谢素英，戴滨林. 一类非线性椭圆组很弱解的局部正则性 [J]. 应用数学，2001，14(4)：93-97.

[5] 佟玉霞，杨雅琦，周艳霞. 非线性椭圆障碍问题很弱解的全局可积性 [J]. 应用数学，2021，34(1)：98-106.

[6] 杨超，谢素英. 微分形式椭圆方程障碍问题很弱解的正则性 [J]. 杭州电子科技大学学报(自然科学版)，2019，39(3)：92-96.

[7] 张爱旎，邓志颖. 一类分数阶 p-q 型临界椭圆边值问题的非平凡解 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(6)：88-93.

[8] 蒙璐，储昌木，雷俊. 一类带有变指数增长的 Neumann 问题 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：82-88.

[9] 唐映，储昌木. 带类 $p(x)$-拉普拉斯算子的问题在全空间上的多重解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(10)：37-44.

[10] 周树清，高红亚，朱焕然. 一类拟线性椭圆方程的很弱解的唯一性 [J]. 数学年刊 A 辑(中文版)，2007，28(1)：121-130.

[11] 杜广伟，钮鹏程. 非线性次椭圆方程障碍问题很弱解的高阶可积性 [J]. 数学物理学报，2017，37(1)：122-145.

[12] STROFFOLINI B. On Weakly A-Harmonic Tensors [J]. Studia Mathematica，1995，114(3)：289-301.

[13] IWANIEC T，MIGLIACCIO L，NANIA L，et al. Integrability and Removability Results for Quasiregular Mappings in High Dimensions [J]. Mathematica Scandinavica，1994，75(2)：263-279.

[14] GIAQUINTA M，GIUSTI E. On the Regularity of the Minima of Variational Integrals [J]. Acta Mathematica，1982，148(1)：31-46.

[15] IWANIEC T，LUTOBORSKI A. Integral Estimates for Null Lagrangians [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis，1993，125(1)：25-79.

[16] IWANIEC T，MARTIN G. Geometric Function Theory and Nonlinear Analysis [M]. Oxford：Clarendon Press，2001.

责任编辑 廖坤