第 48 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 3 月
Vol. 48 No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.03.005

中心仿射度量的两类具有常截面曲率的闭凸超曲面[①]

李明，　左莹

重庆理工大学 数学科学研究中心，重庆 400054

摘要：本文主要研究 Minkowski 空间的 Laugwitz 猜测. 首先给出了参数化超曲面的中心仿射几何的直接描述，在此基础上刻画了 Minkowski 空间黎曼几何与其单位超球面的中心仿射几何的关系，将 Laugwitz 猜测等价描述为：闭凸超曲面的中心仿射几何截面曲率为常数必为椭球面的刚性问题. 然后建立了超曲面中心仿射几何量与欧氏几何量的联系，由此说明欧氏空间凸超曲面 $n+1$ -仿射表面积正是该超曲面的中心仿射体积，进而运用关于仿射表面积的等周不等式及其取得等号的几何条件给出了 Schneider 定理的新证明. 最后研究了 Simon 3 -形式模长的 Laplace 在常截面曲率条件下的表达式，应用极大值原理证明了具有常截面曲率且具有平行无迹 Tchebychev 算子的闭凸超曲面具有消失的 Simon 3 -形式，再根据结构方程证明了该超曲面为中心在原点的椭球面.

关　键　词：Laugwitz 猜测；中心仿射几何等周不等式；Tchebychev 算子；椭球面；截面曲率

中图分类号：O186.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)03－0031－08

Two Types of Closed Convex Hypersurfaces with Constant Cross-sectional Curvature for the Central Affine Metric

LI Ming，　ZUO Ying

Mathematical Sciences Research Center，Chongqing University of Technology，Chongqing 400054，China

Abstract：This paper focuses on the Laugwitz conjecture for Minkowski spaces. Firstly，a direct description of the central affine geometry of a parametric hypersurface is given，based on which the relationship between the Riemannian geometry of Minkowski space and its central affine geometry of a unit hypersphere is inscribed，and the Laugwitz conjecture is equivalently described as a rigid problem where the curvature of the central affine geometry section of a closed convex hypersurface is constant and must be ellipsoidal. The connection between the central affine geometry of a hypersurface and the Euclidean geometry is then established，and it is shown that the $n+1$-affine surface area of a convex hypersurface in Euclidean space is the central affine volume of the hypersurface. Furthermore，a new proof of Schneider's theorem is given by using the isoperimetric inequality about the affine surface area and the geometric conditions for obtaining the equal sign. At last，the expression of Laplace with Simon 3-form module length under the condition of constant section curvature is studied. By using the maximum principle，it is proved that a closed convex hypersurface with constant section curvature and parallel traceless Tchebychev operator has

① 收稿日期：2022－07－19
基金项目：国家自然科学基金项目(11871126).
作者简介：李明，副教授，主要从事微分几何学的研究.
通信作者：左莹，硕士研究生.

a vanishing Simon 3-form. Then, according to the structural equation, it is proved that the hypersurface is an ellipsoid whose center is at the origin.

Key words: Laugwitz conjecture; central affine geometric isoperimetric inequality; Tchebychev operator; ellipsoidal surface; sectional curvature

本文所指的 Minkowski 空间(V, F)，可以认为是具有光滑范数 F 的 $n+1$ 维线性空间 V，其中 $n \geqslant 2$，但只假设范数具有正齐次性. Finlser 流形的切空间均为 Minkowski 空间. 由于 Minkowski 空间是内积空间的自然推广，因此 Finsler 流形可以认为是没有二次型限制的黎曼流形[1-2]. Minkowski 空间 $V_0 = V \backslash \{0\}$ 上具有自然的 Hessian 型黎曼度量 $\hat{\boldsymbol{g}} = \frac{1}{2} D\mathrm{d}[F^2]$.

文献[3] 做出如下猜测(Laugwitz 猜测)：如果黎曼流形$(V_0, \hat{\boldsymbol{g}})$的曲率张量为 0，那么 F^2 为二次多项式. 文献[4] 在假设 F 具有绝对齐次性的条件下运用分析手段解决了 Laugwitz 猜测. 文献[5] 采用几何方法，利用 Blaschke-Santaló 不等式将文献[4] 的结果推广到了 F 的单位球的重心在原点的情形.

我们首先证明黎曼流形$(V_0, \hat{\boldsymbol{g}})$的曲率张量为0等价于Minkowski空间$(V, F)$单位球面的中心仿射度量 $\boldsymbol{h}$ 具有常截面曲率 1. 众所周知，F^2 为二次多项式等价于(V, F)的单位球面为椭球面. 于是 Laugwitz 猜测的等价形式为：如果原点在内部的闭凸超曲面的中心仿射度量具有常截面曲率 1，则该超曲面为椭球面. 在此基础上，利用仿射等周不等式，本文给出文献[5] 的结果的一个新证明.

定理 1[5] Minkowski空间(V, F)单位球面在中心仿射度量下的体积与同维数的标准欧氏球面的体积相同，并且 F 的单位球的重心在原点，那么 F^2 为二次多项式.

对于凸超曲面有中心仿射法化诱导的仿射联络 ∇，定义 3-形式 $\hat{\boldsymbol{C}} = -\frac{1}{2} \nabla \boldsymbol{h}$. 众所周知 $\hat{\boldsymbol{C}} = 0$ 的超曲面为二次曲面[6-8]. 3-形式 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 关于度量 $\boldsymbol{h}$ 的迹称为 Tchebychev 形式，记作 $\hat{\boldsymbol{T}}$，其对偶向量场 $\boldsymbol{T}$ 称为 Tchebychev 向量场. 对于原点在内部的闭凸超曲面，Blaschke-Deicke 定理表明 $\hat{\boldsymbol{T}} = 0$ 蕴涵着 $\hat{\boldsymbol{C}} = 0$. 文献[9] 在研究中心仿射超曲面的体积变分时定义 $\mathscr{T} = \nabla^h \boldsymbol{T}$ 为超曲面的中心仿射 Tchebychev 算子(或中心仿射形状算子)，并称 $\boldsymbol{H} = \frac{1}{n} \mathrm{tr}\, \mathscr{T}$ 为超曲面的中心仿射平均曲率. 如果原点在内部的闭凸超曲面具有常平均曲率 $\boldsymbol{H}$，文献[9] 证明了该超曲面为椭球面. 作为推论可知，如果原点在内部的闭凸超曲面的 Tchebychev 向量场为 Killing 向量场，则该超曲面为椭球面. 文献[10] 证明了上述结果对于 Tchebychev 向量场为共形向量场的情形也成立. 定义 $\widetilde{\mathscr{T}} = \nabla^h \boldsymbol{T} - \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{id}$ 为算子 $\mathscr{T}$ 的无迹部分，称为无迹 Tchebychev 算子，那么 $\boldsymbol{T}$ 为共形向量场当且仅当 $\widetilde{\mathscr{T}} = 0$. 我们利用极大值原理证明了如下结果：

定理 2 Minkowski空间(V, F)单位球的中心仿射度量具有常截面曲率并且 $\nabla^h \widetilde{\mathscr{T}} = 0$，那么 F^2 为二次多项式.

这里采用的方法与文献[11] 的方法相同，主要是计算 Simon 3-形式 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 的模长平方的 Laplace，因为常截面曲率的假设，使得计算变得更加简单. 我们发现这里的计算在常 Ricci 曲率的假设下也有效，相关的结果将在后续的研究中加以说明. 另外，条件 $\nabla^h \widetilde{\mathscr{T}} = 0$ 的几何意义及分类问题也是值得研究的课题，对于 Laugwitz 猜测的研究也非常有价值. 这类问题的研究是仿射微分几何的经典主题，文献[12] 研究了平行 Simon 3-形式的强凸相对超曲面的分类问题，更系统的研究可以参见文献[6].

1 Minkowski 空间的几何结构

1.1 Minkowski 空间的黎曼几何

本文中，Minkowski 空间指具有光滑的强凸 Minkowski 范数 F 的 $n+1$ 维实向量空间 V，且 $n \geqslant 2$.

其中Minkowski 范数 F 指函数 $V \longrightarrow [0, +\infty)$，满足：

(i) 正则性：F 在 V 上连续，在 $V_0 = V\backslash\{0\}$ 上光滑；

(ii) 正齐次性：

$$F(\lambda \boldsymbol{v}) = \lambda F(\boldsymbol{v}) \qquad \forall \lambda > 0$$

(iii) 强凸性：对于任意非零向量 $\boldsymbol{y} \neq 0$，

$$\hat{\boldsymbol{g}}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F^2}{\partial \boldsymbol{y}^i \partial \boldsymbol{y}^j}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{2}[F^2]_{y^i y^j}$$

正定.

V_0 上的黎曼度量 $\hat{\boldsymbol{g}} = \hat{\boldsymbol{g}}_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \mathrm{d}\boldsymbol{y}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{y}^j$ 显然是 Hessian形度量[12]. 在 Finsler 几何中通常定义 Cantan 张量为

$$\boldsymbol{A}_{ijk} = \frac{F}{2}\frac{\partial \hat{\boldsymbol{g}}_{ij}}{\partial \boldsymbol{y}^k}$$

Hessian 度量 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 的联络系数与 Cantan 张量的关系式为

$$\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\hat{\boldsymbol{g}}^{is}}{2}\left(\frac{\partial \hat{\boldsymbol{g}}_{sj}}{\partial \boldsymbol{y}^k} + \frac{\partial \hat{\boldsymbol{g}}_{ks}}{\partial \boldsymbol{y}^j} - \frac{\partial \hat{\boldsymbol{g}}_{jk}}{\partial \boldsymbol{y}^s}\right) = \frac{1}{F}\hat{\boldsymbol{g}}^{is}\boldsymbol{A}_{sjk} = \frac{1}{F}\boldsymbol{A}^i_{jk}$$

根据 Hessian 几何的标准结果可知 $\hat{\boldsymbol{g}}$ 的 Riemann 曲率张量为

$$\hat{\boldsymbol{R}}^i_{jkl} = \frac{1}{F^2}(\boldsymbol{A}^s_{jk}\boldsymbol{A}^i_{sl} - \boldsymbol{A}^s_{jl}\boldsymbol{A}^i_{sk}) \tag{1}$$

关于 Hessian 流形较为详细的研究可进一步参见文献[13].

1.2　Minkowski 空间的单位球面的中心仿射几何

接下来，本文主要考虑 Minkowski 空间(V, F)的单位球面

$$I_F = \{\boldsymbol{v} \in V \mid F(\boldsymbol{v}) = 1\}$$

单位球面 I_F 在黎曼流形$(V_0, \hat{\boldsymbol{g}})$中的超曲面几何的讨论可参见文献[1]. 本文将从中心仿射几何的观点研究单位球面 I_F. 事实上，单位球面 I_F 的这两种几何是完全相同的.

下面简要介绍超曲面的中心仿射几何结构. 事实上，仿射空间中非退化超曲面的中心仿射几何是相对微分几何的一个特殊情形，关于相对微分几何的理论可参见文献[6-8]. 我们将从参数化超曲面的角度给出中心仿射几何的一种描述.

设 $\boldsymbol{f}: U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 为嵌入映射，其中 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的连通开域. 那么 $M = \boldsymbol{f}(U)$ 称为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的嵌入超曲面. 本文假设 M 非退化，且其上有中心法化诱导的 $GL(n+1; \mathbb{R})$ 不变黎曼度量 $\boldsymbol{h}$，称为中心仿射度量，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \in M$ 处的切空间 $\boldsymbol{T}_{f(p)}M$ 由 $\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right|_{\boldsymbol{p}}, \cdots, \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^n}\right|_{\boldsymbol{p}}\right\}$ 张成，此外，我们假设向量场 $\boldsymbol{f}$ 与 M 处处横截，即

$$\left\{\left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^1}\right|_{\boldsymbol{p}}, \cdots, \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^n}\right|_{\boldsymbol{p}}, -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})\right\} \tag{2}$$

对任意 $\boldsymbol{p} \in U$ 构成 $\mathbb{R}^{n+1}$ 的一组基. 则 $\boldsymbol{f}$ 的 Hessian 具有以下分解：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i \partial \boldsymbol{x}^j} = \boldsymbol{\Gamma}^l_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^l} - \boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{f} \tag{3}$$

设 $\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^i}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^j} = \boldsymbol{\Gamma}^k_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^k}$，则 ∇ 在 $\boldsymbol{T}M$ 上定义了一个无挠的仿射联络. 另外，$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_{ij}\mathrm{d}\boldsymbol{x}^i \otimes \mathrm{d}\boldsymbol{x}^j$ 在 $\boldsymbol{T}M$ 上定义了一个半黎曼度量. 在本文中，我们只考虑 $\boldsymbol{h}$ 是正定的情况. 易知 ∇ 和 $\boldsymbol{h}$ 均为 $GL(n+1; \mathbb{R})$ 不变量.

对方程(3) 两边再求一次导数，可得

$$\frac{\partial^3 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^i \partial \boldsymbol{x}^j \partial \boldsymbol{x}^k} = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^l_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^k}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^l} + \boldsymbol{\Gamma}^l_{ij}\frac{\partial^2 \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^l \partial \boldsymbol{x}^k} - \frac{\partial \boldsymbol{h}_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^k}\boldsymbol{f} - \boldsymbol{h}_{ij}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^k} =$$

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma x}_{ij}^{l}}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}+\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{s}\boldsymbol{\Gamma}_{sk}^{l}-\boldsymbol{h}_{ij}\delta_{k}^{l}\right)\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{l}}-\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}+\boldsymbol{h}_{lk}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{l}\right)\boldsymbol{f} \tag{4}$$

根据

$$\frac{\partial^{3}\boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{i}\partial \boldsymbol{x}^{j}\partial \boldsymbol{x}^{k}}=\frac{\partial^{3}\boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{i}\partial \boldsymbol{x}^{k}\partial \boldsymbol{x}^{j}}$$

以及 ∇ 的曲率定义

$$\boldsymbol{R}_{ikj}^{l}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{l}}=\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^{j}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{i}}-\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^{j}}}\nabla_{\frac{\partial f}{\partial x^{k}}}\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}^{i}}=\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{l}}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}+\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{s}\boldsymbol{\Gamma}_{sk}^{l}-\frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_{ik}^{l}}{\partial \boldsymbol{x}^{j}}-\boldsymbol{\Gamma}_{ik}^{s}\boldsymbol{\Gamma}_{sj}^{l}$$

从(4)式，我们得到

$$\boldsymbol{R}_{ikj}^{l}=\boldsymbol{h}_{ij}\delta_{k}^{l}-\boldsymbol{h}_{ik}\delta_{j}^{l} \tag{5}$$

令 $\hat{\boldsymbol{C}}=-\frac{1}{2}\nabla \boldsymbol{h}$，那么在局部坐标系下

$$-2\boldsymbol{C}_{ijk}=\frac{\partial \boldsymbol{h}_{ij}}{\partial \boldsymbol{x}^{k}}-\boldsymbol{h}_{il}\boldsymbol{\Gamma}_{jk}^{l}-\boldsymbol{h}_{lj}\boldsymbol{\Gamma}_{ik}^{l} \tag{6}$$

容易证明 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 是全对称的(0，3)-形张量.

令 $\boldsymbol{C}=\nabla-\nabla^{\boldsymbol{h}}$，其中 $\nabla^{\boldsymbol{h}}$ 是 $\boldsymbol{h}$ 的 Levi-Civita 联络. 用 $\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{k}$ 记 $\nabla^{\boldsymbol{h}}$ 的联络系数，因此

$$\boldsymbol{C}_{ij}^{k}=\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{k}-\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{k} \tag{7}$$

因为 $\nabla^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{h}=0$，由(7)式可知

$$\boldsymbol{h}_{kl}\boldsymbol{C}_{ij}^{l}=\boldsymbol{h}_{kl}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{l}-\boldsymbol{h}_{kl}\tilde{\boldsymbol{\Gamma}}_{ij}^{l}=\boldsymbol{h}_{kl}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{l}+\boldsymbol{h}_{il}\boldsymbol{\Gamma}_{kj}^{l}-\boldsymbol{h}_{il}\boldsymbol{C}_{kj}^{l}-\frac{\partial \boldsymbol{h}_{ik}}{\partial \boldsymbol{x}^{j}}$$

根据(6)式，可知

$$\boldsymbol{h}_{kl}\boldsymbol{C}_{ij}^{l}+\boldsymbol{h}_{il}\boldsymbol{C}_{kj}^{l}=-\left(\frac{\partial \boldsymbol{h}_{ik}}{\partial \boldsymbol{x}^{j}}-\boldsymbol{h}_{kl}\boldsymbol{\Gamma}_{ij}^{l}-\boldsymbol{h}_{il}\boldsymbol{\Gamma}_{kj}^{l}\right)=2\boldsymbol{C}_{ikj} \tag{8}$$

因此，我们得到

$$\boldsymbol{C}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{h}^{-1}\nabla \boldsymbol{h}$$

由(7)式容易得到联络 ∇ 和 $\nabla^{\boldsymbol{h}}$ 的曲率之间的关系

$$\boldsymbol{R}_{ikj}^{l}=\tilde{\boldsymbol{R}}_{ikj}^{l}+\boldsymbol{C}_{ij}^{s}\boldsymbol{C}_{sk}^{l}-\boldsymbol{C}_{ik}^{s}\boldsymbol{C}_{sj}^{l}+\boldsymbol{C}_{ij,k}^{l}-\boldsymbol{C}_{ik,j}^{l} \tag{9}$$

此处 $\tilde{\boldsymbol{R}}$ 表示 $\nabla^{\boldsymbol{h}}$ 的曲率张量，$\boldsymbol{C}_{ij,k}^{l}$ 表示 $\nabla^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{C}$ 的系数. 从(5)式和(9)式，我们可以得到

$$\boldsymbol{C}_{lik,j}-\boldsymbol{C}_{lij,k}=\tilde{\boldsymbol{R}}_{ilkj}+\boldsymbol{C}_{ij}^{s}\boldsymbol{C}_{skl}-\boldsymbol{C}_{ik}^{s}\boldsymbol{C}_{sjl}+\boldsymbol{h}_{ik}\boldsymbol{h}_{jl}-\boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{h}_{kl} \tag{10}$$

根据张量的对称性，(10)式等价于下面两个方程：

$$\boldsymbol{C}_{lik,j}-\boldsymbol{C}_{lij,k}=\boldsymbol{0} \tag{11}$$

和

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{ilkj}+\boldsymbol{C}_{ij}^{s}\boldsymbol{C}_{skl}-\boldsymbol{C}_{ik}^{s}\boldsymbol{C}_{sjl}+\boldsymbol{h}_{ik}\boldsymbol{h}_{jl}-\boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{h}_{kl}=\boldsymbol{0} \tag{12}$$

这里的(11)和(12)两式即为超曲面中心仿射几何的结构方程.

此外，Tchebychev 形式 $\hat{\boldsymbol{T}}$ 定义为 3-形式的迹

$$\hat{\boldsymbol{T}}=\frac{1}{n}\operatorname{tr}\boldsymbol{C} \tag{13}$$

$\hat{\boldsymbol{T}}$ 关于 $\boldsymbol{h}$ 的对偶向量场 $\boldsymbol{T}$ 称为 Tchebychev 向量场.

下面的引理 1 给出了 Minkowski 空间$(V，F)$的几何量与单位球面 I_F 的中心仿射几何量之间的关系.

引理 1[14] 对于Minkowski空间$(V，F)$，设$\boldsymbol{i}：I_F \longrightarrow V$是单位球面$I_F$的嵌入映射. 对每个点$\boldsymbol{v}\in I_F$，

如果选择 $\boldsymbol{y}=-\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{v}}V$ 以及 $\boldsymbol{Y}=-\mathrm{d}F\in\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{v}}^{*}V$，那么$\{\boldsymbol{Y},\boldsymbol{y}\}$ 给出了 I_F 上的中心仿射法化. 进一步，中心仿射度量和 3 -形式满足

$$\boldsymbol{h}=\boldsymbol{i}^{*}\hat{\boldsymbol{g}}\qquad\qquad \hat{\boldsymbol{C}}=-\boldsymbol{i}^{*}\boldsymbol{A}\tag{14}$$

根据引理 1，可得下面的引理：

引理 2　对于给定的 Minkowski 空间(V,F)，黎曼流形$(V_0,\hat{\boldsymbol{g}})$平坦当且仅当 I_F 的中心仿射度量具有常截面曲率 1.

证　根据黎曼流形$(V_0,\hat{\boldsymbol{g}})$曲率张量的表达式(1)以及 3 -形式与 Cartan 张量的关系式(14)，可知 $\hat{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{0}$，蕴涵

$$\boldsymbol{C}_{ik}^{s}\boldsymbol{C}_{sjl}-\boldsymbol{C}_{ij}^{s}\boldsymbol{C}_{skl}=\boldsymbol{0}$$

在 I_F 上成立. 根据(12)式可知，I_F 的中心仿射度量的曲率张量满足

$$\tilde{\boldsymbol{R}}_{ilkj}=-\boldsymbol{h}_{ik}\boldsymbol{h}_{jl}+\boldsymbol{h}_{ij}\boldsymbol{h}_{kl}$$

即 I_F 的中心仿射度量具有常截面曲率 1. 另外，只需注意到 Cartan 张量的齐次性，上述过程反过来即可给出充分性的证明.

根据引理 2 可知，Laugwitz 关于 Minkowski 空间的猜测[3] 可等价转化为闭凸超曲面的唯一性问题.

2　中心仿射度量具有标准欧氏球面体积且重心在原点的闭凸超曲面

本节将在 $n+1$ 维线性空间 V 上附加一个欧式内积$\langle,\rangle$. 对于 V 中的闭超曲面，我们将用欧氏超曲面几何量来表示中心仿射几何量. 令 D 是一个原点在内部的凸体，假设边界 $M=\partial D$ 光滑. 设 M 的欧氏外法向量为 $\boldsymbol{\xi}$. 令 Ⅰ 和 Ⅱ 分别为 M 的第一和第二基本形式. 令 ∇^{e} 为第一基本形式 Ⅰ 的 Levi-Civita 联络，令 $\omega(\text{Ⅰ})$ 表示第一基本形式 Ⅰ 下的体积元. 令 $\rho(\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{v},-\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{v})\rangle$ 为 M 的支撑函数. M 的 Guass 曲率有如下表示：

$$\boldsymbol{K}=\frac{\det\text{Ⅱ}}{\det\text{Ⅰ}}\tag{15}$$

引理 3　M 的中心仿射度量 $\boldsymbol{h}$ 可用欧氏几何量表示为

$$\boldsymbol{h}=\frac{1}{\rho}\text{Ⅱ}\tag{16}$$

中心仿射度量 $\boldsymbol{h}$ 的体积元 $\omega(\boldsymbol{h})$ 可表示为

$$\omega(\boldsymbol{h})=\left(\frac{\boldsymbol{K}}{\rho^{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}}\rho\omega(\text{Ⅰ})\tag{17}$$

Tchebychev 形式 $\hat{\boldsymbol{T}}=\mathrm{d}\tau$，其中 τ 为 Tchebychev 势函数

$$\tau=\frac{1}{2n}\ln\left(\frac{\rho^{n+2}}{\boldsymbol{K}}\right)\tag{18}$$

仿射联络与欧氏联络 ∇^{e} 的关系为

$$\nabla=\nabla^{e}+(\boldsymbol{\xi}+\rho^{-1}\boldsymbol{v})\text{Ⅱ}\tag{19}$$

中心仿射 3 -形式 $\hat{\boldsymbol{C}}$ 可以表示为

$$\hat{\boldsymbol{C}}=-\frac{1}{2}[\nabla^{e}+(\boldsymbol{\xi}+\rho^{-1}\boldsymbol{v})\text{Ⅱ}](\rho^{-1}\text{Ⅱ})\tag{20}$$

证　令 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 为 M 上的两个向量场，那么有

$$\overline{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}=\nabla_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})(-\boldsymbol{v})=\nabla_{\boldsymbol{X}}^{e}\boldsymbol{Y}+\text{Ⅱ}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\boldsymbol{\xi}\tag{21}$$

其中 $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 是向量场 $\boldsymbol{Y}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 在平坦联络 $\overline{\nabla}$ 下的协变导数，第一个等号是 $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 关于中心仿射法化的分解，第二个等号是 $\overline{\nabla}_{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{Y}$ 关于欧氏法化的分解.

用 $\boldsymbol{\xi}$ 对(21)式两边做内积，可得

$$\langle \boldsymbol{v}, -\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{v})\rangle \boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) = \mathrm{II}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y})$$

整理后便得到(16)式. 进一步，根据(15)和(16)式，可得

$$\omega(\boldsymbol{h}) = \left(\frac{\boldsymbol{K}}{\rho^{n}}\right)^{\frac{1}{2}} \omega(\mathrm{I}) = \left(\frac{\boldsymbol{K}}{\rho^{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \rho\omega(\mathrm{I})$$

因此(17)式成立.

我们将 V 上由内积诱导的体积元记作 Det，M 上由中心仿射法化和 Det 诱导的体积元 ω 可表示为

$$\omega = \mathrm{Det}(\cdot, -\boldsymbol{v}) = \mathrm{Det}(\cdot, \langle -\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\xi}\rangle \boldsymbol{\xi}) = \rho\omega(\mathrm{I}) \tag{22}$$

由于 Tchebychev 形式 $\hat{\boldsymbol{T}} = \mathrm{d}\tau$，而 $\tau = \dfrac{1}{n}\ln\left|\dfrac{\omega}{\omega(\boldsymbol{h})}\right|$，由(17)和(22)式可得(18)式.

另外，由(16)和(18)式容易得到

$$\nabla = \nabla^{e} + (\boldsymbol{\xi} + \rho^{-1}\boldsymbol{v})\mathrm{II}$$

因此(19)式成立. 而(20)式是(19)式和(6)式的直接推论.

定理 1′　对于原点在内部，边界为光滑强凸超曲面的凸体 D，若 D 的重心在原点且 $M = \partial D$ 的在中心仿射度量下的体积为同维数欧氏球面的体积，则 M 为椭球面.

证　根据文献[15]，D 的 $n+1$-仿射表面积为

$$\Omega_{n+1}(D) = \int_{M} \left(\frac{\boldsymbol{K}}{\rho^{n+2}}\right)^{\frac{1}{2}} \rho\omega(\mathrm{I})\mathrm{d}M$$

由(17)式可知，$\Omega_{n+1}(D) = \int_{M} \omega(\boldsymbol{h})\mathrm{d}M$ 正是 M 在中心仿射度量下的体积.

根据仿射等周不等式[15]，可知

$$\int_{M} \omega(\boldsymbol{h})\mathrm{d}M \leqslant \omega_{n}$$

其中 ω_n 为欧氏空间 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中标准球面 S^n 的体积，等号成立当且仅当 D 是中心在原点的椭球. 定理 1′ 得证.

根据引理 1 可知定理 1 与定理 1′ 等价.

从定理 1 的证明可知，仿射等周不等式在 Laugwitz 猜测的研究中有重要意义，如何获得更加一般的几何不等式是一个亟待研究的课题，这方面的研究方法很多，其中曲率流是很有效的方法[16-20].

3　具有常截面曲率及平行无迹 Tchebychev 算子的闭凸超曲面

设 M 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的非退化超曲面，而 $\boldsymbol{h}$ 是 M 上的中心仿射度量. 设 $\{\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是相对于度量 $\boldsymbol{h}$ 的局部幺正标架场，其对偶标架场为 $\{\boldsymbol{\theta}^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\}$.

在标架场 $\{\boldsymbol{\theta}^1, \cdots, \boldsymbol{\theta}^n\}$ 下，超曲面 M 的结构方程(12)可表示为

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ilkj} = \boldsymbol{C}_{ik}^{s}\boldsymbol{C}_{sjl} - \boldsymbol{C}_{ij}^{s}\boldsymbol{C}_{skl} - (\boldsymbol{\delta}_{ik}\boldsymbol{\delta}_{jl} - \boldsymbol{\delta}_{ij}\boldsymbol{\delta}_{kl}) \tag{23}$$

超曲面 M 的 Simon 3-形式 $\widetilde{\boldsymbol{C}}$ 定义为 3-形式 $\boldsymbol{C}$ 的无迹部分，

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ijk} = \boldsymbol{C}_{ijk} - \frac{n}{n+2}(\boldsymbol{T}_k\delta_{ij} + \boldsymbol{T}_i\delta_{jk} + \boldsymbol{T}_j\delta_{ik}) \tag{24}$$

其中

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ilkj} = \boldsymbol{h}(\widetilde{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{e}_k, \boldsymbol{e}_j)\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_l) \qquad \boldsymbol{C}_{ijk} = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_k) \qquad \boldsymbol{T}_k = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{e}_k)$$

超曲面 M 的中心仿射 Tchebychev 算子定义为 $\mathcal{T} = \nabla^{\boldsymbol{h}}\boldsymbol{T}$，无迹 Tchebychev 算子定义为 $\mathcal{T}$ 的无迹部分 $\widetilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} - \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}\,\mathcal{T} \cdot \mathrm{id}$.

引理 4　设 M 为 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的非退化超曲面，如果 M 的中心仿射度量 h 具有常截面曲率 $c > 0$，且具有平行无迹 Tchebychev 算子 $\nabla^{h}\widetilde{\mathcal{T}} = 0$，那么

$$\frac{1}{2}\Delta^{\boldsymbol{h}} \|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^2 = \|\nabla^{\boldsymbol{h}}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^2 + (n+1)c \cdot \|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^2 \tag{25}$$

其中 Δ^{h} 表示由度量 $\boldsymbol{h}$ 给出的 Laplace 算子.

证　直接计算可得

$$\frac{1}{2}\Delta^{h}\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}=\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+\sum_{ijk}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}\Delta^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}\tag{26}$$

其中 $\Delta^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}=\sum_{t}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,tt}$ 为 Simon 3-形式的 Laplace. 在下面的计算中我们将省略求和符号，重复指标默认为求和.

根据(11) 和(24) 式可知，在适当的标架场下，有

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,t}-\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kit,j}=-\frac{n}{n+2}(\widetilde{\mathscr{T}}_{kt}\delta_{ij}+\widetilde{\mathscr{T}}_{it}\delta_{kj}-\widetilde{\mathscr{T}}_{kj}\delta_{it}-\widetilde{\mathscr{T}}_{ij}\delta_{kt})\tag{27}$$

由 Ricci 恒等式可知

$$\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,ts}-\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,st}=\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pij}\widetilde{\boldsymbol{R}}^{p}_{kts}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpj}\widetilde{\boldsymbol{R}}^{p}_{its}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}^{p}_{jts}=\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pij}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kpts}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpj}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ipts}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{jpts}\tag{28}$$

由(27) 和(28) 式以及假设 $\nabla^{h}\widetilde{\mathscr{T}}=0$，我们有

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,tt}=&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kit,jt}-\frac{n}{n+2}(\widetilde{\mathscr{T}}_{kt,t}\delta_{ij}+\widetilde{\mathscr{T}}_{it,t}\delta_{kj}-\widetilde{\mathscr{T}}_{kj,t}\delta_{it}-\widetilde{\mathscr{T}}_{ij,t}\delta_{kt})=\\&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kit,tj}+(\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pit}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kpjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpt}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ipjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{tpjt})=\\&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{ktt,ij}+(\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pit}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kpjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpt}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ipjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{tpjt})=\\&\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pit}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kpjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpt}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ipjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{tpjt}\end{aligned}\tag{29}$$

假设度量 $\boldsymbol{h}$ 具有常截面曲率 $c>0$，那么

$$\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ijkl}=c(\delta_{il}\delta_{jk}-\delta_{ik}\delta_{jl})\tag{30}$$

由(26),(27) 和(28) 式，可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta^{h}\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}=&\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij,tt}=\\&\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}(\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pit}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{kpjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpt}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{ipjt}+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}\widetilde{\boldsymbol{R}}_{tpjt})=\\&\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+c\cdot\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kij}[\widetilde{\boldsymbol{C}}_{pit}(\delta_{kt}\delta_{pj}-\delta_{kj}\delta_{pt})+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kpt}(\delta_{it}\delta_{pj}-\delta_{ij}\delta_{pt})+\widetilde{\boldsymbol{C}}_{kip}(\delta_{tt}\delta_{pj}-\delta_{tj}\delta_{pt})]=\\&\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+(n+1)c\cdot\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}\end{aligned}$$

由此(25) 式得证.

定理 2′　对于 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中原点在内部的闭凸超曲面 M，如果 M 的中心仿射度量 $\boldsymbol{h}$ 具有常曲率 $c>0$，并且具有平行的无迹 Tchebychev 算子 $\nabla^{h}\widetilde{\mathscr{T}}=0$，那么 M 是中心在原点的椭球面.

证　根据引理 4 和散度定理可知

$$0=\frac{1}{2}\int_{M}\Delta^{h}\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}\mathrm{d}M=\int_{M}[\|\nabla^{h}\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}+(n+1)c\cdot\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}]\mathrm{d}M$$

因此 $\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}=0$. 由(24) 式可得

$$\|\widetilde{\boldsymbol{C}}\|^{2}=\|\boldsymbol{C}\|^{2}-\frac{3n}{n+2}\|\boldsymbol{T}\|^{2}=0\tag{31}$$

根据截面曲率的假设(30) 式和结构方程(23) 式，可得

$$(c-1)(\delta_{ij}\delta_{kl}-\delta_{ik}\delta_{jl})=\boldsymbol{C}^{s}_{ik}\boldsymbol{C}_{sjl}-\boldsymbol{C}^{s}_{ij}\boldsymbol{C}_{skl}\tag{32}$$

由(32) 式，可得

$$n(n-1)(c-1)=\|\boldsymbol{C}\|^{2}-n^{2}\|\boldsymbol{T}\|^{2}\tag{33}$$

结合(31) 和(33) 式，可知

$$n(n-1)(c-1)=\frac{3n-n^{3}-2n^{2}}{n+2}\|\boldsymbol{T}\|^{2}$$

所以 $\|\boldsymbol{T}\|^2$ 为常数. 因 $\boldsymbol{T}=\nabla^h\tau$，而 M 是闭超曲面，故 T 必有零点. 所以 $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{0}$. 根据 Blaschke-Deicke 定理可知定理 2′ 成立.

同样，根据引理 1 可知定理 2 与定理 2′ 等价.

参考文献：

[1] BAO D D W，CHEM S S，SHEN Z. An Introduction to Riemann-Finsler Geometry [M]. New-York：Springer，1991.
[2] 陈省身，陈维桓. 微分几何讲义 [M]. 2 版. 北京：北京大学出版社，2001.
[3] LAUGWITZ D. Differential Geometrie in Vektorräumen，Unter Besonderer Berücksichtigung Der Unendlichdimensionalen Räume [M]. Braunschweig：Friedr Vieweg & Sohn，1965.
[4] BRICKELL F. A Theorem on Homogeneous Functions [J]. Journal of London Mathematics，1967，42：325-329.
[5] SCHNEIDER R. Über die Finslerräume Mit $S_{ijkl}=0$ [J]. Mathematische Zeitschrift，1967，102：1-8.
[6] LI A，SIMON U，ZHAO G，et al. Global Affine Differential Geometry of Hypersurfaces [M]. Berlin：Walter de Gruyter，2015.
[7] NOMIZU K，SASAKI T. Affine Differential Geometry [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1994.
[8] SIMON U，SCHWENK-SCHELLSCHMIDT A，VIESEL H. Introduction to the Affine Differential Geometry of Hypersurfaces [M]. Tokyo：Science University Tokyo，1991.
[9] WANG C P. Centroaffine Minimal Hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ [J]. Geometriae Dedicata，1994，51(1)：63-74.
[10] CHENG X X，HU Z J，VRANCKEN L. Every Centroaffine Tchebychev Hyperovaloid is Ellipsoid [J]. Pacific Journal of Mathematics，2021，315(1)：27-44.
[11] LI M. Rigidity Theorems for Relative Tchebychev Hypersurfaces [J]. Results in Mathematics，2016，70(1/2)：283-298.
[12] 李明，龚妍廿. 具有平行 Simon 3-形式的局部强凸相对球 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(6)：33-38.
[13] SHIMA H. The Geometry of Hessian Structures [M]. Singapore：World Scientific Publishing，2007.
[14] 李明. Minkowski 空间的等价性定理及在 Finsler 几何的应用 [J]. 数学学报(中文版)，2019，62(2)：177-190.
[15] SCHNEIDER R. Convex Bodies：The Brunn-Minkowski Theory [M]. Cambridge：Cambridge University Press，2014.
[16] 方建波. 平面凸曲线的一类熵不变流 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：117-123.
[17] 张增乐. 关于单位速度外法向流下的几何不变量的注记 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(6)：47-51.
[18] ANDREWS B. Contraction of Convex Hypersurfaces by Their Affine Normal [J]. Journal of Differential Geometry，1996，43：207-230.
[19] LOFTIN J，TSUI M P. Ancient Solutions of the Affine Normal Flow [J]. Journal of Differential Geometry，2008，78：113-162.
[20] IVAKI M N，STANCU A. Volume Preserving Centro-Affine Normal Flows [J]. Communications in Analysis and Geometry，2013，21：671-685.

责任编辑　廖坤