第 48 卷 第 3 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 3 月
Vol. 48　No. 3　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Mar.　2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.03.006

球空间中极小超曲面上 L^p 调和 1-形式的有限性定理①

姚中伟

福建师范大学 数学与统计学院,福州 350007

摘要: 设 M^m $(m \geqslant 3)$ 是空间 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的完备定向非紧极小超曲面,考虑子流 M^m 上 L^p 调和 1-形式的有限性问题. 如果极小超曲面 M^m 存在一个紧致子集 Ω 使得 $M \backslash \Omega$ 是稳定的,则称 M^m 具有有限的指数. 首先,在 M^m 有有限指数的假设条件下,应用 Bochner 公式、Sobolev 不等式及截断函数和指标迭代的方法,证得:如果 $2 \leqslant p < \dfrac{2m}{m-1}$,则 M^m 上 L^p 调和 1-形式空间的维数有限. 其次,记 $\boldsymbol{A}$ 为超曲面 M^m 的第二基本形式,M^m 的全曲率定义为第二基本形式的 L^2 模. 在 M^m 全曲率有正上界的假设条件下(特别地,该正上界的取值仅依赖于子流形 M^m 的维数 m),利用截断函数法,得到了 M^m 上 L^p 调和 1-形式的有限性定理. 特别地,令 $p=2$,可进一步得到,在极小超曲面 M^m 具有有限指数或全曲率有正上界的假设条件下,M^m 仅有有限多个非抛物端.

关　键　词: L^p 调和 1-形式;极小超曲面;有限指数;有限性定理

中图分类号: O186.12　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2023)03-0039-08

Finiteness Theorems for L^p-Tuned 1-Form on Minimal Hypersurfaces in Spherical Space

YAO Zhongwei

School of Mathematics and Statistics, Fujian Normal University, Fuzhou 350007, China

Abstract: Let M^m $(m \geqslant 3)$ be a complete oriented non-tight minimal hypersurface in sphere $\mathbb{S}^{m+1}$, and consider the finiteness theorems of L^p harmonic 1-forms on M^m. M^m is said to have finite index if there exists a compact subset Ω of M^m such that $M \backslash \Omega$ is stable. First, under the assumption that M^m has finite index, we apply Bochner's formula, Sobolev's inequality, and the truncation function and index iteration to show that if $2 \leqslant p < \dfrac{2m}{m-1}$, then the dimension of L^p harmonic 1-forms on M^m is finite. Second, let $\boldsymbol{A}$ denote the second fundamental form of M^m, then the total curvature of M^m is defined by L^2 norm. Assuming that the total curvature of M^m has positive upper bound (especially, the positive upper bound only depends on the dimension m of M^m), we show that dimension of L^p harmonic 1-forms on M^m is finite by using truncation function. In particular, by letting $p=2$, we can further obtain that there are only finitely many nonpara-

---

① 收稿日期:2022-07-11
基金项目:国家自然科学基金项目(2021J05035).
作者简介:姚中伟,硕士研究生,主要从事微分几何的研究.

bolic ends under the assumption that the minimal hypersurface M^m has finite exponents or a positive upper bound on the total curvature.

Key words: L^p harmonic 1-forms; minimal hypersurfaces; finite indices; finiteness theorems

一直以来，关于流形自身的几何结构与其拓扑性质间某种联系的探究，备受人们关注. L^2 调和形式作为一种有力的工具，通常被用于获取流形的一些拓扑信息. 例如，应用 Hodge-de Rham 定理，m 维完备定向黎曼流形 M^m 上的 L^2 调和 1-形式空间与 1 次可约化 L^2 上的同调群同构[1]. 文献[2] 的结论表明，M^m 上非抛物端的个数不超过 L^2 调和 1-形式空间的维数加 1. 因此，在流形上找到充分的几何条件讨论 L^2 调和 1-形式的存在性及其空间维数的有限性具有重要意义.

作为 Bernsstein 定理的自然推广，Fischer-Colbrie-Schoen 和 de Carmo-Peng 先后证明了欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中完备定向极小曲面在稳定性条件下是平面. 在高维情形下，文献[3] 考虑了 L^2 调和 1-形式，证得 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中完备定向极小超曲面 M^m 在稳定性条件下不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 随后，文献[4] 在 $m+1$ 维完备定向黎曼流形 N^{m+1} 具有非负 bi-Ricci 曲率(参见文献[5] 的定义 1.2) 的假设下，将文献[3] 的工作推广到了 N^{m+1} 中的完备定向非紧极小超曲面 M^m 上，证明了 M^m 在稳定性条件下不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 文献[5] 对 N^{m+1} 的 bi-Ricci 曲率做类似限制，证明了 N^{m+1} 中具有常平均曲率的完备定向非紧超曲面 M^m 在强稳定条件下不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 文献[6] 考虑了双曲空间 H^{m+1} 中的完备稳定极小超曲面 M^m，证得：若 M^m 的 Laplace 算子的第一特征值 $\lambda_1(M) > (2m-1)(m-1)$，则 M^m 不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 紧接着，文献[7] 将该结论推广至更一般的黎曼流形 N^{m+1} 中的完备非紧非全测地稳定极小超曲面 M^m，假定 N^{m+1} 的截面曲率满足 $\boldsymbol{K}_N > K$(其中 K 是非正数)，$\lambda_1(M) > -K(2m-1)(m-1)$，得到了与文献[6] 相同的结论. 文献[8] 考虑了球空间中稳定极小超曲面的情形，证得：$\mathbb{S}^{m+1}(m \leqslant 4)$ 中完备非紧稳定极小超曲面 M^m 不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式.

极小超曲面 M^m 具有有限的指数是指 M^m 存在一个紧致子集 Ω，使得 $M\backslash\Omega$ 是稳定的. 文献[9] 将稳定性条件替换为具有有限的指数，证得：$\mathbb{R}^{m+1}(m \geqslant 3)$ 中完备定向极小超曲面 M^m 在指数有限的假设条件下，其上非平凡的 L^2 调和 1-形式空间的维数有限. 并进一步应用文献[2] 的结论，证明了 M^m 仅有有限多个端. 之后，文献[10] 考虑了任意的黎曼流形 $N^{m+1}(m \geqslant 3)$ 中完备非紧极小超曲面 M^m，在 N^{m+1} 截面曲率 $\boldsymbol{K}_N$ 满足 $-k^2 < \boldsymbol{K}_N < 0$(其中 k 是非零常数) 及 $M^m(m \geqslant 3)$ 指数有限的假设条件下，对任意的 $\dfrac{m-2}{m-1} < p < \dfrac{m}{m-1}$，证得：若 M^m 的 Laplace 算子的第一特征值

$$\lambda_1(M) > \max\left\{\frac{k^2(m-1)^2p^2}{p(m-1)-m+2}, \frac{k^2m(m-1)p}{m-p(m-1)}\right\}$$

则 M^m 上非平凡的 L^{2p} 调和 1-形式空间的维数有限，特别地，取 $p=1$，进一步得到 M^m 仅有有限多个端.

此外，M^m 的全曲率定义为

$$\|\boldsymbol{A}\|_{L^m(M)} = \left(\int_M |\boldsymbol{A}|^m \mathrm{d}M\right)^{\frac{1}{m}}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为第二基本形式[11]. 去掉稳定性假设，对子流形的全曲率加以条件限制，得到了诸多关于 L^2 调和形式的消灭定理及有限性定理. 文献[12] 证明了欧氏空间中完备定向极小超曲面在全曲率有上界的假设条件下，不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式. 文献[13-16] 考虑了双曲空间及截面曲率有下界的 Hadamard 流形的子流形，在全曲率有上界或有限的假设条件下，得到了 L^2 调和 1-形式的消灭定理及有限性定理. 文献[17-18] 在同样的假设条件下，得到了球空间中子流形上 L^2 调和 1-形式的消灭定理及有限性定理.

记 $A^1(M)$ 和 Δ 分别为流形 M^m 上的 1 次外微分形式空间及 Laplace 算子[19]，则 M^m 上的 L^p 调和 1-形式空间可表示为

$$H^1(L^p(M)) = \left\{\boldsymbol{\omega} \in A^1(M^m): \Delta\boldsymbol{\omega} = 0, \int_M |\boldsymbol{\omega}|^p \mathrm{d}M < \infty\right\}$$

本文考虑球空间 $\mathbb{S}^{m+1}(m \geqslant 3)$ 中完备定向非紧极小超曲面 M^m 上的 L^p 调和 1-形式，得到如下定理：

定理 1　设 $M^m(m \geqslant 3)$ 是球空间 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中完备定向非紧极小超曲面. 对任意的 $2 \leqslant p < \dfrac{2m}{m-1}$，若 M^m 具有有限的指数，则 $H^1(L^p(M))$ 的维数有限. 进而，M^m 仅有有限多个非抛物端.

定理 2　设 $M^m(m \geqslant 3)$ 是球空间 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中具有有限指数的完备定向非紧极小超曲面. 对任意的 $p > \dfrac{2m}{m-1}$，若 M^m 的全曲率满足

$$\| \boldsymbol{A} \|_{L^m(M)} < \min\left\{\sqrt{\frac{2m(p-2)(m-1)+4m}{C_0 p(m-1)[p(m-1)-2m]}}, \sqrt{\frac{p(m-1)+2m}{C_0 m[p(m-1)-2m]}}\right\}$$

则 $H^1(L^p(M))$ 的维数有限，C_0 是仅依赖于 m 的正值常数.

1　预备知识及引理

设 $M^m(m \geqslant 3)$ 是球空间 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的完备非紧定向极小超曲面，M^m 上的稳定算子定义为

$$L = \Delta + |\boldsymbol{A}|^2 + \overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n})$$

其中 $\overline{\mathrm{Ric}}$ 是 $\mathbb{S}^{m+1}$ 的 Ricci 曲率，$\boldsymbol{n}$ 是 M^m 在 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的单位法向量场，$|\boldsymbol{A}|$ 是 M^m 的第二基本形式模长. 记 Ω 为 M^m 的一个有界区域，则 Ω 的指数 $\mathrm{ind}(L_\Omega)$ 定义为 L 在 Ω 上负特征值的个数，M^m 的指数 $\mathrm{ind}(L)$ 定义为

$$\mathrm{ind}(L) = \sup\{\mathrm{ind}(L_\Omega): \Omega \subset M\}$$

易见，$\mathrm{ind}(L)=0$ 当且仅当 M^m 是稳定的. M^m 具有有限的指数，则存在一个紧致子集 $D \subset M$，使得 $M \backslash D$ 是稳定的(参见文献[20]的命题 1)，即对任意的 $f \in C_0^\infty(M \backslash D)$，有

$$\int_{M\backslash D} (|\nabla f|^2 - (\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n}) + |\boldsymbol{A}|^2) f^2) \mathrm{d}M \geqslant 0$$

其中 $\mathrm{d}M$ 表示 M^m 的体积元. 记 $B_{x_0}(r_0)$ 为 M^m 上的以 r_0 为半径、x_0 为球心的测地球. 由稳定算子特征值的区域单调性，若 $D \subset B_{x_0}(r_0)$，则 $M \backslash B_{x_0}(r_0)$ 是稳定的. 不失一般性，设 $D = B_{x_0}(r_0)$，便有

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)} (|\nabla f|^2 - (\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n}) + |\boldsymbol{A}|^2) f^2) \mathrm{d}M \geqslant 0 \tag{1}$$

为证明主要定理，我们需要如下引理：

引理 1[21]　设 M^m 是 m 维完备非紧黎曼流形，E 是 M^m 上 L^p 调和 q-形式空间的一个有限维子空间，则对任意的 $x \in M$，$r > 0$，存在 $\boldsymbol{\omega} \in E$，使得

$$(\dim E)^{\min\left\{1,\frac{p}{2}\right\}} \int_{B_x(r)} |\boldsymbol{\omega}|^p \mathrm{d}M \leqslant \mathrm{Vol}(B_x(r)) \cdot \min\left\{\binom{m}{q}, \dim E\right\}^{\min\{1,p\}} \cdot \sup_{B_x(r)} |\boldsymbol{\omega}|^p$$

引理 2[18]　设 $M^m(m \geqslant 3)$ 是球空间 $\mathbb{S}^{m+n}$ 中的完备非紧子流形，则对任意 $f \in C_0^\infty(M)$，有

$$\left(\int_M |f|^{\frac{2m}{m-2}} \mathrm{d}M\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant C_0 \left(\int_M |\nabla f|^2 \mathrm{d}M + m^2 \int_M (|\boldsymbol{H}|^2 + 1) f^2 \mathrm{d}M\right)$$

其中 $C_0 > 0$ 是仅依赖于 m 的正常数，$\boldsymbol{H}$ 是 M^m 的平均曲率向量.

2　定理的证明

定理 1 的证明　对任意 $\boldsymbol{\omega} \in H^1(L^p(M))$，使用 Bochner 公式[22]有

$$\frac{1}{2}\Delta |\boldsymbol{\omega}|^2 = |\nabla \boldsymbol{\omega}|^2 + \mathrm{Ric}(\boldsymbol{\omega}^\#, \boldsymbol{\omega}^\#) \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{\omega}^\#$ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 的对偶向量场. 另一方面，直接计算易得

$$\frac{1}{2}\Delta |\boldsymbol{\omega}|^2 = |\boldsymbol{\omega}| \Delta |\boldsymbol{\omega}| + |\nabla |\boldsymbol{\omega}||^2 \tag{3}$$

联立(2),(3)式，并结合 Kato 不等式[23]

$$\frac{m}{m-1} |\nabla |\boldsymbol{\omega}||^2 \leqslant |\nabla \boldsymbol{\omega}|^2$$

便有

$$|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}|\geqslant\frac{1}{m-1}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2+\mathrm{Ric}(\boldsymbol{\omega}^{\#},\boldsymbol{\omega}^{\#})\tag{4}$$

依据文献[24]对子流形 Ricci 曲率的估计，对 $\mathbb{S}^{m+1}$ 中的极小超曲面 M^m 有

$$\mathrm{Ric}(\boldsymbol{\omega}^{\#},\boldsymbol{\omega}^{\#})\geqslant(m-1)|\boldsymbol{\omega}|^2-\frac{m-1}{m}|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{\omega}|^2\tag{5}$$

因此，对任意的 $p\geqslant 0$，结合(4),(5)式，直接计算有

$$|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}\Delta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}\geqslant\left(1-\frac{2}{p}+\frac{2}{p(m-1)}\right)|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\frac{p}{2}(m-1)|\boldsymbol{\omega}|^p-\frac{p(m-1)}{2m}|\boldsymbol{A}|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\tag{6}$$

以下为方便起见，积分都省去体积元.

一方面，由(1)式，令 $f=\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}$，对任意的 $\eta\in C_0^{\infty}(M\backslash B_{x_0}(r_0))$，有

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}(\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n})+|\boldsymbol{A}|^2)\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p\leqslant\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})|^2\tag{7}$$

由于 $\mathbb{S}^{m+1}$ 沿 $\boldsymbol{n}$ 的 Ricci 曲率 $\overline{\mathrm{Ric}}(\boldsymbol{n})=m$. 应用散度定理，(7)式可化为

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}\Delta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}\leqslant\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p-m\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p-\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p|\boldsymbol{A}|^2\tag{8}$$

将(6)式代入(8)式，可以得到

$$\left(1-\frac{2}{p}+\frac{2}{p(m-1)}\right)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+\left(\frac{p(m-1)}{2}+m\right)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p\leqslant\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p+\left(\frac{p(m-1)}{2m}-1\right)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p|\boldsymbol{A}|^2\tag{9}$$

由(9)式和假设 $2\leqslant p<\frac{2m}{m-1}$，有

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2\leqslant C_1\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\tag{10}$$

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p\leqslant C_2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\tag{11}$$

其中常数 $C_1>0$，$C_2>0$，且仅与 m,p 的取值有关. 此外，应用引理 2(M^m 极小，故 $\boldsymbol{H}=0$，令 $f=\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}$)，并结合 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\left(\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}}\leqslant C_0\left(2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2+2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p+m^2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p\right)\tag{12}$$

联立(10),(11),(12)式，便有

$$\left(\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}}\leqslant C_3\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p\tag{13}$$

其中 $C_3=C_0(2C_1+2+m^2C_2)$.

对(13)式，由 $\eta\in C_0^{\infty}(M\backslash D)$ 的任意性，可选取 $r>r_0+1$，使得对常数 $C_4>0$，任意的 $x\in M$，

$$\begin{cases}\eta=0 & x\in B_{x_0}(r_0)\cup B_{x_0}(2r)\\ \eta=1 & x\in B_{x_0}(r)\backslash B_{x_0}(r_0+1)\\ |\nabla\eta|<C_4 & x\in B_{x_0}(r_0+1)\backslash B_{x_0}(r_0)\\ |\nabla\eta|<\dfrac{C_4}{r} & x\in B_{x_0}(2r)\backslash B_{x_0}(r)\end{cases}$$

则有

$$\left(\int_{B_{x_0}(r)\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^{\frac{pm}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant \frac{C_5}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)\backslash B_{x_0}(r)} |\boldsymbol{\omega}|^p + C_5\int_{B_{x_0}(r_0+1)\backslash B_{x_0}(r_0)} |\boldsymbol{\omega}|^p$$

其中 $C_5 = C_3 C_4$. 令 $r \to \infty$，又因 $\boldsymbol{\omega} \in H^1(L^p(M))$，所以

$$\left(\int_{B_{x_0}(r_0+2)\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^{\frac{pm}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant \left(\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^{\frac{pm}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant C_5\int_{B_{x_0}(r_0+1)\backslash B_{x_0}(r_0)} |\boldsymbol{\omega}|^p \tag{14}$$

对(14) 式的左边项应用 Hölder 不等式，有

$$\int_{B_{x_0}(r_0+2)\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+2))^{\frac{2}{m}} \cdot \left(\int_{B_{x_0}(r_0+2)\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^{\frac{pm}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \tag{15}$$

将(15) 式代入(14) 式，可以得到

$$\int_{B_{x_0}(r_0+2)\backslash B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+2))^{\frac{2}{m}} \cdot C_5\int_{B_{x_0}(r_0+1)\backslash B_{x_0}(r_0)} |\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+2))^{\frac{2}{m}} \cdot C_5\int_{B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^p$$

因此

$$\int_{B_{x_0}(r_0+2)} |\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant C_6\int_{B_{x_0}(r_0+1)} |\boldsymbol{\omega}|^p \tag{16}$$

其中 $C_6 = \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+2))^{\frac{2}{m}} \cdot C_5 + 1$.

另一方面，记 $T = \left|(m-1) - \frac{m-1}{m}|\boldsymbol{A}|^2\right|$，则由(5) 式可知

$$|\boldsymbol{\omega}|\Delta|\boldsymbol{\omega}| \geqslant \frac{1}{m-1}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2 - T|\boldsymbol{\omega}|^2 \tag{17}$$

对任一 $x \in M$，记 $B_x(1)$ 为 M 上以 x 为球心、1 为半径的测地球. 对任意给定的 $p \geqslant 2$，$\xi \in C_0^\infty B_x(1)$，(17) 式两边同乘 $\xi^2|\boldsymbol{\omega}|^{p-2}$ 并积分，有

$$\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^{p-1}\Delta|\boldsymbol{\omega}| \geqslant \frac{1}{m-1}\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^{p-2}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2 - \int_{B_x(1)} \xi^2 T|\boldsymbol{\omega}|^p \tag{18}$$

对(18) 式的左边项应用散度定理及 Cauchy-Schwarz 不等式并整理，可得

$$(p-1)\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^{p-2}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2 \leqslant (m-1)\int_{B_x(1)} |\boldsymbol{\omega}|^p|\nabla\xi|^2 + \int_{B_x(1)} \xi^2 T|\boldsymbol{\omega}|^p \tag{19}$$

另外，应用 Cauchy-Schwarz 不等式，我们有

$$\int_{B_x(1)} |\nabla(\xi|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})|^2 \leqslant \frac{p^2}{4}\left(1+\frac{1}{p}\right)\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^{p-2}|\nabla|\boldsymbol{\omega}||^2 + (1+p)\int_{B_x(1)} |\nabla\xi|^2|\boldsymbol{\omega}|^p \tag{20}$$

于是，联立(19),(20) 式，并结合引理 2，令 $f = \xi|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}$，则有

$$\left(\int_{B_x(1)} (\xi|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant C_0\left(\int_{B_x(1)} |\nabla(\xi|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})|^2 + m^2\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^p\right) \leqslant C_0\left(E\int_{B_x(1)} |\nabla\xi|^2|\boldsymbol{\omega}|^p + F\int_{B_x(1)} \xi^2 T|\boldsymbol{\omega}|^p + m^2\int_{B_x(1)} \xi^2|\boldsymbol{\omega}|^p\right) \tag{21}$$

其中

$$E = \frac{p(p+1)(m-1)}{4(p-1)} + p + 1$$

$$F = \frac{p(p+1)}{4(p-1)}$$

易见，$E \leqslant mp+1 \leqslant m^2 p$，$F \leqslant p \leqslant m^2 p$，所以，(21)式可化为

$$\left(\int_{B_x(1)} (\xi \mid \boldsymbol{\omega} \mid)^{\frac{p}{2}}\right)^{\frac{2m}{m-2}\frac{m-2}{m}} \leqslant C_0 m^2 p \left(\int_{B_x(1)} (\mid \nabla \xi \mid^2 + \xi^2 (T+1)) \mid \boldsymbol{\omega} \mid^p\right) \tag{22}$$

对上述 $p \geqslant 2$，$\xi \in C_0^{\infty}(B_x(1))$，给定 $k(k=0,1,2,\cdots)$，令 $p_k = \dfrac{2m^k}{(m-2)^k}$，$\rho_k = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^k}$，使得对 $x' \in B_x(1)$，有

$$\begin{cases} \xi = 1 & x' \in B_x(\rho_k + 1) \\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1, \mid \nabla \xi \mid \leqslant 2^{k+3} & x' \in B_x(\rho_k) \backslash B_x(\rho_k + 1) \\ \xi = 0 & x' \in B_x(1) \backslash B_x(\rho_k) \end{cases}$$

则由(22)式，我们有

$$\left(\int_{B_x(\rho_k+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^{\frac{p_k m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant 2^k C_0 m^2 p_k \cdot (2^3 + \sup_{B_x(1)} T + 1) \int_{B_x(\rho_k)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^{p_k} \tag{23}$$

(23)式不等号两边各项指数同乘 $\dfrac{1}{p_k}$，并记 $C_7 = C_0 m^2 \cdot (2^3 + \sup\limits_{B_x(1)} T + 1)$，可得

$$\left(\int_{B_x(\rho_k+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^{p_k+1}\right)^{\frac{1}{p_k+1}} \leqslant (C_7 2^k p_k)^{\frac{1}{p_k}} \left(\int_{B_x(\rho_k)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}} \tag{24}$$

进一步，对(24)式，从 $k=0$ 开始作指数迭代，有

$$\| \boldsymbol{\omega} \|_{L^{\infty}(B_x(\frac{1}{2}))} \leqslant \prod_{k=0}^{\infty} (C_7\ 2^k p_k)^{\frac{1}{p_k}} \left(\int_{B_x(1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

容易算得 $\prod\limits_{k=0}^{\infty} (C_7 2^k p_k)^{\frac{1}{p_k}}$ 收敛，所以存在仅依赖于 m，$\sup\limits_{B_x(1)} T$ 的常数 $C_8 > 0$，使得

$$\| \boldsymbol{\omega} \|_{L^{\infty}(B_x(\frac{1}{2}))} \leqslant C_8 \left(\int_{B_x(1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{25}$$

对上述 $x \in M$，选取 $x \in B_{x_0}(r_0+1)$，使得 $\mid \boldsymbol{\omega} \mid (x) = \sup\limits_{B_{x_0}(r_0+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid (x)$，则由(25)式有

$$\mid \boldsymbol{\omega} \mid (x) \leqslant C_8 \left(\int_{B_x(1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_8 \left(\int_{B_{x_0}(r_0+2)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

因此，记 $C_9 = (C_8)^2$，可以得到

$$\sup_{B_{x_0}(r_0+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2 \leqslant C_9 \int_{B_{x_0}(r_0+2)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2 \tag{26}$$

最后，联立(16)，(26)式，便有

$$\sup_{B_{x_0}(r_0+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2 \leqslant C_{10} \int_{B_{x_0}(r_0+1)} \mid \boldsymbol{\omega} \mid^2 \tag{27}$$

其中 $C_{10} = C_6 \cdot C_9$. 于是，对 $H^1(L^p(M))$ 的任意一个有限维子空间 E，结合(27)式和引理1，有

$$\dim E \leqslant C_{10} \cdot \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+1)) \cdot \min\{m, \dim E\}$$

记

$$C_{11} = C_{10} \cdot \mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+1)) \cdot \min\{m, \dim E\}$$

则 $\dim E \leqslant C_{11}$，其中 $C_{11} > 0$ 是仅与 m，p，$\mathrm{Vol}(B_{x_0}(r_0+2))$，$\sup\limits_{B_{x_0}(r_0+2)} T$ 有关的常数. 因此，$H^1(L^p(M))$ 的维数有限. 进一步，若取 $p=2$，则 M^m 上 L^2 调和1-形式空间的维数有限，所以 M^m 最多仅有有限多个非抛物端. 定理1证毕.

定理2的证明 任意的 $\boldsymbol{\omega} \in H^1(L^p(M))$，由定理1的证明，(9)式成立，即

$$\left(1 - \frac{2}{p} + \frac{2}{p(m-1)}\right) \int_{M \backslash B_{x_0}(r_0)} \eta^2 \mid \nabla \mid \boldsymbol{\omega} \mid^{\frac{p}{2}} \mid^2 + \left(\frac{p(m-1)}{2} + m\right) \int_{M \backslash B_{x_0}(r_0)} \eta^2 \mid \boldsymbol{\omega} \mid^p \leqslant$$

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)} |\nabla\eta|^2 |\boldsymbol{\omega}|^p + \left(\frac{p(m-1)}{2m}-1\right)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)} \eta^2 |\boldsymbol{\omega}|^p |\boldsymbol{A}|^2 \tag{28}$$

记 $S(\eta)=\left(\int_{\mathrm{supp}\,\eta}|\boldsymbol{A}|^m\right)^{\frac{1}{m}}$，使用 Hölder 不等式和 Sobolev 不等式，便有

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)} \eta^2 |\boldsymbol{\omega}|^p |\boldsymbol{A}|^2 \leqslant \left(\int_{\mathrm{supp}\,\eta}|\boldsymbol{A}|^m\right)^{\frac{2}{m}}\left(\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})^{\frac{2m}{m-2}}\right)^{\frac{m-2}{m}} \leqslant$$

$$S^2(\eta)C_0\left(\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})|^2 + m^2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p\right) \tag{29}$$

对任意的 $\varepsilon>0$，由 Cauchy-Schwarz 不等式，有

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla(\eta|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}})|^2 \leqslant (1+\epsilon)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2 + \left(1+\frac{1}{\epsilon}\right)\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p$$

联立(28),(29) 式，可以得到

$$E\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2 + F\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant G\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p$$

其中

$$E=1-\frac{2}{p}+\frac{2}{p(m-1)}-\left(\frac{p(m-1)}{2m}-1\right)S^2(\eta)C_0(1+\varepsilon)$$

$$F=\frac{p(m-1)}{2}+m-\left(\frac{p(m-1)}{2m}-1\right)S^2(\eta)C_0m^2$$

$$G=1+\left(\frac{p(m-1)}{2m}-1\right)S^2(\eta)C_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

选取足够小的 $\varepsilon>0$，由于条件假设 $p>\frac{2m}{m-1}$，故 $G>0$. 不难验证，若

$$\|\boldsymbol{A}\|_{L^m(M)} < \min\left\{\sqrt{\frac{2m(p-2)(m-1)+4m}{C_0p(m-1)[p(m-1)-2m]}},\ \sqrt{\frac{p(m-1)+2m}{C_0m[p(m-1)-2m]}}\right\}$$

则 $E>0$，$F>0$.

令 $C'_1=\frac{G}{E}$，$C'_2=\frac{G}{F}$，则

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\nabla|\boldsymbol{\omega}|^{\frac{p}{2}}|^2 \leqslant C'_1\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p$$

$$\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}\eta^2|\boldsymbol{\omega}|^p \leqslant C'_2\int_{M\backslash B_{x_0}(r_0)}|\nabla\eta|^2|\boldsymbol{\omega}|^p$$

其中 $C'_1>0$，$C'_2>0$ 是仅依赖于 m，p 的常数，即在定理的假设条件下同样有(10)，(11) 式成立(仅相差常数部分). 同理，应用引理 2 有(12) 式成立. 因此，由定理 1 的证明可得 $H^1(L^p(M))$ 的维数有限. 定理 2 证毕.

参考文献：

[1] CARRON G. L^2 Harmonic Forms on Non-Compact Riemannian Manifolds [C]//. Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications. Canberra：Australian National University，2002：49-59.

[2] LI P，TAM L F. Harmonic Functions and the Structure of Complete Manifolds [J]. Journal of Differential Geometry，1992，35(2)：359-383.

[3] PALMER B. Stability of Minimal Hypersurfaces [J]. Commentarii Mathematici Helvetici，1991，66(1)：185-188.

[4] TANNO S. L^2 Harmonic Forms and Stability of Minimal Hypersurfaces [J]. Journal of the Mathematical Society of Japan，1996，48(4)：761-768.

[5] CHENG X. L^2 Harmonic Forms and Stability of Hypersurfaces with Constant Mean Curvature [J]. Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática，2000，31(2)：225-239.

[6] SEO K. L^2 Harmonic 1-Forms on Minimal Submanifolds in Hyperbolic Space [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 371(2): 546-551.

[7] DUNG N T, SEO K. Stable Minimal Hypersurfaces in a Riemannian Manifold with Pinched Negative Sectional Curvature [J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2012, 41(4): 447-460.

[8] ZHU P. L^2-Harmonic Forms and Stable Hypersurfaces in Space Forms [J]. Archiv der Mathematik, 2011, 97(3): 271-279.

[9] LI P, WANG J P. Minimal Hypersurfaces with Finite Index [J]. Mathematical Research Letters, 2002, 9(1): 95-103.

[10] CHOI H, SEO K. L^p Harmonic 1-Forms on Minimal Hypersurfaces with Finite Index [J]. Journal of Geometry and Physics, 2018, 129: 125-132.

[11] 马蕾,刘建成. 局部对称空间中常平均曲率超曲面的拼挤定理 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2019, 44(2): 5-9.

[12] YUN G. Tatol Scalar Curvature and L^2-Harmonic 1-Forms on a Minimal Hypersurface in Euclidean Space [J]. Geometriae Dedicata, 2002, 89: 135-141.

[13] FU H P, XU H W. Total Curvature and L^2 Harmonic 1-Forms on Complete Submanifolds in Space Forms [J]. Geometriae Dedicata, 2010, 144(1): 129-140.

[14] SEO K. Rigidity of Minimal Submanifolds in Hyperbolic Space [J]. Archiv der Mathematik, 2010, 94(2): 173-181.

[15] WANG Q L, XIA C Y. Complete Submanifolds of Manifolds of Negative Curvature [J]. Annals of Global Analysis and Geometry, 2011, 39(1): 83-97.

[16] CAVALCANTE M P, MIRANDOLA H, VITÓRIO F. L^2 Harmonic 1-Forms on Submanifolds with Finite Total Curvature [J]. Journal of Geometric Analysis, 2014, 24(1): 205-222.

[17] GAN W Z, ZHU P. L^2 Harmonic 1-Forms on Minimal Submanifolds in Spheres [J]. Results in Mathematics, 2014, 65(3/4): 483-490.

[18] ZHU P, FANG S W. A Gap Theorem on Submanifolds with Finite Total Curvature in Spheres [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2014, 413(1): 195-201.

[19] 周俞洁,张泽宇,王林峰. 黎曼流形上 p-Laplace 算子的 Liouville 定理 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(10): 62-68.

[20] FISCHER-COLBRIE D. On Complete Minimal Surfaces with Finite Morse Index in Three-Manifolds [J]. Inventiones mathematicae, 1985, 82(1): 121-132.

[21] LI P. On the Sobolev Constant and the p-Spectrum of a Compact Riemannian Manifold [EB/OL]. [2022-05-15]. https://www.numdam.org/itemid=ASENS_1980_4_13_4_451_0.

[22] LI P. Lecture Notes on Geometric Analysis [EB/OL]. [2022-04-07]. https://www.researchgate.net/publication/2634104.

[23] GALDERBANK D M, GAUDUCHON P, HERZLICH M. Refined Kato Inequalities and Conformal Weights in Riemannian Geometry [J]. Journal of Functional Analysis, 2000, 173(1): 214-255.

[24] LEUNG P F. An Estimate on the Ricci Curvature of a Submanifold and Some Applications [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1992, 114(4): 1051-1063.

责任编辑 廖坤