

一类带时滞的霍乱传染病模型的稳定性分析^①

廖书, 方章英

重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067

摘要: 首先, 针对水源性传染病具有多种传播途径的特点, 考虑疾病在易感者体内要潜伏一段时间, 建立带时滞的传染病模型, 并得出该模型的基本再生数和平衡点; 其次, 通过分析相应的特征方程来研究该模型的两个平衡点(无病平衡点和地方病平衡点)的局部渐近稳定性; 最后, 通过构造两个合适的 Lyapunov 函数来研究两个平衡点的全局渐近稳定性.

关键词: 霍乱; 时滞; 全局渐近稳定性; Lyapunov 函数

中图分类号: O175.13

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)03-0047-05

Stability Analysis of a Class of Cholera Epidemic Models with Time Delay

LIAO Shu, FANG Zhangying

School of Mathematics and Statistics, Chongqing University of Technology and Business, Chongqing 400067, China

Abstract: Firstly, to address the characteristics of waterborne infectious diseases with multiple transmission routes and considering that the disease has to be latent in susceptible individuals for a period of time, an infectious disease model with time delay is established and the basic regeneration number and equilibrium points of the model are derived; secondly, the local asymptotic stability of the two equilibrium points (disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point) of the model is studied by analyzing the corresponding characteristic equations; finally, the full stability of the two equilibrium points is studied by constructing Finally, the global asymptotic stability of the two equilibrium points was investigated by constructing two appropriate Lyapunov functions.

Key words: cholera; time delay; global asymptotic stability; Lyapunov function

霍乱是全球公共卫生和疾病防控体系最为关注的疾病之一, 它具有高致病性和快速传播性等特点, 若治疗不及时重症患者死亡风险高, 所以对其进行理论分析并进行模拟仿真来研究就显得尤为重要. 文献[1]创立了 SIR 仓室模型来研究传染病; 文献[2]提出一个较为简单的霍乱模型; 文献[3]强调了水源环境成分的重要性, 提出了 SIRB 流行病模型, 其中 B 代表霍乱弧菌在水中的浓度; 文献[4]提出了一类以隔离和接种参数为控制策略的霍乱动力学传播数学模型, 并通过数学分析证明了该模型的解在一定区域内唯一存

① 收稿日期: 2022-02-13

基金项目: 重庆市基础研究与前沿探索项目(cstc2020jcyj-msxmX0394); 重庆市教委科学技术研究项目(KJQN201900806).

作者简介: 廖书, 教授, 主要从事生物数学研究.

在、正且有界;文献[5]建立并分析了一个非线性反应扩散模型,以捕捉人类宿主和细菌在空间异质性环境中的运动效果.更多相关文献可参考文献[6-8].

时滞 in 传染病的传播过程中扮演着重要的角色,研究带有时滞的传染病模型更具有实际意义.文献[9]考虑了一个具有离散时滞的微分时滞模型,模型中的时滞代表了带菌者成为传染性疾 病所需的潜伏期,除此之外他们研究了时滞对平衡点稳定性的影响等;文献[10]建立了一个带有非线性时滞的传染病模型,研究表明当时滞超过一定阈值时,模型的稳定性会发生变化,产生 Hopf 分支;文献[11]构建了含时滞的霍乱模型,并证明了当 $R_0 < 1$ 时在特定的条件下模型的无病平衡点是全局渐近稳定的,当 $R_0 > 1$ 时模型的地方病平衡点也是全局渐近稳定的;文献[12]研究了一个具有时滞的霍乱模型的全局动力学,以证明时滞的影响;文献[13]在水源性传染病模型中加入媒体效应的影响,构造了带媒体效应的多时滞水源性模型,同时研究了媒体效应和多种不同时滞对水源性传染病传播的影响.更多相关文献可参考文献[14-15].

本文为了更真实地反映霍乱的传播过程,考虑疾病在易感者体内要潜伏一段时间,在文献 [14]的基础上,增加时滞因素,建立带时滞的传染病模型,然后通过分析模型系统相应的特征方程来研究两类平衡点的局部稳定性.进一步构造两个 Lyapunov 函数来对模型的无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性进行研究.

1 建立时滞模型

在文献[14]的基础上,增加时滞因素,建立如下时滞模型:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \Lambda - \beta_I S(t)I(t - \tau) - \beta_w S(t)W(t) - \mu S(t) \quad (1)$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = \beta_I S(t)I(t - \tau) + \beta_w S(t)W(t) - (\mu + \gamma)I(t) \quad (2)$$

$$\frac{dW(t)}{dt} = \alpha I(t) - \xi W(t) \quad (3)$$

$$\frac{dR(t)}{dt} = \gamma I(t) - \mu R(t) \quad (4)$$

其中: $S(t), I(t), R(t)$ 分别表示易感者、染病者、移出者; $W(t)$ 表示水环境中霍乱弧菌的浓度; Λ 表示总人口潜 入率, β_I, β_w 分别表示受污染的环境与人和人之间的接触率, ξ 表示细菌死亡率, α 表示脱落率, μ 表示死亡率, γ 表示感染者复原率,所有参数均为正; τ 是正常数,表示疾病潜伏期.处于潜伏期的患者不表现出传染性.

由于方程(1) - (3) 的独立性,故在后文的计算中不考虑方程(4).

定义 Banach 空间中的连续函数 $\psi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+^3$ 且模为 $\|\psi\| = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{|\psi_1(\theta)|, |\psi_2(\theta)|, |\psi_3(\theta)|\}$,

其中 $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.

模型(1) - (3) 的初始条件为

$$S(\theta) = \psi_1(\theta) \geq 0, I(\theta) = \psi_2(\theta) \geq 0, W(\theta) = \psi_3(\theta) \geq 0, \theta \in (-\tau, 0) \quad (5)$$

根据文献[14] 知模型有唯一的正无病平衡点 $E_0 = (\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0)^T$, 唯一的正地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, W^*)^T$ 表示为

$$I^* = \frac{\Lambda}{\mu + \gamma} - \frac{\mu \xi}{\beta_I \xi + \beta_w \alpha} \quad W^* = \frac{\alpha \Lambda}{\xi(\mu + \gamma)} - \frac{\alpha \mu}{\beta_I \xi + \beta_w \alpha} \quad S^* = \frac{(\mu + \gamma) \xi}{\beta_I \xi + \beta_w \alpha}$$

基本再生数

$$R_0 = \frac{\beta_I \Lambda}{\mu(\mu + \gamma)} + \frac{\alpha \beta_w \Lambda}{\xi \mu(\mu + \gamma)} \quad (6)$$

2 模型的稳定性分析

本节针对时滞模型(1) - (3) 的平衡点的稳定性进行讨论.

2.1 $\tau=0$ 时平衡点的稳定性

当 $\tau=0$ 时, 模型(1)–(3)可简化为 Wang 和 Modank^[14] 的模型, 根据他们的工作, 可直接得出以下结果:

定理 1 当 $R_0 < 1$ 且 $\tau=0$ 时, 模型(1)–(3) 的无病平衡点是局部渐近稳定和全局渐近稳定的.

定理 2 当 $R_0 > 1$ 且 $\tau=0$ 时, 模型(1)–(3) 的地方病平衡点是局部渐近稳定和全局渐近稳定的.

2.2 $\tau > 0$ 时平衡点的稳定性

定理 3 当 $R_0 < 1$ 且 $\tau > 0$ 时, 模型(1)–(3) 的无病平衡点是局部渐近稳定的.

证 将模型(1)–(3) 在无病平衡点 E_0 处线性化后, 得到一个负的特征解 $\lambda = -\mu$, 其他根的特征方程为

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 + (b_1\lambda + b_2)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (7)$$

其中

$$a_1 = \xi + \mu + \gamma, \quad a_2 = (\mu + \gamma)\xi - \alpha\beta_w S_0, \quad b_1 = -\beta_I S_0, \quad b_2 = -\beta_I S_0 \xi$$

将(7) 式重新整理为

$$\lambda^2 + a_1\lambda = \xi(\mu + \gamma) \left[\frac{\beta_I e^{-\lambda\tau} S_0}{\mu + \gamma} + \frac{\alpha\beta_w S_0}{\xi(\mu + \gamma)} - 1 \right] + \beta_I S_0 \lambda e^{-\lambda\tau} \quad (8)$$

设(8) 式的左右两边分别为 $G(\lambda)$ 和 $H(\lambda)$. 从而有 $G(0)=0$ 且 $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} G(\lambda) = \infty$, 因此 $G(\lambda)$ 是 λ 的递增函数. $H(\lambda)$ 是关于 λ 的递减函数, 当 $R_0 < 1$ 时, $H(0) = \xi(\mu + \gamma)(R_0 - 1) \leq 0$. 因此, (8) 式有非负实根. 如果(7) 式有非负实部的根, 则它们必须是复数, 并且是成对的共轭复根. 因此, 当 $\tau > 0$, 由(7) 式可以得到一对纯虚解.

假设 $i\omega$ ($\omega > 0$) 是方程(7) 的根, ω 满足下式

$$-\omega^2 + a_1 i\omega + a_2 + (ib_1\omega + b_2)(\cos(\omega\tau) - i\sin(\omega\tau)) = 0 \quad (9)$$

将(9) 式分离实部和虚部可得

$$\begin{cases} -\omega^2 + a_2 = -b_1\omega \sin(\omega\tau) - b_2 \cos(\omega\tau) \\ -a_1\omega = -b_1\omega \cos(\omega\tau) + b_2 \sin(\omega\tau) \end{cases} \quad (10)$$

将(10) 式中两个式子平方相加,

$$\omega^4 + (a_1^2 - 2a_2 - b_1^2)\omega^2 + a_2^2 - b_2^2 = 0 \quad (11)$$

从而有

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[-(a_1^2 - 2a_2 - b_1^2) \pm \sqrt{(a_1^2 - 2a_2 - b_1^2)^2 - 4(a_2^2 - b_2^2)} \right] \quad (12)$$

这意味着方程(11) 没有正根, 因此不会得到满足方程(7) 的解. 根据 Rouche's 定理^[15], 当 $R_0 < 1$ 时, E_0 是局部渐近稳定的. 接下来, 我们将分析模型(1)–(3) 无病平衡点 E_0 的全局稳定性.

定理 4 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(1)–(3) 的无病平衡点是全局渐近稳定的.

证 由(3) 式可知

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} W(t) \leq \frac{\alpha}{\xi} I(t) \quad (13)$$

考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V_1(t) = I(t) + \beta_I S_0 \int_{-\tau}^0 I_t(\theta) d\theta \quad (14)$$

其中 $I_t(\theta) = I(t + \theta)$, $\theta \in [-\tau, 0]$, 易知 $V_1(t)$ 显然是有界的, 计算 $V_1(t)$ 沿模型(1)–(3) 的解的全导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_1(t)}{dt} &= \beta_I S(t)I(t - \tau) + \beta_w S(t)W(t) - (\mu + \gamma)I(t) + \beta_I S_0 I(t) - \beta_I S_0 I(t - \tau) \leq \\ &\quad \beta_I S_0 I(t) + \beta_w S_0 W(t) - (\mu + \gamma)I(t) \leq \\ &\quad (\mu + \gamma)(R_0 - 1)I(t) \end{aligned} \quad (15)$$

显然当 $R_0 < 1$ 时, $\frac{dV_1(t)}{dt} \leq 0$, 证毕.

接下来研究 $\tau > 0$ 时, 地方病平衡点 $E^* = (S^*, I^*, W^*)$ 的稳定性, 为了简化代数运算, 令 $P^* = \beta_I I^* + \beta_w W^*$, 得到线性化方程的特征多项式为

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 + (b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3) e^{-\lambda \tau} = 0 \quad (16)$$

其中

$$a_1 = 2\mu + \gamma + \xi + P^*$$

$$a_2 = -\alpha \beta_w S^* + (\xi + P^* + \mu)(\mu + \gamma) + \xi(P^* + \mu)$$

$$a_3 = \xi(P^* + \mu)(\mu + \gamma) - \alpha \mu \beta_w S^*$$

$$b_1 = -\beta_I S^*, b_2 = -\beta_I S^*(\mu + \xi), b_3 = -\beta_I S^* \xi \mu$$

λ 是(16)式的一个根, 将 $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) 代入(16)式中, 分离实部和虚部, 最终得到以下两个超越方程:

$$-a_1 \omega^2 + a_3 = b_1 \omega^2 \cos(\omega \tau) - b_2 \omega \sin(\omega \tau) - b_3 \cos(\omega \tau) \quad (17)$$

$$-\omega^3 + a_2 \omega = -b_1 \omega^2 \sin(\omega \tau) - b_2 \omega \cos(\omega \tau) + b_3 \sin(\omega \tau) \quad (18)$$

将(17)式和(18)式平方相加得

$$\omega^6 + \omega^4(a_1^2 - 2a_2 - b_1^2) + \omega^2(a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2b_1 b_3 - b_2^2) + a_3^2 - b_3^2 = 0 \quad (19)$$

令 $\omega^2 = x$, 则

$$F(x) = x^3 + B_1 x^2 + B_2 x + B_3 = 0 \quad (20)$$

其中

$$B_1 = a_1^2 - 2a_2 - b_1^2, B_2 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2b_1 b_3 - b_2^2, B_3 = a_3^2 - b_3^2$$

容易验证得 $B_1 \geq 0, B_3 \geq 0$.

定理 5 当 $R_0 > 1, \tau > 0$ 时, 若 $B_2 \geq 0$, 模型(1)–(3)的地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的.

证 为了证明地方病平衡点 E^* 是局部渐近稳定的, 须证明方程(20)没有正实根. 实际上, 如果我们对

$$F(x) \text{ 求关于 } x \text{ 的导数 } F'(x) = 3x^2 + 2B_1 x + B_2, \text{ 方程 } F'(x) = 0 \text{ 的根可解为 } x_{1,2} = \frac{-B_1 \pm \sqrt{B_1^2 - 3B_2}}{3},$$

如果 $B_2 > 0$, 那么 $\sqrt{B_1^2 - 3B_2} < B_1$. 因此 x_1, x_2 都不是正的, 可以得出方程 $F'(x) = 0$ 没有正根. 同样的, 假设 $F(0) = B_3 \geq 0$, 意味着方程(20)没有正实根. 因此, 不存在 ω , 使得 $i\omega$ 是特征方程(16)的特征值. 根据 Rouché's 定理^[15], 当 $\tau > 0$ 时, (16)式的所有特征值的实部均为负. 证毕.

接下来, 我们将证明当 $R_0 > 1$ 且 $\tau > 0$ 时模型(1)–(3)的全局稳定性.

定理 6 当 $R_0 > 1, \tau > 0$ 时, 模型(1)–(3)的地方病平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

证 令函数 $g(t) = t - 1 - \ln t \geq 0$, 且 $g(t) = 0$ 当且仅当 $t = 1$.

考虑以下 Lyapunov 函数:

$$V_2(t) = \left(S(t) - S^* - S^* \ln \frac{S(t)}{S^*} \right) + \left(I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*} \right) + \frac{\beta_w S^*}{\xi} \times \left(W(t) - W^* - W^* \ln \frac{W(t)}{W^*} \right) + \beta_I S^* I^* \int_0^\tau \left(\frac{I(t-s)}{I^*} - 1 - \ln \frac{I(t-s)}{I^*} \right) ds \quad (21)$$

易知 $V_2(t)$ 也是有界的, 对 $V_2(t)$ 沿模型(1)–(3)的解求全导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{dV_2(t)}{dx} &= \left(1 - \frac{S^*}{S(t)} \right) S'(t) + \left(1 - \frac{I^*}{I(t)} \right) I'(t) + \frac{\beta_w S^*}{\xi} \left(1 - \frac{W^*}{W(t)} \right) W'(t) + \\ &\quad \beta_I S^* I^* \left(\frac{I(t)}{I^*} - \frac{I(t-\tau)}{I^*} + \ln \frac{I(t-\tau)}{I(t)} \right) = \\ &\quad 2\mu S^* - \mu S(t) + 2\beta_I S^* I^* + 3\beta_w S^* W^* - \frac{S^* \beta_I S^* I^*}{S(t)} - \frac{S^* \beta_w S^* W^*}{S(t)} - \frac{S^* \mu S^*}{S(t)} - \\ &\quad \frac{\beta_I I^* S(t) I(t-\tau)}{I(t)} - \frac{\beta_w S(t) W(t) I^*}{I(t)} - \frac{\beta_w S^* W^* W^* I(t)}{W(t) I^*} + \beta_I S^* I^* \ln \frac{I(t-\tau)}{I(t)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu S^* \left(2 - \frac{S(t)}{S^*} - \frac{S^*}{S(t)} \right) - \beta_I S^* I^* g \left(\frac{S^*}{S(t)} \right) - \beta_I S^* I^* g \left(\frac{S(t)I(t-\tau)}{I(t)S^*} \right) - \\ & \beta_w S^* W^* g \left(\frac{S^*}{S(t)} \right) - \beta_w S^* W^* g \left(\frac{S(t)W(t)I^*}{I(t)S^*W^*} \right) - \beta_w S^* W^* g \left(\frac{W^*I(t)}{W(t)I^*} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

显然, 对于 $S(t) > 0$ 有 $2 - \frac{S(t)}{S^*} - \frac{S^*}{S(t)} \leq 0$, 因此, 可以证明 $\frac{dV_2(t)}{dt} \leq 0$, 证毕.

3 结束语

本文构建带有时滞项的霍乱模型. 首先, 对于任意大于 0 的时滞都通过分析霍乱模型对应的特征方程, 研究了模型的无病平衡点和地方病平衡点的局部稳定性. 进一步巧妙地构造两个合适的 Lyapunov 函数证明模型的两类平衡点的全局稳定性. 本文的模型是建立在恢复者不会再次感染的假设基础上, 然而该假设过于理想. 如何改善本文的模型, 使得更加符合实际, 是我们未来的工作重点之一.

参考文献:

- [1] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 1927, 115(772): 700-721.
- [2] CAPASSO V, PAVERI-FONTANA S L. A Mathematical Model for the 1973 Cholera Epidemic in the European Mediterranean Region [J]. Revue d'Epidemiologie et De Sante Publique, 1979, 27(2): 121-132.
- [3] CODEÇO C T. Endemic and Epidemic Dynamics of Cholera: The Role of the Aquatic Reservoir [J]. BMC Infectious Diseases, 2001, 1: 1.
- [4] NNEAMAKA J E, HOUENAF A T, EDWIN M. Modeling and Analysis of Cholera Dynamics with Vaccination [J]. American Journal of Applied Mathematics and Statistics, 2018, 7(1): 1-8.
- [5] WANG J L. Analysis of a Reaction-Diffusion Cholera Epidemic Model in a Spatially Heterogeneous Environment [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2020, 80: 104951.
- [6] MUKANDAVIRE Z, LIAO S, WANG J, et al. Estimating the Reproductive Numbers for the 2008-2009 Cholera Outbreaks in Zimbabwe [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 2011, 108(21): 8767-8772.
- [7] HARTLEY D M, MORRIS J G, SMITH D L. Hyperinfectivity: a Critical Element in the Ability of V. Cholerae to Cause Epidemics? [J]. PLoS Medicine, 2006, 3(1): 63-69.
- [8] SHUAI Z S. Global Dynamics of Cholera Models with Differential Infectivity [J]. Mathematical Biosciences, 2011, 234(2): 118-126.
- [9] WEI H M, LI X Z, MARTCHEVA M. An Epidemic Model of a Vector-Borne Disease with Direct Transmission and Time Delay [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 342(2): 895-908.
- [10] MISRA A K. A Mathematical Model for the Control of Carrier-Dependent Infectious Diseases with Direct Transmission and Time Delay [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2013, 57: 41-53.
- [11] ZHOU X Y, SHI X Y, CUI J A, et al. Dynamic Behavior of a Delay Cholera Model with Constant Infectious Period [J]. Journal of Applied Analysis & Computation, 2020, 10(2): 598-623.
- [12] WANG Y, WEI J. Global Dynamics of a Cholera Model with Time Delay [J]. International Journal of Biomathematics, 2013, 6(1): 143-160.
- [13] LIAO S, YANG W M. Cholera Model Incorporating Media Coverage with Multiple Delays [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2019, 42(2): 419-439.
- [14] WANG J, MODNAK C. Modeling Cholera Dynamics with Controls [J]. Canadian Applied Mathematics Quarterly, 2011, 19(3): 255-273.
- [15] LASALLE J P. The Stability of Dynamical Systems, Regional Conference Series in Applied Mathematics[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.