DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.03.008

开放异质环境下考虑外源输入及频率依赖发生率的反应-扩散-对流 SIS 模型①

饶旭[1,2]，　张国洪[1]

1. 西南大学 数学与统计学院，重庆 400715；2. 成都市第三十六中学校，成都 610083

摘要： 研究了开放异质环境下带有线性外源项及频率依赖发生率的反应-扩散-对流 SIS 模型. 首先证明了解的一致有界性，然后引入了基本再生数 R_0，获得了模型关于 R_0 的阈值动力学行为：当 $R_0<1$ 时，唯一的无病平衡点局部渐近稳定；当 $R_0>1$ 时，系统一致持续且存在流行病平衡点. 最后研究了 R_0 对感染者的扩散速度 d_I 和对流率 q 的依赖性，发现在开放对流环境下，对流率的增加有利于传染病的控制.

关　键　词： 开放对流环境；线性外源项；SIS 传染病模型；频率依赖发生率；基本再生数

中图分类号： O175　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000-5471(2023)03-0052-09

Analysis on a SIS Epidemic Reaction-Diffusion-Advection Model with External Source and Frequency-Dependent Incidence Rate in an Open Spatial Heterogeneous Environment

RAO Xu[1,2],　ZHANG Guohong[1]

1. School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China;
2. Chengdou NO.36 Middle School, Chengdu 610083, China

Abstract: A SIS epidemic reaction-diffusion-advection model with linear source and frequency-dependent incidence rate in an open heterogeneous environment has been investigated. Firstly, the uniform boundedness of the solution is obtained. Secondly, the basic reproduction number R_0 is introduced and the threshold dynamics behavior of the model about R_0 is obtained. The unique disease-free equilibrium is linearly stable if $R_0<1$ and the system is uniformly persistent if $R_0>1$, which implies the existence of endemic equilibrium. And finally, the dependence of R_0 on advection rate q and diffusion rate d_I is studied. It is known that the increase of q is helpful in controlling infectious disease in an open spatial heterogeneous environment.

Key words: open advective environment; linear source; SIS epidemic model; frequency-dependent incidence rate; basic reproduction number

---

① 收稿日期：2021-05-07

基金项目：国家自然科学基金项目(11871403).

作者简介：饶旭，硕士研究生，主要从事生物数学及动力系统理论及其应用研究.

通信作者：张国洪，副教授.

近年来，空间异质性和种群扩散对传染病的影响得到了广泛的研究. 文献[1]提出了封闭异质环境下的反应-扩散 SIS 模型，获得了关于 R_0 的阈值动力学行为. 在文献[1]的基础上，文献[2-3]分别研究了种群的外源输入和 logistic 增长对传染病动力学性态的影响，发现种群人口数的变化可能导致传染病一直持续. 有别于文献[1]中的标准发生率，文献[4-5]分别讨论了服从双线性发生率和频率依赖发生率的 SIS 模型，且文献[6-8]还研究了带饱和发生率的传染病模型的动力学行为. 文献[9]添加了对流项以描述种群受到外在环境力量而运动的事实，并获得了 R_0 关于对流率和扩散速度的依赖性.

注意到文献[9]讨论的是封闭对流环境下的 SIS 模型，但现实生活中，当疾病爆发后，部分个体可能会迁出相关区域，进而影响传染病动力学行为. 基于以上讨论，本文考虑开放对流环境下服从频率依赖发生率且带有线性外源项的反应-扩散-对流 SIS 模型

$$\begin{cases} S_t = d_S S_{xx} - qS_x + \Lambda(x) - a(x)S - \beta(x)\dfrac{SI}{m+S+I} + \gamma(x)I, & 0<x<L,\ t>0 \\ I_t = d_I I_{xx} - qI_x + \beta(x)\dfrac{SI}{m+S+I} - \gamma(x)I, & 0<x<L,\ t>0 \\ d_S S_x(0) - qS(0) = 0,\ S_x(L) = 0, & t>0 \\ d_I I_x(0) - qI(0) = 0,\ I_x(L) = 0, & t>0 \\ S(x,0) = S_0(x),\ I(x,0) = I_0(x), & 0<x<L \end{cases} \tag{1}$$

其中：S 和 I 分别代表易感群体和感染群体 t 时刻在 x 处的密度分布；系数 d_S，d_I 分别代表易感群体和感染群体的扩散率；q 表示两个群体的对流速度；$\beta(x)$ 是疾病传播率，$\gamma(x)$ 是感染恢复率，它们都是 $[0, L]$ 上的正的 Hölder 连续函数；$\Lambda(x)$ 和 $a(x)$ 分别表示易感群体的输入率和死亡率. 参考文献[10]，上游 $x=0$ 和下游 $x=L$ 分别是无流和自由流边界条件. 频率依赖发生函数 $\dfrac{SI}{m+S+I}$ 在种群动力系统中也被称作B-D功能反应函数. 我们假设在初始时刻，$S_0(x)$，$I_0(x)$ 在 $[0, L]$ 连续，且一定有感染个体，即 $\int_0^L I_0(x)\mathrm{d}x > 0$，$S_0(x) \geqslant 0$，$I_0(x) \geqslant 0$.

1　解的一致有界性

由抛物方程的理论，系统(1)在 $C^{2,1}([0, L]\times(0, T_{\max}))(0 < T_{\max} \leqslant \infty)$ 上有唯一的经典解. 由 $I_0 \geqslant 0$ 且 $I_0 \not\equiv 0$ 和抛物方程的极大值原理可得该系统的解是正解. 本节将证明模型(1)解的一致有界性，从而得到解的全局存在性. 为了记号方便，规定：

$$g^* = \max_{x\in[0, L]}\{g(x)\},\ g_* = \min_{x\in[0, L]}\{g(x)\}$$

对 $g = \beta, \gamma, \Lambda, a$.

定理 1　对于给定的初始值 (S_0, I_0)，系统(1)的解全局存在且一致有界，即存在与初始值无关的常数 $M > 0$，使得对于某个充分大的常数 $T > 0$，有

$$\| S(\cdot, t) \|_{L^\infty((0, L))} + \| I(\cdot, t) \|_{L^\infty((0, L))} \leqslant M,\ \forall t > T$$

证　只证明解的一致有界性. 即对任意正整数 k，都存在与初始值无关的正常数 $M = M(k)$，使得对于某个充分大的正数 T，有

$$\| S(\cdot, t) \|_{L^k((0, L))} + \| I(\cdot, t) \|_{L^k((0, L))} \leqslant M,\ \forall t > T \tag{2}$$

我们采用数学归纳法证明. 对于 $k=1$，取合适的 $\varepsilon > 0$，满足 $a_* - \varepsilon\beta^* > 0$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\left[\int_0^L (S + (1+\varepsilon)I)\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{d}t} = & -qS(L, t) - (1+\varepsilon)\, q\, I(L, t) + \int_0^L [\Lambda(x) - a(x)S]\mathrm{d}x + \\ & \varepsilon\int_0^L \beta(x)\frac{SI}{m+S+I}\mathrm{d}x - \varepsilon\int_0^L \gamma(x)I\,\mathrm{d}x \leqslant \\ & \int_0^L \Lambda(x)\mathrm{d}x - (a_* - \varepsilon\beta^*)\int_0^L S\,\mathrm{d}x - \frac{\varepsilon\gamma_*}{1+\varepsilon}\int_0^L (1+\varepsilon)I\,\mathrm{d}x \leqslant \end{aligned}$$

$$\vartheta-\theta\int_0^L[S+(1+\varepsilon)I]\mathrm{d}x$$

其中：$\vartheta=\int_0^L\Lambda(x)\mathrm{d}x$，$\theta=\min\left\{a_*-\varepsilon\beta^*,\ \frac{\varepsilon\gamma_*}{1+\varepsilon}\right\}>0$. 由 Gronwall 不等式，

$$\int_0^L[S+(1+\varepsilon)I]\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{-\theta t}\int_0^L[S_0(x)+(1+\varepsilon)I_0(x)]\mathrm{d}x+\frac{\vartheta}{\theta}(1-\mathrm{e}^{-\theta t}),\ \forall t\geqslant 0$$

故当 $k=1$ 时，(2) 式成立. 假设对于 $k-1$，(2) 式成立. 下证：对于 k，(2) 式仍成立. 事实上，在系统(1) 第一、二个方程两边分别乘以 S^{k-1}，I^{k-1} 后积分，有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\left[\int_0^L(S^k+I^k)\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{d}t}+(k-1)\int_0^L[d_SS_x^2S^{k-2}+d_II_x^2I^{k-2}]\mathrm{d}x=\\&\int_0^L\left[\beta(x)\frac{SI^k}{m+S+I}-\beta(x)\frac{S^kI}{m+S+I}+\gamma(x)S^{k-1}I-\gamma(x)I^k+S^{k-1}(\Lambda(x)-a(x)S)\right]\mathrm{d}x+\\&\left(\frac{k-1}{k}-1\right)qS^k(L,t)+\left(\frac{k-1}{k}-1\right)qI^k(L,t)-\frac{k-1}{k}q[S^k(0,t)+I^k(0,t)]\leqslant\\&\int_0^L[\beta^*SI^{k-1}+\gamma^*S^{k-1}I-\gamma_*I^k+\Lambda^*S^{k-1}-a_*S^k]\mathrm{d}x\leqslant\\&\int_0^L[\beta^*(\varepsilon'I^k+C(\varepsilon',k)S^k)]\mathrm{d}x+\int_0^L[\gamma^*(\varepsilon'I^k+C(\varepsilon',k)S^k)]\mathrm{d}x-\gamma_*\int_0^LI^k\mathrm{d}x-a_*\int_0^LS^k\mathrm{d}x+\\&\Lambda^*\int_0^LS^{k-1}\mathrm{d}x=\\&[(\beta^*+\gamma^*)\varepsilon'-\gamma_*]\int_0^LI^k\mathrm{d}x+[(\beta^*+\gamma^*)C(\varepsilon',k)-a_*]\int_0^LS^k\mathrm{d}x+\Lambda^*\int_0^LS^{k-1}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

取合适的 $\varepsilon',\varepsilon>0$ 满足 $(\beta^*+\gamma^*)\varepsilon'-\gamma_*=(\beta^*+\gamma^*)C(\varepsilon',k)-a_*=-\frac{\gamma_*}{2}$. 由归纳假设，存在 $C>0$，使得

$$\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}\left[\int_0^L(S^k+I^k)\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{d}t}\leqslant C-\frac{\gamma_*}{2}\int_0^L(S^k+I^k)\mathrm{d}x$$

由 Gronwall 不等式，

$$\int_0^L(S^k+I^k)\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{-\frac{\gamma_*k}{2}t}\int_0^L(S_0^k(x)+I_0^k(x))\mathrm{d}x+\frac{2C}{\gamma_*}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_*k}{2}t}),\ \forall t\geqslant 0\tag{3}$$

则(2) 式对 k 成立. 再由(3) 式，存在某个正数 M，使得

$$\|S(\cdot,t)+I(\cdot,t)\|_{L^k((0,L))}\leqslant M\left[\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_*}{2}t}\|S_0(x)+I_0(x)\|_{L^k((0,L))}+\sqrt[k]{\frac{2C}{\gamma_*}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_*k}{2}t})}\right]$$

令 $k\to\infty$，有

$$\|S(\cdot,t)+I(\cdot,t)\ \|_{L^\infty((0,L))}\leqslant M\,[\mathrm{e}^{-\frac{\gamma_*}{2}t}\|S_0(x)+I_0(x))\|_{L^\infty((0,L))}+1]$$

从而，系统(1) 的解一致有界且全局存在.

2 无病平衡点的存在唯一性和稳定性

记系统(1) 对应稳态系统的无病平衡点为 DFE($\hat{S}$，0)，流行病平衡点为 EE. 我们首先证明 DFE 的存在唯一性.

定理 2 系统(1) 的无病平衡点 DFE($\hat{S}$，0) 存在且唯一.

证 DFE($\hat{S}$，0) 的存在唯一性等价于系统

$$\begin{cases}d_SS_{xx}-qS_x+\Lambda(x)-a(x)S=0,\ 0<x<L\\d_SS_x(0)-qS(0)=0\\S_x(L)=0\end{cases}\tag{4}$$

正解的存在唯一性. 作变换 $\widetilde{S}=\mathrm{e}^{-\frac{qx}{d_S}}S$，则 $\widetilde{S}$ 满足

$$\begin{cases}d_S\widetilde{S}_{xx}+q\widetilde{S}_x+\Lambda(x)\mathrm{e}^{-\frac{qx}{d_S}}-a(x)\widetilde{S}=0,\ 0<x<L\\ \widetilde{S}_x(0)=0\\ d_S\widetilde{S}_x(L)+q\widetilde{S}(L)=0\end{cases}\tag{5}$$

注意到 $a(x)>0$，则特征值问题

$$\begin{cases}d_S\varnothing_{xx}+q\varnothing_x-a(x)\varnothing=\mu\varnothing,\ 0<x<L\\ \varnothing_x(0)=0\\ d_S\varnothing_x(L)+q\varnothing(L)=0\end{cases}$$

的主特征值 $\mu_1<0$，其对应的主特征函数 $\varnothing_1>0$. 取 $\widetilde{S}_1=\dfrac{\max\{\Lambda(x)\ \mathrm{e}^{-\frac{qx}{d_S}}\}}{\min\{a(x)\}}$，$\widetilde{S}_2=\varepsilon\varnothing_1$，且 $\varepsilon\leqslant\min\left\{-\dfrac{\Lambda(x)\mathrm{e}^{-\frac{qx}{d_S}}}{\mu_1\varnothing_1}\right\}$ 为一个充分小的正数，使得 $\widetilde{S}_1>\widetilde{S}_2$. 不难发现，$\widetilde{S}_1$，$\widetilde{S}_2$ 是系统(5) 的一对上下解. 从而，系统(5) 存在正解. 设 $\widetilde{S}_*$，$\widetilde{S}_{**}$ 为系统(5) 的两个正解，则 $\widetilde{S}_*-\widetilde{S}_{**}$ 满足系统

$$\begin{cases}d_S\omega_{xx}+q\omega_x-a(x)\omega=0,\ 0<x<L\\ \omega_x(0)=0\\ d_S\omega_x(L)+q\omega(L)=0\end{cases}\tag{6}$$

由文献[14] 知，系统(6) 有唯一解 $\omega=0$. 故 $\widetilde{S}_*=\widetilde{S}_{**}$. 因此，DFE$(\hat{S},0)$ 存在且唯一.

接下来，研究 DFE 的稳定性. 系统(1) 对应的稳态系统在$(\hat{S},0)$ 处线性化对应的特征值问题为

$$\begin{cases}d_S\varphi_{xx}-q\varphi_x-a(x)\varphi+\left[\gamma(x)-\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}\right]\psi+\lambda\varphi=0,\ 0<x<L\\ d_I\psi_{xx}-q\psi_x+\left[\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}-\gamma(x)\right]\psi+\lambda\psi=0,\ 0<x<L\\ d_S\varphi_x(0)-q\varphi(0)=0,\ \varphi_x(L)=0\\ d_I\psi_x(0)-q\psi(0)=0,\ \psi_x(L)=0\end{cases}\tag{7}$$

考虑其无耦合的特征值问题

$$\begin{cases}d_I\psi_{xx}-q\psi_x+\left[\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}-\gamma(x)\right]\psi+\lambda\psi=0,\ 0<x<L\\ d_I\psi_x(0)-q\psi(0)=0\\ \psi_x(L)=0\end{cases}\tag{8}$$

由 Krein-Rutman 定理，特征值问题(8) 的主特征值(记作 λ_1) 是简单的，且对应正的主特征函数. 参考文献[1，9] 中基本再生数 R_0 的定义，考虑

$$\begin{cases}-d_I\xi_{xx}+q\xi_x+\gamma(x)\xi(x)=\dfrac{1}{R_0}\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}\xi(x),\ 0<x<L\\ d_I\xi_x(0)-q\xi(0)=0\\ \xi_x(L)=0\end{cases}\tag{9}$$

作变换 $\zeta(x)=\mathrm{e}^{-\frac{qx}{d_I}}\xi(x)$，则 $\zeta(x)$ 满足

$$\begin{cases}-d_I\zeta_{xx}-q\zeta_x+\gamma(x)\zeta(x)=\dfrac{1}{R_0}\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}\zeta(x),\ 0<x<L\\ \zeta_x(0)=0\\ d_I\zeta_x(L)+q\zeta(L)=0\end{cases}\tag{10}$$

由变分法可得 R_0 的表达式为

$$R_0(m, d_S, d_I, q) = \sup_{\substack{\zeta \in H^1((0, L)) \\ \zeta \neq 0}} \left\{ \frac{\int_0^L \beta(x) \frac{\hat{S}}{m+\hat{S}} \zeta^2 \mathrm{e}^{\frac{qx}{dI}} \mathrm{d}x}{q\zeta^2(L) \mathrm{e}^{\frac{qL}{dI}} + d_I \int_0^L \zeta_x^2 \mathrm{e}^{\frac{qx}{dI}} \mathrm{d}x + \int_0^L \gamma(x) \zeta^2 \mathrm{e}^{\frac{qx}{dI}} \mathrm{d}x} \right\}$$

参考文献[9]的引理2.2，经过简单的计算可得 λ_1 与 R_0 有如下关系：

引理1 对任意的 $d_S, d_I, q, m > 0$，有 $\frac{1}{R_0} - 1$ 与 λ_1 同号.

证 对特征值问题(8)中的 $\psi(x)$ 作变换 $\eta(x) = \mathrm{e}^{-\frac{qx}{dI}} \psi(x)$，则 $\eta(x)$ 满足

$$\begin{cases} d_I \eta_{xx} + q\eta_x + \left[\beta(x) \frac{\hat{S}}{m+\hat{S}} - \gamma(x) \right] \eta + \lambda_1 \eta = 0, \ 0 < x < L \\ \eta_x(0) = 0 \\ d_I \eta_x(L) + q\eta(L) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

方程(11)的两边同乘以 $\xi(x)$ 后进行 $(0, L)$ 上的积分，与方程(9)两边同乘以 $\eta(x)$ 后进行 $(0, L)$ 上的积分作差得

$$\left(\frac{1}{R_0} - 1 \right) \int_0^L \beta(x) \frac{\hat{S}}{m+\hat{S}} \xi\eta \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_0^L \xi\eta \mathrm{d}x$$

因为 $\int_0^L \xi\eta \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^L \beta(x) \frac{\hat{S}}{m+\hat{S}} \xi\eta \mathrm{d}x$ 为正，所以 $\frac{1}{R_0} - 1$ 与 λ_1 同号.

于是，DFE的稳定性可由 R_0 决定. 接下来，我们得到了DFE的稳定性.

定理3 若 $R_0 < 1$，则DFE线性稳定；若 $R_0 > 1$，则DFE不稳定.

证 设 $R_0 < 1$，σ 是特征值问题(7)的谱. 注意到 $\sigma = \sigma\{\psi = 0\} \cup \sigma\{\psi \neq 0\}$. 当 $\sigma\{\psi = 0\}$ 时，即考虑特征值问题

$$\begin{cases} d_S \varphi_{xx} - q\varphi_x - a(x)\varphi + \lambda\varphi = 0, \ 0 < x < L \\ d_S \varphi_x(0) - q\varphi(0) = 0 \\ \varphi_x(L) = 0 \end{cases} \tag{12}$$

由 $a(x) > 0$ 知特征值问题(12)的主特征值大于0. 因此，问题(12)的所有特征值 λ 满足

$$\inf\{\mathrm{Re}\,\lambda, \lambda \in \sigma\{\psi = 0\}\} > 0$$

当 $\sigma\{\psi \neq 0\}$ 时，只需考虑无耦合的特征值问题(8). 由引理1，问题(8)的主特征值 $\lambda_1 > 0$. 从而

$$\inf\{\mathrm{Re}\,\lambda, \lambda \in \sigma\{\psi \neq 0\}\} > 0$$

综上，$\inf\{\mathrm{Re}\,\lambda\} > 0$. 故当 $R_0 < 1$ 时DFE稳定.

设 $R_0 > 1$. 由引理1，特征值问题(8)的主特征值 $\lambda_1 < 0$. 对于特征值问题(7)，取 $\lambda = \lambda_1$ 且 $\psi = \psi_1$ 是 λ_1 在特征值问题(8)中对应的主特征函数. 此时，φ 在问题(7)中唯一可解，故存在问题(7)的非平凡解，使得 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$. 故当 $R_0 > 1$ 时，DFE不稳定.

注1 参考文献[5]的定理3.2可证：当 $\beta(x) < \gamma(x)$(此时，$R_0 < 1$)或 m 充分大时，DFE全局吸引. 从而，DFE全局渐近稳定.

3 系统(1)的一致持续性

上一节，证明了当 $R_0 < 1$ 时，DFE的局部稳定性. 本节将研究当 $R_0 > 1$ 时，系统(1)的一致持续性.

定理4 给定 (S_0, I_0)，若 $R_0 > 1$，则系统(1)一致持续：存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\liminf_{t \to \infty} S(x, t) \geqslant \varepsilon_0, \ \liminf_{t \to \infty} I(x, t) \geqslant \varepsilon_0$$

对 $x \in [0, L]$ 一致成立. 此外，系统(1)至少存在一个EE.

证　令 $E=C([0,L])$，$E^{+}=\{u(x)\in E \mid u(x)\geqslant 0,\ \forall x\in[0,L]\}$ 和 $U=E^{+}\times E^{+}$；令 $U_0=\{(S_0, I_0)\in U \mid I_0\not\equiv 0\}$ 和 $\partial U_0=\{(S_0, I_0)\in U \mid I_0\equiv 0\}$，则 $U=U_0\cup\partial U_0$，U_0 和 ∂U_0 分别是 U 的开、闭子集. 为证得该定理，我们将运用文献[15]的结论. 给定 (S_0, I_0)，系统(1)产生一个 U 到 U 上的半群 $T(t)$：$T(t)(S_0, I_0)=(S(\cdot, t), I(\cdot, t))$，$\forall t\geqslant 0$. 由定理 1，$T(t)$ 在 U 上点耗散. 由文献[11]的定理 21.2，$T(t)$ 是连续和紧的. 由强极大值原理，对 $t\geqslant 0$，有 $T(t)U_0\subseteq U_0$ 且 $T(t)\partial U_0\subseteq\partial U_0$. 令 $M_\partial\triangleq\{(S_0, I_0)\in\partial U_0 \mid T(t)(S_0, I_0)\in\partial U_0,\ \forall t\geqslant 0\}$，$\omega((S_0, I_0))$ 是 $\{T(t)(S_0, I_0) \mid t\geqslant 0\}$ 的 ω 极限集.

先证 $\bigcup_{(S_0, I_0)\in M_\partial}\omega((S_0, I_0))=\{(\hat{S}, 0)\}$. 事实上，对 $I_0\equiv 0$，则对任意的 $t\geqslant 0$，有 $I\equiv 0$ 及 S 满足

$$\begin{cases}S_t=d_S S_{xx}-qS_x+\Lambda(x)-a(x)S & 0<x<L,\ t>0\\ d_S S_x(0, t)-qS(0, t)=0, & t>0\\ S_x(L, t)=0 & t>0\\ S(x, 0)=S_0(x) & 0<x<L\end{cases}\tag{13}$$

由于系统(13)有唯一的正稳态解 $\hat{S}$ 且全局渐近稳定，则 $\lim\limits_{t\to\infty}S(x, t)=\hat{S}(x)$ 在 $[0, L]$ 上一致成立.

再证对任意的 $(S_0, I_0)\in U_0$，都存在 $\delta_0>0$，使得 $\limsup\limits_{t\to\infty}\|T(t)(S_0, I_0)-(\hat{S}(x), 0)\|\geqslant\delta_0$. 事实上，由引理 1，当 $R_0>1$ 时，$\lambda_1<0$. 由主特征值的连续性，存在 ε_0，使得 $\lambda_1(\varepsilon_0)<-\varepsilon_0<0$，其中 $\lambda_1(\varepsilon_0)$ 是问题

$$\begin{cases}-d_I\Psi_{xx}+q\Psi_x-\beta(x)\dfrac{\hat{S}-\varepsilon_0}{m+\hat{S}+2\varepsilon_0}\Psi+\gamma(x)\Psi=\lambda\Psi,\ 0<x<L\\ d_I\Psi_x(0)-q\Psi(0)=0\\ \Psi_x(L)=0\end{cases}$$

的主特征值，Ψ_0 为 $\lambda_1(\varepsilon_0)$ 对应的主特征函数. 固定 ε_0，假设对于任给的 $\varepsilon>0$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\|T(t)(S_0, I_0)-(\hat{S}, 0)\|<\varepsilon,\ \forall(S_0, I_0)\in U_0$$

取 $\varepsilon<\varepsilon_0$，存在 $T>0$，使得当 $t\geqslant T$ 时，有 $\hat{S}-\varepsilon_0<\hat{S}-\varepsilon<S(x, t)<\hat{S}+\varepsilon<\hat{S}+\varepsilon_0$，$0\leqslant I(x, t)<\varepsilon<\varepsilon_0$. 对上述 ε_0，不难发现 I 是

$$\begin{cases}\theta_t-d_I\theta_{xx}+q\theta_x-\beta(x)\dfrac{\hat{S}-\varepsilon_0}{m+\hat{S}+2\varepsilon_0}\theta+\gamma(x)\theta=0, & 0<x<L,\ t>T\\ d_I\theta_x(0)-q\theta(0)=0 & t>T\\ \theta_x(L)=0 & t>T\\ \theta(x, T)=I(x, T)\geqslant c\Psi(x, T), & 0<x<L\end{cases}\tag{14}$$

的上解. 若 $(S_0, I_0)\in U_0$，则 $S(\cdot, t)\gg 0$，$I(\cdot, t)\gg 0$，$\forall t\geqslant 0$. 不妨设 $(S_0, I_0)\in\mathrm{int}(E^{+})\times\mathrm{int}(E^{+})$，则存在 $c>0$，使得 $I(x, T)\geqslant c\Psi_0(x)$. 而 $c\mathrm{e}^{-\lambda_1(\varepsilon_0)t}\Psi_0(x)$ 是系统(14)的解. 因此，$I(x, t)\geqslant c\mathrm{e}^{-\lambda_1(\varepsilon_0)t}\Psi_0(x)\to\infty\ (t\to\infty)$ 在 $[0, L]$ 上一致成立，这与 I 有界矛盾，结论成立. 由以上两个结论可知，$(\hat{S}, 0)$ 是 T 在 U 中孤立的不变集，且 $W^S((\hat{S}, 0))\cap U_0=\varnothing$，其中 $W^S((\hat{S}, 0))$ 是 $(\hat{S}, 0)$ 在 T 上的稳定集. 结合文献[12]定理 3.3 类似的论述可得系统(1)的一致持续性. 此外，由文献[13]定理 1.3.7，一致持续性蕴含 EE 的存在性.

4　R_0 对 d_I 及 q 的依赖性

上述研究表明系统(1)解的性态主要由 R_0 决定，接下来我们将研究 R_0 的性质. 为了书写方便，将 $q=0$ 时的 R_0 记作 $\hat{R}_0=R_0(m, d_S, d_I, 0)$.

定理 5 设 $a'(x)-\dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)}\leqslant 0$. 固定 $d_I, d_S, m>0$，则 R_0 在 $[0,+\infty)$ 上关于 q 严格单调递减. 同时，$\lim\limits_{q\to 0}R_0=\hat{R}_0$，$\lim\limits_{q\to\infty}R_0=0$.

证 先证 $\hat{S}$ 在 $(0,L)$ 内关于 x 严格单调递增. 事实上，$\hat{S}$ 满足系统

$$\begin{cases} d_S\hat{S}_{xx}-q\hat{S}_x+\Lambda(x)-a(x)\hat{S}=0,\ 0<x<L \\ d_S\hat{S}_x(0)-q\hat{S}(0)=0 \\ \hat{S}_x(L)=0 \end{cases} \tag{15}$$

令 $u=\dfrac{\hat{S}_x}{\hat{S}}$，则 u 满足

$$\begin{cases} d_Su_{xx}+(2d_Su-q)u_x-\dfrac{\Lambda(x)}{\hat{S}(x)}u=a'(x)-\dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)},\ 0<x<L \\ u(0)=\dfrac{q}{d_S} \\ u(L)=0 \end{cases}$$

由极大值原理，当 $a'(x)-\dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)}\leqslant 0$ 时，有 $u>0$. 从而，$\hat{S}_x>0$，$x\in(0,L)$.

再证 $\hat{S}$ 在 $[0,+\infty)$ 上关于 q 严格单调递减. 事实上，在系统(15)两边同时对 q 求导得

$$\begin{cases} d_S(\hat{S}'_q)_{xx}-q(\hat{S}'_q)_x-a(x)\hat{S}'_q=\hat{S}_x,\ 0<x<L \\ d_S(\hat{S}'_q)_x(0)-q\hat{S}'_q(0)-\hat{S}(0)=0 \\ (\hat{S}'_q)_x(L)=0 \end{cases} \tag{16}$$

由于 $\hat{S}$ 在 $(0,L)$ 内关于 x 严格单调递增，所以当 $a'(x)-\dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)}\leqslant 0$ 时，有 $\hat{S}_x>0$. 故由极大值原理，$\hat{S}'_q<0$.

最后证 R_0 对 q 的单调性. 在系统(10)两边同时对 q 求导得

$$\begin{cases} d_I\zeta'_{xx}+\zeta_x+q\zeta'_x-\gamma(x)\zeta'=\dfrac{R'_0(q)}{R_0^2}\dfrac{\beta(x)\hat{S}}{m+\hat{S}}\zeta-\dfrac{1}{R_0}\dfrac{\beta(x)\hat{S}}{m+\hat{S}}\zeta'-\dfrac{1}{R_0}\dfrac{m\beta(x)\hat{S}'_q}{R_0(m+\hat{S})^2}\zeta,\ 0<x<L \\ \zeta'_x(0)=0 \\ d_I\zeta'_x(L)=-\zeta(L)-q\zeta'(L) \end{cases} \tag{17}$$

其中 ζ' 表示 ζ 对 q 的导函数. 系统(17)第一个方程两边同乘以 $e^{\frac{qx}{dI}}\zeta$ 后对 x 进行 $(0,L)$ 上的积分，与系统(10)第一个方程两边同乘以 $e^{\frac{qx}{dI}}\zeta'$ 后对 x 进行 $(0,L)$ 上的积分相减得

$$R'_0(q)=-R_0^2\frac{\dfrac{1}{2}e^{\frac{qL}{dI}}\zeta^2(L)+\dfrac{1}{2}\zeta^2(0)+\dfrac{q}{2d_I}\displaystyle\int_0^L e^{\frac{qx}{dI}}\zeta^2\mathrm{d}x-\dfrac{1}{R_0}\int_0^L e^{\frac{qx}{dI}}\beta(x)\dfrac{m\hat{S}'_q}{(m+\hat{S})^2}\zeta^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^L e^{\frac{qx}{dI}}\beta(x)\dfrac{\hat{S}}{m+\hat{S}}\zeta^2\mathrm{d}x}$$

由于 $\hat{S}$ 在 $[0,+\infty)$ 上关于 q 严格单调递减，所以 $\hat{S}'_q<0$. 从而，$R'_0(q)<0$，即 R_0 在 $[0,+\infty)$ 上关于 q 严格单调递减.

最后，由 R_0 对 q 的连续性可知，$\lim\limits_{q\to 0} R_0 = \hat{R}_0$. 再参考文献[10]中引理 4.9 的证明方法可得 $\lim\limits_{q\to\infty} R_0 = 0$.

注 2　特别地，若 $\Lambda(x)$，$a(x)$ 恒为正常数或 $a'(x) \leqslant 0$，$\Lambda'(x) \geqslant 0$，则满足以上定理 5 的条件，进而 R_0 在 $[0, +\infty)$ 上关于 q 严格单调递减，因此对流速度 q 的增加有利于传染病的控制.

定理 6　设 $a'(x) - \dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)} \leqslant 0$. 固定 m，$d_S > 0$，以下是 R_0 对 d_I，q 的依赖性：

(i) 若 $\int_0^L \beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} \mathrm{d}x > \int_0^L \gamma(x) \mathrm{d}x$，则存在唯一的阈值 $\bar{q}$，使得当 $0 < q < \bar{q}$ 时 $R_0 > 1$，当 $q > \bar{q}$ 时 $R_0 < 1$.

(ii) 若 $\int_0^L \beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} \mathrm{d}x < \int_0^L \gamma(x) \mathrm{d}x$，且 $\beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} - \gamma(x)$ 在 $(0, L)$ 内变号，则存在唯一的阈值 $d_I^* > 0$ 满足方程 $\hat{R}_0(d_I^*) = 1$，使得

(a) 对于 $d_I \in (0, d_I^*)$，存在唯一的阈值 $\tilde{q}$，使得当 $0 < q < \tilde{q}$ 时 $R_0 > 1$，当 $q > \tilde{q}$ 时 $R_0 < 1$；

(b) 对于 $d_I \in [d_I^*, \infty)$，对任意的 $q > 0$，有 $R_0 < 1$.

证　(i) 由定理 5，$\lim\limits_{q\to\infty} R_0 = 0$. 再由文献[5]的命题 2.3，若 $\int_0^L \beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} \mathrm{d}x > \int_0^L \gamma(x) \mathrm{d}x$，则 $\lim\limits_{q\to 0} R_0 = \hat{R}_0 > 1$. 因此，至少存在一个阈值 $\bar{q} > 0$，使得 $R_0(\bar{q}) = 1$. 由定理 5 知，当 $a'(x) - \dfrac{\Lambda'(x)}{\hat{S}(x)} \leqslant 0$ 时 $R'_0(q) < 0$. 从而 $\bar{q}$ 是 $R_0(q) = 1$ 唯一的根.

(ii) 由定理 5，$R'_0(q) < 0$ 且 $\lim\limits_{q\to\infty} R_0 = 0$. 由文献[5]的命题 2.3，若 $\int_0^L \beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} \mathrm{d}x < \int_0^L \gamma(x) \mathrm{d}x$，且 $\beta(x) \dfrac{\hat{S}(x)}{m + \hat{S}(x)} - \gamma(x)$ 在 $(0, L)$ 内变号，则当 $d_I \in (0, d_I^*)$ 时 $\lim\limits_{q\to 0} R_0 = \hat{R}_0 > 1$，当 $d_I \in [d_I^*, \infty)$ 时 $\lim\limits_{q\to 0} R_0 = \hat{R}_0 < 1$. 对于 $d_I \in (0, d_I^*)$，存在阈值 $\tilde{q} > 0$，使得当 $0 < q < \tilde{q}$ 时 $R_0 > 1$，当 $q > \tilde{q}$ 时 $R_0 < 1$. 对于 $d_I \in [d_I^*, \infty)$，则不存在这样的 $q^* > 0$ 满足 $R_0(q^*) = 1$. 即对任意 $q \geqslant 0$，有 $R_0 < 1$.

注 3　对比文献[5]的命题 2.3 中 $\hat{R}_0$ 的性质，我们发现在开放对流环境下，对流率 q 使得基本再生数的性质发生显著变化. 首先在风险较高的区域，当 q 充分大时，$R_0 < 1$. 其次在低风险区域，即使当 d_I 较小时，只要 q 充分大，仍然有 $R_0 < 1$. 综上可知，在开放对流环境下，对流率的增加有利于疾病的控制.

5　结论

本文研究了一个开放对流环境下服从频率依赖发生率和带有外源输入的 SIS 模型，证得了解的一致有界性和全局存在性，论证了基本再生数 R_0 是系统(1)动力学行为的一个阈值，发现在一定条件下 R_0 关于 q 单调递减，且定理 6 表明在开放对流环境下，对流速度 q 的增加有助于传染病的控制. 但当 $R_0 < 1$ 时，DFE 的全局稳定性仍是一个具有挑战性的难题. 同时，本文仅讨论了流行病平衡点的存在性，实际上，流行病平衡点的渐近行为也是一个值得进一步研究的问题.

参考文献：

[1]　ALLEN L J S, BOLKER B M, LOU Y, et al. Asymptotic Profiles of the Steady States for an SIS Epidemic Reaction-Diffusion Model [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 2008, 21(1): 1-20.

[2]　LI H C, PENG R, WANG F B. Varying Total Population Enhances Disease Persistence: Qualitative Analysis on a Diffu-

sive SIS Epidemic Model [J]. Journal of Differential Equations, 2017, 262(2): 885-913.

[3] LI B, LI H C, TONG Y C. Analysis on a Diffusive SIS Epidemic Model with Logistic Source [J]. Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Physik, 2017, 68(4): 1-25.

[4] DENG K, WU Y X. Dynamics of a Susceptible-Infected-Susceptible Epidemic Reaction-Diffusion Model [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics, 2016, 146(5): 929-946.

[5] SUO J Z, LI B. Analysis on a Diffusive SIS Epidemic System with Linear Source and Frequency-Dependent Incidence Function in a Heterogeneous Environment [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2019, 17(1): 418-441.

[6] 何楠，王稳地，周爱蓉，等. 基于饱和发生率的随机HIV模型的动力学研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2018, 40(3): 109-114.

[7] 付瑞，王稳地，陈虹燕，等. 一类考虑饱和发生率的HIV感染模型的稳定性分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2015, 37(3): 76-81.

[8] 张晋珠，梁娟，苏铁熊. 一类具有饱和发生率的虫媒传染病模型研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(3): 88-93.

[9] CUI R H, LOU Y. A Spatial SIS Model in Advective Heterogeneous Environments [J]. Journal of Differential Equations, 2016, 261(6): 3305-3343.

[10] LOU Y, LUTSCHER F. Evolution of Dispersal in Open Advective Environments [J]. Journal of Mathematical Biology, 2014, 69(6-7): 1319-1342.

[11] ARSCOTT F M. Periodic-Parabolic Boundary Value Problems and Positivity [J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 1992, 24(6): 619-620.

[12] SUN X Y, CUI R H. Analysis on a Diffusive SIS Epidemic Model with Saturated Incidence Rate and Linear Source in a Heterogeneous Environment [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2020, 490(1): 124212.

[13] ZHAO X Q. Dynamical Systems in Population Biology [M]. New York: Springer, 2003.

[14] COSNER C, LOU Y. Does Movement Toward Better Environments always Benefit a Population? [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 277(2): 489-503.

[15] MAGAL P, ZHAO X Q. Global Attractors and Steady States for Uniformly Persistent Dynamical Systems [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2005, 37(1): 251-275.

责任编辑　张枸