第 48 卷 第 3 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 3 月
Vol. 48 No. 3 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Mar. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.03.009

基于正则变换条件下的尾部失真风险度量的渐近行为[①]

李昱萱， 陈守全

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 本文对在正则变换条件下的失真风险度量的尾部进行了讨论，得到了该尾部失真风险度量的一些渐近性质.

关 键 词： 极值理论；失真风险度量；尾部失真风险度量；极值吸引场；广义正则变换

中图分类号：O211.4 **文献标志码：A** **文章编号：** 1000-5471(2023)03-0061-05

Asymptotic Behavior of Tail Distortion Risk Measures Based on Regular Transformation Conditions

LI Yuxuan， CHEN Shouquan

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract: In this paper, we discuss the tail of the distortion risk measure under the regular transformation condition and obtain some asymptotic properties of this tail distortion risk measure.

Key words: extremum theory; distortion risk measure; tail distortion risk measure; extremal attractor field; generalized regular transform

“风险”一词本身是带有中性色彩的，它表示一种不确定性. 风险度量的存在就是通过客观建立的一种规则，使得每一个可能的风险都可以通过一个具体的数值表示出来，即风险度量的值. 为了满足人们在不同条件背景，不同时期对风险度量的不同要求，学者们对于度量风险的方法一直不断地推陈出新. 其中失真风险度量相对来说具有许多良好的性质. 它是基于某个具有一定性质的失真函数通过一定变换而得到的一类新的风险度量. 在实际应用中，重尾分布的尾部通常会携带大量重要的信息，因此重尾的极端现象一旦发生会造成非同寻常的影响. 极端事件从统计角度甚至可以认为不会发生，但是在风险管理中具有极其重要的研究意义，因此，尾部失真风险度量的研究就变得极为重要和有价值.

文献[1]对随机权重的次序统计量线性和条件下的尾部失真风险度量的渐近性质进行了讨论；文献[2]给出了尾部失真风险度量的稳健估计；文献[3]提出了一种构造 Wang 失真风险度量的极端类似物的方法；文献[4]给出了失真风险度量的定义. 即 Wang 风险度量；文献[5]首次引入了 p 水平下的失真风险度量，即尾部失真风险度量，并证明了连续损失变量的尾部失真风险度量仍然属于风险度量；文献[6-7]介绍了极

① 收稿日期：2022-03-08
作者简介：李昱萱，硕士研究生，主要从事极值统计的研究.
通信作者：陈守全，博士，副教授.

值理论的相关知识，这是讨论风险度量尾部渐近性质的理论基础；文献[8]引入分位数给出了新的关于失真风险度量的定义，方便寻找其估计量.文献[9]利用极值统计方法对重尾失真风险度量进行了实证估计，并提出一种针对估计量的降偏方法；文献[10]主要研究了在险价值 VaR 的尾渐近性和次可加性；文献[11]在帕累托经典模型下利用极大似然估计法和矩估计法得到了一些常见风险度量的估计；文献[12]对失真风险度量从定义、性质以及与随机序列之间的关系等多方面的研究进行概括和总结；文献[13-16]介绍了极值理论和重尾分布下找寻估计量的方法.本文主要讨论了基于正则变换条件下尾部失真风险度量的一阶渐近.

1 预备知识

设 X 是 $\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ 上的随机变量，其分布函数为 $F_X(x)$.给定一个单调非减的右连续函数 $g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 且满足 $g(0)=0$，$g(1)=1$，则与失真函数 g 相关的随机变量 X 的失真风险度量[4]可定义为：

$$R_g(X)=\int_{-\infty}^{0}[g(\bar{F}_X(x))-1]\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}g(\bar{F}_X(x))\mathrm{d}x$$

其中 $\bar{F}_X(x):=1-F_X(x)$ 是随机变量 X 的生存函数(右尾函数).

文献[5]首次提出 p 水平下的尾部失真风险度量，其方法是用失真函数 $g(\cdot)$ 引出一个新的失真函数 $g_p(\cdot)$，两者之间的关系为

$$g_p(u)=\begin{cases}g\left(\dfrac{u}{1-p}\right),\ 0\leqslant u\leqslant 1-p\\ 1,\ 1-p\leqslant u\leqslant 1\end{cases}$$

其中参数 $p\in(0,1)$ 表示置信水平，并且证明了连续损失变量 X 的尾部失真风险度量仍然是一个失真风险度量.

在实际应用中，失真风险度量应当同时考虑损失和利润两个方面，文献[5]提出的 p 水平下的尾部失真风险度量只关注了损失而未将利润考虑进去.因此，综合损失与利润两个方面，风险变量 X 的 p 水平下的尾部失真风险度量定义如下

$$R_p(X)=\int_{-\infty}^{0}[g_p(\bar{F}_X(x))-1]\mathrm{d}x+\int_{0}^{\infty}g_p(\bar{F}_X(x))\mathrm{d}x$$

注意，当风险变量 X 连续时，该定义与文献[5]中给出的定义意义相同.

在尾部失真风险度量的定义中，参数 p 清楚地代表了置信水平.正是由于风险的尾部区域对应着重大损失，它的发生往往伴随着灾难性的后果.如今，人们热衷于度量风险的尾部区域.因此，在本文中，我们将研究当 $p\to 1$ 时尾部失真风险度量的渐近行为.从这个角度来看，使用极值理论是合适的.

极值理论通常把随机样本或者随机样本中极端事件发生的概率作为主要的研究对象并且视为统计推断中的主要依据.本文所要体现的是极值理论在风险度量中的应用，用极值理论的方法来拟合金融数据有两个明显优势：① 能够针对资产收益的尾部进行很好的刻画，得到的近似分布也更加贴近实际情况；② 该方法只关注尾部分布而不用考虑整体分布的情况，因此减少了模型选用不当的风险.

设 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 是一列独立同分布的随机变量序列，其累积分布函数是 $F(x)$，记 $M_n=\max\{X_i,1\leqslant i\leqslant n\}$ 为 $\{X_n,n\geqslant 1\}$ 的最大值.如果存在赋范化常数 $a_n>0$ 和 b_n，使得对一非退化分布函数 G 中所有连续点 x，都有

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}P\left\{\frac{M_n-b_n}{a_n}\right\}=F^n(a_nx+b_n)=G_\gamma(x)$$

那么，就称 $F(x)$ 属于 G 的吸引场，记为 $F\in D(G)$.由文献[6-7]可知 G 有3种类型.在同类意义下，这3种类型可统一写为广义极值分布

$$G_\gamma(x)=\exp(-(1+\gamma x)^{-\frac{1}{\gamma}}),\ 1+\gamma x\geqslant 0$$

其中 $\gamma\in\mathbb{R}$，称 γ 为极值指数.

由于本文讨论的一阶渐近行为是建立在3种吸引场情况上的，因此我们用广义正则变换的概念对这

3 种吸引场进行统一描述. 对于一个正可测函数 $f(\cdot)$，有指数 $\gamma \in \mathbb{R}$，如果存在一个辅助函数 $a(\cdot) > 0$，对所有的 $x > 0$ 都满足

$$\lim_{t \to \infty} \frac{f(tx) - f(t)}{a(t)} = \frac{x^{\gamma} - 1}{\gamma}$$

则定义正可测函数 $f(\cdot)$ 是指数为 γ 的广义正则变换，记为 $f(\cdot) \in ERV_{\gamma}$.

在下文中我们假定函数 $U(t) = \left(\frac{1}{1-F}\right)^{\leftarrow}(t) = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{t}\right)$，$t \geqslant 1$ 是指数为 $\gamma \in \mathbb{R}$ 的广义正则变换(记为 $U \in ERV_{\gamma}$)，其一阶辅助函数为 $a_0(\cdot) > 0$ ，其中 $F^{\leftarrow}(x) = \inf\{y: F(y) \geqslant x\}$ 是 F 的广义逆函数.

通过文献[8] 中的定理 6 可以将 $R_p(X)$ 重新定义为：

$$R_p(X) = \int_0^1 F^{\leftarrow}(1-s) \mathrm{d}g_p(s) = \int_0^1 U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right) \mathrm{d}g(s) \tag{1}$$

此关系式将是我们推导 $R_p(X)$ 渐近行为的起点.

从关系式(1) 中我们可以看出，当 $p \to 1$ 时当且仅当 $R_p(X) \to F^{\leftarrow}(1)$，并且我们假设 $P(X = F^{\leftarrow}(1)) = 0$，否则当 p 趋近于 1 时，$R_p(X) = F^{\leftarrow}(1)$. 对于一个分布函数为 F 的风险变量 X，我们考虑其分布函数是来自极值分布的三大吸引场的最大吸引域.

当上端点 $F^{\leftarrow}(1) = \infty$ 时，积分

$$\int_0^1 \frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right) - U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} \mathrm{d}g(s) = \frac{R_p(X)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} - \frac{U\left(\frac{1}{1-P}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} = \frac{R_p(X)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} - \frac{F^{\leftarrow}(p)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}$$

通过等式左右两边变换可以得到 $R_p(X)$ 的展开式即

$$R_p(X) = F^{\leftarrow}(p) + a_0\left(\frac{1}{1-p}\right) \int_0^1 \frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right) - U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} \mathrm{d}g(s) \tag{2}$$

因此我们研究 $R_p(X)$ 在 $p \to 1$ 时的渐近行为，进一步可以归结为讨论在 $p \to 1$ 时积分

$$\int_0^1 \frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right) - U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} \mathrm{d}g(s) \tag{3}$$

的收敛性.

同理可得，当上端点 $F^{\leftarrow}(1) < \infty$ 时，我们研究 $F^{\leftarrow}(1) - R_p(X)$ 在 $p \to 1$ 时的渐近行为，进一步可以归结为讨论在 $p \to 1$ 时积分

$$\int_0^1 \frac{\left[F^{\leftarrow}(1) - U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)\right] - \left[F^{\leftarrow}(1) - U\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)} \mathrm{d}g(s) \tag{4}$$

的收敛性.

下面给出本文的主要结果.

2　主要结论及其证明

定理 1　假设条件 $U \in ERV_{\gamma}$ 成立，在重尾($\gamma \geqslant 0$) 情况下，存在 $\eta > 0$，使得积分 $\int_1^{\infty} g\left(x^{-\frac{1}{\gamma+\eta}}\right) \mathrm{d}x$ 存在，那么：

1) 当上端点 $F^{\leftarrow}(1) = \infty$ 时，

$$\lim_{p\to1}\int_0^1 \frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)-U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}\mathrm{d}g(s)=\int_0^1 \frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)$$

2) 当上端点 $F^{\leftarrow}(1)<\infty$ 时,

$$\lim_{p\to1}\int_0^1 \frac{\left[F^{\leftarrow}(1)-U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)\right]-\left[F^{\leftarrow}(1)-U\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}\mathrm{d}g(s)=-\int_0^1 \frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)$$

证 根据文献[6]中的定理B.2.18,可以得到在重尾($\gamma\geqslant0$)情况下,对于任意 $\varepsilon,\delta>0$,存在 $0<p_0=p_0(\delta)<1$,其中 $p_0\leqslant p\leqslant1$,$0<s<1$,

$$\left|\frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)-U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}-\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\right|\leqslant\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\delta}$$

为得到积分(3)和(4)的收敛值,我们还需验证下面两个不等式成立:存在 $\delta>0$,

$$\int_0^1\left(\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\delta}\mathrm{d}g(s)<\infty \tag{5}$$

$$\int_0^1\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)<\infty \tag{6}$$

a) 当 $\gamma=0$ 时:利用条件$\int_1^\infty g\left(x^{-\frac{1}{\gamma+\eta}}\right)\mathrm{d}x<\infty$ 和分部积分法,得到

$$\int_0^1\left(\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\delta}\mathrm{d}g(s)=\int_0^1\left(\frac{1}{s}\right)^{\delta}\mathrm{d}g(s)=1-\int_1^\infty g(s)\mathrm{d}s^{-\delta}=1-\int_1^\infty g\left(x^{-\frac{1}{\delta}}\right)\mathrm{d}x<\infty$$

即不等式(5)成立;应用勒贝格控制收敛定理,得到

$$\lim_{\gamma\to0}\int_0^1\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)=\int_0^1\lim_{\gamma\to0}\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)=\int_0^1\ln s^{-1}\mathrm{d}g(s)\leqslant\int_0^1 s^{-\delta}\mathrm{d}g(s)<\infty$$

即不等式(6)成立(最后一步成立是由于当 $\gamma=0$ 时不等式(5)成立).

b) 当 $\gamma>0$ 时:取 $\delta=-\frac{\gamma}{2}$,得到

$$\int_0^1\left(\frac{1}{s}\right)^{\gamma+\delta}\mathrm{d}g(s)=\int_0^1 s^{-\frac{\gamma}{2}}\mathrm{d}g(s)<\infty$$

即不等式(5)成立;由于 $-\frac{1}{\gamma}<-\frac{1}{\gamma+\delta}$ 一定成立,因此得到

$$\int_0^1\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)=\frac{1}{\gamma}\left(\int_0^1 s^{-\gamma}\,\mathrm{d}g(s)-1\right)=\frac{1}{\gamma}\int_1^\infty g\left(x^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{\gamma}\int_1^\infty g\left(x^{-\frac{1}{\gamma+\delta}}\right)\mathrm{d}x<\infty$$

即不等式(6)成立.

最后应用勒贝格控制收敛定理即可证得.

定理 2 假设条件 $P(X=F^{\leftarrow}(1))=0$ 成立,在重尾($\gamma\geqslant0$)情况下,存在 $\eta>0$,使得积分$\int_1^\infty g\left(x^{-\frac{1}{\gamma+\eta}}\right)\mathrm{d}x$ 存在,可得到尾部失真风险度量 $R_p(X)$ 的一阶渐近结果如下所示:

1) 当上端点 $F^{\leftarrow}(1)=\infty$ 时,

$$\lim_{p\to1}R_p(X)=F^{\leftarrow}(p)+a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)\int_0^1\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)$$

2) 当上端点 $F^{\leftarrow}(1)<\infty$ 时,

$$\lim_{p\to1}[F^{\leftarrow}(1)-R_p(X)]=[F^{\leftarrow}(1)-F^{\leftarrow}(p)]-a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)\int_0^1\frac{s^{-\gamma}-1}{\gamma}\mathrm{d}g(s)$$

证 前文中已得到 $R_p(X)$ 的展开式,即

1）当上端点 $F^{\leftarrow}(1)=\infty$ 时，

$$R_p(X)=F^{\leftarrow}(p)+a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)\int_0^1\frac{U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)-U\left(\frac{1}{1-p}\right)}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}\mathrm{d}g(s)$$

2）当上端点 $F^{\leftarrow}(1)<\infty$ 时，

$$[F^{\leftarrow}(1)-R_p(X)]=[F^{\leftarrow}(1)-F^{\leftarrow}(p)]-a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)\int_0^1\frac{\left[F^{\leftarrow}(1)-U\left(\frac{1}{s(1-p)}\right)\right]-\left[F^{\leftarrow}(1)-U\left(\frac{1}{1-p}\right)\right]}{a_0\left(\frac{1}{1-p}\right)}\mathrm{d}g(s)$$

再由定理 1 即可证得.

参考文献：

[1] 邹沛清，陈守全. 基于线性和条件下的失真风险测度尾部渐近性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2019，41(1)：72-77.

[2] ZOUBIR B B K，ZOUBIR B B K. Robust Estimator of Distortion Risk Premiums for Heavy-Tailed Losses [J]. Afrika Statistika，2016，11(1)：869-882.

[3] EL METHNI J，STUPFLER G. Extreme Versions of Wang Risk Measures and Their Estimation for Heavy-Tailed Distributions [J]. Statistica Sinica，2017，27(2)：907-930.

[4] WANG S. Premium Calculation by Transforming the Layer Premium Density [J]. ASTIN Bulletin，1996，26(1)：71-92.

[5] ZHU L，LI H J. Tail Distortion Risk and Its Asymptotic Analysis [J]. Insurance：Mathematics and Economics，2012，51(1)：115-121.

[6] DE HAAN L，FERREIRA A. Extreme Value Theory [M]. New York：Springer New York，2006.

[7] RESNICK S I. Point Processes [M]//Extreme Values，Regular Variation and Point Processes. New York：Springer，1987：123-161.

[8] DHAENE J，KUKUSH A，LINDERS D，et al. Remarks on Quantiles and Distortion Risk Measures [J]. European Actuarial Journal，2012，2(2)：319-328.

[9] DEME E H，ALLAYA M M，DEME S，et al. Estimation of Risk Measures from Heavy Tailed Distributions [J]. Far East Journal of Theoretical Statistics，2021，62(1)：35-80.

[10] YIN C C，ZHU D. New Class of Distortion Risk Measures and Their Tail Asymptotics with Emphasis on VaR [J]. Journal of Financial Risk Management，2018，7(1)：12-38.

[11] 温利民，李俊雪，王正武，等. 在帕累托模型中风险度量的统计分析 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版)，2021，45(2)：211-216.

[12] 贾佳. 失真风险度量 [D]. 合肥：中国科学技术大学，2009.

[13] 彭作祥. 一类 Hill 型估计量的收敛性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，1998，23(2)：133-137.

[14] 伍度志，胡爱平，彭作祥. 一类位置不变的 Hill 型估计量的渐近性质 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2009，46(3)：553-555.

[15] 张绿云，陈守全. 一类重尾极值指数估计 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(3)：89-94.

[16] 刘洋，彭作祥. 重尾指数估计量及其伪估计量的渐近关系 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(7)：70-76.

责任编辑　张　枸