第 48 卷　第 4 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2023 年 4 月
Vol. 48　No. 4　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　Apr.　2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.04.004

三元变系数 Euler 函数非线性方程的正整数解①

戴妍百，　高丽

延安大学 数学与计算机科学学院，陕西 延安 716000

摘要：利用欧拉函数的性质与初等数论的方法，讨论了三元变系数 Euler 函数非线性方程 $\varphi(xyz)=a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)-m$，当$(a, b, c)=(2, 3, 4)$，$m=8$ 时的正整数解情况，并证明了该方程共有 32 组正整数解.

关　键　词：Euler 函数；非线性方程；正整数解

中图分类号：O156　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)04－0032－05

Positive Integer Solutions of Nonlinear Equations of Ternary Variable Coefficients Euler Functions

DAI Yanbai,　GAO Li

School of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China

Abstract: Using the properties of Euler's function and the method of elementary number theory, in this paper, we discuss the positive integer solutions of nonlinear equation of the ternary variable coefficient function $\varphi(xyz)=a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)-m$, when $(a, b, c)=(2, 3, 4)$, $m=8$. We prove that the equation has 32 groups of positive integer solutions.

Key words: Euler function; non-linear equation; positive integer solution

对于任意正整数 n，欧拉函数 $\varphi(n)$ 定义为不大于 n 且与 n 互素的正整数的个数. 欧拉函数在数论中有着重要的作用，有关欧拉函数的性质以及欧拉方程引起了很多学者的研究兴趣[1-3].

近年来，文献[1,4-12]分别讨论了当$k=2,3,4,5,6,7,8,9,11,12$时，欧拉方程$\varphi(xy)=k(\varphi(x)+\varphi(y))$的可解性问题. 对于二元变系数欧拉函数方程$\varphi(xy)=m\varphi(x)+n\varphi(y)$，文献[13]讨论了当$m=5$，$n=7$时的可解性问题，文献[14]讨论了当$m=7$，$n=9$时的可解性问题. 文献[15-17]分别讨论了当$k=3,4,5$时，三元欧拉函数方程$\varphi(xyz)=k(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z))$的全部正整数解. 对于含常数的二元变系数方程$\varphi(xy)=k_1\varphi(x)+k_2\varphi(y)+k$，文献[18-19]利用整数的分解性质讨论了$(k_1, k_2, k)=(7, 8, 16)$，$(4, 7, 28)$时的可解性问题. 文献[20]讨论了$k=6,28$时三元变系数方程$\varphi(xyz)=2\varphi(x)+3\varphi(y)+4\varphi(z)-k$的可解性问题. 本文利用欧拉函数的性质与初等数论方法，讨论并证明了

① 收稿日期：2022－08－12
基金项目：国家自然科学基金项目(11471007)；陕西省科技厅科学技术研究发展计划项目(2013JQ1019)；延安大学研究生教改研究项目(YDYJG2018022)；延安大学研究生创新计划项目(YCX2021055).
作者简介：戴妍百，硕士研究生，主要从事数论方面的研究.
通信作者：高丽，教授.

$$\varphi(xyz)=a\varphi(x)+b\varphi(y)+c\varphi(z)-m$$

当$(a, b, c)=(2, 3, 4)$且$m=8$时正整数解的情况，并给出了该欧拉方程的全部正整数解.

引理 1[21]（$\varphi(m)$ 的乘积公式）　对 $m>1$，我们有

$$\varphi(m)=m\prod_{p\mid m}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

其中，p 是 m 的素因数.

引理 2[21]　欧拉函数 $\varphi(m)$ 具有下列性质：

(i) 对任意的正整数 m, n，有 $\varphi(mn)=\dfrac{(m, n)\varphi(n)\varphi(m)}{\varphi((m, n))}$；

(ii) 当$(m, n)=1$时，$\varphi(mn)=\varphi(m)\varphi(n)$；

(iii) 当 $m\geqslant 3$ 时，$\varphi(m)$ 必为偶数.

定理 1　欧拉方程 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)+3\varphi(y)+4\varphi(z)-8$ 一共有 32 组正整数解，分别为：

$(x, y, z)=(1, 7, 9)$，$(1, 7, 18)$，$(1, 9, 7)$，$(1, 9, 14)$，$(1, 14, 9)$，$(1, 18, 7)$，$(2, 7, 9)$，$(2, 9, 7)$，$(2, 12, 4)$，$(1, 11, 8)$，$(1, 11, 10)$，$(2, 11, 5)$，$(3, 12, 1)$，$(3, 5, 4)$，$(4, 5, 3)$，$(1, 4, 2)$，$(1, 6, 2)$，$(2, 3, 2)$，$(2, 4, 1)$，$(2, 6, 1)$，$(3, 3, 1)$，$(3, 3, 2)$，$(3, 6, 1)$，$(6, 3, 1)$，$(1, 4, 4)$，$(1, 4, 6)$，$(2, 3, 4)$，$(2, 4, 3)$，$(5, 8, 1)$，$(5, 12, 1)$，$(8, 5, 1)$，$(12, 5, 1)$.

证　方程 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)+3\varphi(y)+4\varphi(z)-8$ 有正整数解的必要条件是

$$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)\leqslant 2$$

事实上，对于欧拉函数方程

$$\varphi(xyz)=2\varphi(x)+3\varphi(y)+4\varphi(z)-8 \tag{1}$$

利用欧拉函数的性质得

$$\varphi(xyz)=\frac{(x, yz)\varphi(x)\varphi(yz)}{\varphi((x, yz))}=\frac{(x, yz)(y, z)}{\varphi((x, yz))\varphi((y, z))}\varphi(x)\varphi(y)\varphi(z)$$

由引理 2 的(i)可知

$$\frac{(x, yz)(y, z)}{\varphi((x, yz))\varphi((y, z))}\geqslant 1$$

对(1)式进行化简，可得

$$2\varphi(x)+3\varphi(y)-8\geqslant(\varphi(x)\varphi(y)-4)\varphi(z)\geqslant\varphi(x)\varphi(y)-4$$

故有

$$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)\leqslant 2 \tag{2}$$

由上述过程可知，方程(1)有解时，(2)式必然成立. 故对二元一次不等式(2)进行讨论：

当$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)<0$时，有 $\varphi(x)=1, 2$，$\varphi(y)\geqslant 4$；或 $\varphi(x)\geqslant 4$，$\varphi(y)=1$.

当$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)=0$时，有 $\varphi(x)=3$ 或 $\varphi(y)=2$. 由引理 2 的(iii)知 $\varphi(x)=3$ 不存在，舍去.

当$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)=1$时，有 $\varphi(x)=4$，$\varphi(y)=3$；或 $\varphi(x)=2$，$\varphi(y)=1$. 由引理 2 的(iii)知 $\varphi(x)=4$，$\varphi(y)=3$ 不存在，舍去.

当$(\varphi(x)-3)(\varphi(y)-2)=2$时，有 $\varphi(x)=5$，$\varphi(y)=3$；或 $\varphi(x)=4$，$\varphi(y)=4$；或 $\varphi(x)=1$，$\varphi(y)=1$. 由引理 2 的(iii)知 $\varphi(x)=5$，$\varphi(y)=3$ 不存在，舍去.

综上所述，可得方程(1)有解的 7 种情况，下面进行分类讨论给出方程的解.

情况 1　当 $\varphi(x)=1$，$\varphi(y)\geqslant 4$ 时，代入方程(1)进行化简，得

$$(\varphi(y)-4)(\varphi(z)-3)\leqslant 6$$

情况 1.1　当 $\varphi(y)=4$ 时，方程(1)为 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)+6$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，$\varphi(xyz)=10$，即 $xyz=11,12$，又因为 $x=z=1,2$，$y=5,8,10,12$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=14$，这样的 x,y,z 不存在，因此方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=4$ 时，$\varphi(xyz)=22$，即 $xyz=23,46$，又因为 $x=1,2$，$y=z=5,8,10,12$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=6$ 时，$\varphi(xyz)=30$，即 $xyz=31,62$，又因为 $x=1,2$，$y=5,8,10,12$，$z=7,9,14,18$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=8$ 时，$\varphi(xyz)=38$，即这样的 x,y,z 不存在，因此方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)\geqslant 10$ 时，$\varphi(xyz)=4\varphi(z)+6$，将 $x=1,2$，$y=5,8,10,12$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)+6$ 且 $\varphi(z)\geqslant 10$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

情况 1.2　当 $\varphi(y)=6$ 时，此时 $\varphi(z)-3\leqslant 3$，即 $\varphi(z)=1,2,4,6$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，$\varphi(xyz)=16$，即 $xyz=17,32,34,40,48,60$，又因为 $x=z=1,2$，$y=7,9,14,18$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=20$，即 $xyz=25,33,44,50,66$，又因为 $x=1,2$，$y=7,9,14,18$，$z=3,4,6$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=4$ 时，$\varphi(xyz)=28$，即 $xyz=29,58$，又因为 $x=1,2$，$y=7,9,14,18$，$z=5,8,10,12$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=6$ 时，$\varphi(xyz)=36$，即 $xyz=37,57,63,74,76,108,114,126$，又因为 $x=1,2$，$y=z=7,9,14,18$，经检验，此时方程(1) 有解，为$(x,y,z)=(1,7,9)$，$(1,7,18)$，$(1,9,7)$，$(1,9,14)$，$(1,14,9)$，$(1,18,7)$，$(2,7,9)$，$(2,9,7)$.

情况 1.3　当 $\varphi(y)=8$ 时，此时 $\varphi(z)-3\leqslant 1$，即 $\varphi(z)=1,2,4$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，$\varphi(xyz)=22$，即 $xyz=23,46$，又因为 $x=z=1,2$，$y=15,16,20,24,30$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=26$，这样的 x,y,z 不存在，因此方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=4$ 时，$\varphi(xyz)=34$，这样的 x,y,z 不存在，因此方程(1) 无解.

情况 1.4　当 $\varphi(y)=10$ 时，此时 $\varphi(z)-3\leqslant 1$，即 $\varphi(z)=1,2,4$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，$\varphi(xyz)=28$，即 $xyz=29,58$，又因为 $x=z=1,2$，$y=11,12$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=32$，即 $xyz=51,64,68,80,96,102,120$，又因为 $x=1,2$，$y=11,12$，$z=3,4,6$，经检验，此时方程(1) 有解，为$(x,y,z)=(2,12,4)$.

当 $\varphi(z)=4$ 时，$\varphi(xyz)=40$，即 $xyz=41,88,100,110,132,150$，又因为 $x=1,2$，$y=11,12$，$z=5,8,10,12$，经检验，此时方程(1) 有解，为$(x,y,z)=(1,11,8)$，$(1,11,10)$，$(2,11,5)$.

情况 1.5　当 $\varphi(y)\geqslant 12$ 时，此时 $\varphi(z)-3\leqslant 0$，即 $\varphi(z)=1,2$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，将 $x=z=1,2$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=3\varphi(y)-2$ 且$\varphi(y)\geqslant 12$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

同理当 $\varphi(z)=2$ 时，方程(1) 无解.

情况 2　当 $\varphi(x)=2$，$\varphi(y)\geqslant 4$ 时，方程(1) 化简为

$$(\varphi(y)-2)(2\varphi(z)-3)\leqslant 2$$

情况 2.1　当 $\varphi(y)=4$ 时，此时 $2\varphi(z)-3\leqslant 1$，即 $\varphi(z)\leqslant 2$.

当$\varphi(z)=1$时，$\varphi(xyz)=12$，即 $xyz=13,21,26,28,36,42$，又因为 $x=3,4,6$，$y=5,8,10,12$，$z=1,2$，经检验，此时方程(1) 有解，为$(x,y,z)=(3,12,1)$.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=16$，即 $xyz=17,32,34,40,48,60$，又因为 $x=z=3,4,6$，$y=5,8,10,12$，经检验，此时方程(1) 有解，为$(x,y,z)=(3,5,4)$，$(4,5,3)$；

情况 2.2　当 $\varphi(y)\geqslant 6$ 时，此时 $2\varphi(z)-3\leqslant 0$，即 $\varphi(z)=1$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，将 $z=1,2$，$x=3,4,6$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=3\varphi(y)$ 且 $\varphi(y)\geqslant 6$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

情况 3　当 $\varphi(x)\geqslant 4$，$\varphi(y)=1$ 时，方程(1) 化简为

$$(\varphi(x)-4)(\varphi(z)-2)\leqslant 3$$

情况 3.1　当 $\varphi(x)=4$ 时，此时方程(1) 为 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)+3$.

由此得 $\varphi(xyz)$ 为奇数，由引理 2 的(iii) 可知方程(1) 无解.

情况 3.2　当 $\varphi(x)=6$ 时，此时 $\varphi(z)-2\leqslant 1$，即 $\varphi(z)=1,2$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，$\varphi(xyz)=11$，因 $\varphi(xyz)$ 为奇数，由引理 2 的(iii) 可知方程(1) 无解.

当 $\varphi(z)=2$ 时，$\varphi(xyz)=15$，因 $\varphi(xyz)$ 为奇数，由引理 2 的(iii) 可知方程(1) 无解.

情况 3.3　当 $\varphi(x)\geqslant 8$ 时，此时 $\varphi(z)-2\leqslant 0$，即 $\varphi(z)=1,2$.

当 $\varphi(z)=1$ 时，将 $y=z=1,2$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)-1$ 且 $\varphi(x)\geqslant 8$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

同理当 $\varphi(z)=2$ 时，方程(1) 无解.

情况 4　当 $\varphi(y)=2$ 时，方程(1) 化简为

$$(\varphi(x)-2)(\varphi(z)-1)\leqslant 1$$

情况 4.1　当 $\varphi(z)=1$ 时，方程(1) 为 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)+2$.

当 $\varphi(x)=1$ 时，$\varphi(xyz)=4$，即 $xyz=5,8,10,12$，又因为 $x=z=1,2$，$y=3,4,6$，经检验，此时方程(1) 有解，为 $(x,y,z)=(1,4,2)$，$(1,6,2)$，$(2,3,2)$，$(2,4,1)$，$(2,6,1)$.

当 $\varphi(x)=2$ 时，$\varphi(xyz)=6$，即 $xyz=7,9,14,18$，又因为 $x=y=3,4,6$，$z=1,2$，经检验，此时方程(1) 有解，为 $(x,y,z)=(3,3,1)$，$(3,3,2)$，$(3,6,1)$，$(6,3,1)$.

当 $\varphi(x)=4$ 时，$\varphi(xyz)=10$，即 $xyz=11,12$，又因为 $x=5,8,10,12$，$y=3,4,6$，$z=1,2$，经检验，此时方程(1) 无解.

当 $\varphi(x)=6$ 时，$\varphi(xyz)=14$，这样的 x,y,z 不存在，因此方程(1) 无解.

当 $\varphi(x)\geqslant 8$ 时，$\varphi(xyz)=2\varphi(x)+2$，将 $y=3,4,6$，$z=1,2$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)+2$ 且 $\varphi(x)\geqslant 8$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

情况 4.2　当 $\varphi(z)=2$ 时，此时 $\varphi(x)-2\leqslant 1$，即 $\varphi(x)=1,2$.

当 $\varphi(x)=1$ 时，$\varphi(xyz)=8$，即 $xyz=15,16,20,24,30$，又因为 $x=1,2$，$y=z=3,4,6$，经检验，此时方程(1) 有解，为 $(x,y,z)=(1,4,4)$，$(1,4,6)$，$(2,3,4)$，$(2,4,3)$.

当 $\varphi(x)=2$ 时，$\varphi(xyz)=10$，即 $xyz=11,12$，又因为 $x=y=z=3,4,6$，经检验，此时方程(1) 无解.

情况 4.3　当 $\varphi(z)\geqslant 4$ 时，$(\varphi(x)-2)\leqslant 0$，即 $\varphi(x)=1,2$.

当 $\varphi(x)=1$ 时，将 $x=1,2$，$y=3,4,6$ 代入方程(1)，经检验，不存在满足 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)$ 且 $\varphi(z)\geqslant 4$ 的 x,y,z，因此方程(1) 无解.

同理当 $\varphi(x)=2$ 时，方程(1) 无解.

情况 5　当 $\varphi(x)=2$，$\varphi(y)=1$ 时，代入方程(1) 可得 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)-1$，因 $\varphi(xyz)$ 为奇数，由引理 2 的(iii) 可知方程(1) 无解.

情况 6　当 $\varphi(x)=4$，$\varphi(y)=4$ 时，代入方程(1) 可得 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)+12\geqslant 16\varphi(z)$，即 $\varphi(z)=1$，此时 $\varphi(xyz)=16$，即 $xyz=17,32,34,40,48,60$，又因为 $x=y=5,8,10,12$，$z=1,2$，经检验，此时方程(1) 有解，为 $(x,y,z)=(5,8,1)$，$(5,12,1)$，$(8,5,1)$，$(12,5,1)$.

情况 7　当 $\varphi(x)=1$，$\varphi(y)=1$ 时，代入方程(1) 可得 $\varphi(xyz)=4\varphi(z)-3$，因 $\varphi(xyz)$ 为奇数，由引理 2 的(iii) 可知方程(1) 无解.

综上所述，可得方程 $\varphi(xyz)=2\varphi(x)+3\varphi(y)+4\varphi(z)-8$ 一共有 32 组正整数解.

参考文献：

[1] SUN C F, CHENG Z. Some Kind of Equation Involving Euler Function [J]. Journal of Mathematical Study, 2010, 43(4): 364-369.

[2] 钟凌锋. Sylow 子群个数对有限群结构的影响 [D]. 重庆：西南大学，2021.

[3] 赵蕾. 全实正代数整数的相关测度 [D]. 重庆：西南大学，2021.

[4] 张四保. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$的方程的正整数解 [J]. 数学的实践与认识，2014，44(20)：302-305.

[5] 孙树东. 一个与 Euler 函数 $\varphi(n)$有关的方程的正整数解 [J]. 北华大学学报(自然科学版)，2015，16(2)：161-164.

[6] 鲁伟阳，高丽，王曦浛. 有关 Euler 函数 $\varphi(n)$的方程的可解性问题 [J]. 江西科学，2016，34(1)：15-16，23.

[7] 许霞，徐小凡. 关于欧拉方程 $\varphi(xy)=2^k(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2016，41(4)：6-9.

[8] 郭瑞，赵西卿，张利霞，等. 关于欧拉方程 $\varphi(xy)=2\times3(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 贵州师范大学学报(自然科学版)，2016，34(2)：60-63.

[9] 张四保，席小忠. 有关方程 $\varphi(xy)=k(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 南京师大学报(自然科学版)，2016，39(1)：41-47.

[10] 郭瑞，赵西卿，张利霞，等. 关于欧拉方程 $\varphi(xy)=3^k(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 江西科学，2016，34(2)：154-157.

[11] 高丽，张佳凡. Euler 函数方程 $\varphi(xy)=11(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 云南师范大学学报(自然科学版)，2017，37(5)：13-19.

[12] 张明丽，高 丽. 欧拉方程 $\varphi(xy)=2^2\times3(\varphi(x)+\varphi(y))$的正整数解 [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2018，37(2)：5-9.

[13] 张四保，官春梅，席小忠. Euler 方程 $\varphi(xy)=k_1\varphi(x)+k_2\varphi(y)(k_1\neq k_2)$的正整数解 [J]. 郑州大学学报(理学版)，2017，49(1)：7-10.

[14] 白继文，赵西卿. 与 Euler 函数有关的一个方程的正整数解 [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2017，36(2)：5-7.

[15] 张四保，杜先存. 一个包含 Euler 函数方程的正整数解 [J]. 华中师范大学学报(自然科学版)，2015，49(4)：497-501.

[16] 张四保. 不定方程 $\varphi(xyz)=4(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z))$的解 [J]. 东北石油大学学报，2013，37(6)：113-118.

[17] 官春梅，吴星星，张四保，等. 不定方程 $\varphi(xyz)=5(\varphi(x)+\varphi(y)+\varphi(z))$的正整数解 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2016，52(4)：17-21.

[18] 夏衣旦·莫合德，张四保，等. 一个有关 Euler 函数 $\varphi(n)$的非线性方程的解 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版)，2018，39(2) ：4-7.

[19] 申江红，高丽，张明丽. 一个包含完全数的非线性欧拉函数方程的解 [J]. 延安大学学报(自然科学版)，2019，38(4)：3-5.

[20] 许倩，杨海，王钊. 一类包含完美数的欧拉函数方程的可解性 [J]. 湖北大学学报(自然科学版)，2022，44(2)：148-153.

[21] TOM M A. Introduction to Analytic Number Theory [M]. New York: Spring-Verlag, 1976.

责任编辑 廖坤