DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.04.005

几乎完全图是由第二 Immanantal 多项式刻画的①

曾晓琳, 吴廷增, 潘佳丽

青海民族大学 数学与统计学院,西宁 810007

摘要:令 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ 表示 n 阶方阵. 矩阵 $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ 的第二 immanant 定义为

$$d_2(\boldsymbol{M})=\sum_{\sigma\in S_n}\chi(\sigma)\prod_{s=1}^{n}m_{s\sigma(s)}$$

其中 χ 表示 S_n 关于划分(2, 1,…,1)的不可约特征标. 令 G 是一个含有 n 个顶点的图,$\boldsymbol{L}(G)$ 表示图 G 的拉普拉斯矩阵. 多项式 $d_2(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ 表示图 G 的第二 imamnantal 多项式,其中 $\boldsymbol{I}$ 表示 n 阶单位矩阵. 本文证明了几乎完全图是由第二 imamnantal 多项式确定的.

关 键 词:第二 imamnant;第二 imamnantal 多项式;拉普拉斯矩阵;生成树;几乎完全图

中图分类号:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-5471(2023)04-0037-08

Almost Complete Graphs are Dedermined by the Second Immanantal Polynomials

ZENG Xiaolin, WU Tingzeng, PAN Jiali

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Minzu University, Xining 810007, China

Abstract: Let $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ be an $n\times n$ square matrix. The second immanant of matrix $\boldsymbol{M}=(m_{ij})$ is defined as

$$d_2(\boldsymbol{M})=\sum_{\sigma\in S_n}\chi(\sigma)\prod_{s=1}^{n}m_{s\sigma(s)}$$

where χ is the irreducible character of S_n corresponding to the partition (2, 1,…,1). Let G be a graph with n vertices, and denote $\boldsymbol{L}(G)$ the Laplacian matrix of G. The polynomial $d_2(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ represents second immanantal polynomial of G, where $\boldsymbol{I}$ denotes the unit matrix of order n. In this paper, we show that almost graphs are determined by their second immanantal polynomials.

Key words: second imamnant; second imamnantal polynomial; Laplacian matrix; spanning tree; almost complete graph

一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})(i,j\in\{1, 2, \cdots, n\})$ 的第二 immanant 定义为

$$d_2(\boldsymbol{A})=\sum_{\sigma\in S_n}\chi(\sigma)\prod_{t=1}^{n}a_{t\sigma(t)}$$

① 收稿日期:2022-07-20
基金项目:国家自然科学基金项目(12261071);青海省自然科学基金项目(2020-ZJ-920);2022 年度青海民族大学校级规划项目(2022XJX13).
作者简介:曾晓琳,硕士研究生,主要从事图的多项式及其相关理论的研究.
通信作者:吴廷增,教授.

其中 χ 是 S_n 关于划分(2，1，…，1)的不可约特征标. 特别地，$\chi(\sigma)=\varepsilon(\sigma)[F(\sigma)-1]$，其中 ε 是交替特征标，F 是固定点的个数.

第二 immanant 是积和式与行列式之间的一个不变量. 文献[1]指出计算第二 immanant 的时间复杂度是 n^4. 假设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶为 $n(\geqslant 2)$，因为 $d_2(\boldsymbol{A})$ 的项对应于 $\det \boldsymbol{A}$ 的因子 $(F(\sigma)-1)(\sigma \in S_n)$. 因此有

$$d_2(\boldsymbol{A})=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\det \boldsymbol{A}(i)-\det \boldsymbol{A} \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{A}(i)$ 是删除矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 i 列得到的子矩阵. 例如，假设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

根据公式(1)，可得 $d_2(\boldsymbol{A})=18$.

令 G 是含有 n 个顶点的图. $\boldsymbol{A}(G)$ 是图 G 的(0，1)-邻接矩阵. d_i 表示顶点 v_i 的度. 矩阵

$$\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$$

称为图 G 的拉普拉斯矩阵，其中 $\boldsymbol{D}(G)$ 是对角元素为 $\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$ 的 n 阶度矩阵.

多项式

$$d_2(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(G)x^{n-k}=c_0(G)x^n-c_1(G)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n c_n(G)$$

称作图 G 的第二 immanantal 多项式，记作 d_2-多项式，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 $n\times n$ 单位矩阵. 为了强调图 G，系数通常记作 $c_k(G)(0\leqslant k\leqslant n)$.

两个图是共第二 immanant 的，是指这两个图分享相同的第二 immanantal 多项式. 图 H 与图 G 是共第二 immanant 的，但不是同构的，则称 H 是 G 的一个共第二 immanant 伙伴. 如果图 G 没有共第二 immanant 伙伴，则称图 G 是由第二 immanantal 多项式确定的.

图谱理论中的一个经典问题：什么样的图是由多项式确定的？在图多项式理论中，这是一个困难的问题. 近几年，这个问题受到了许多学者的关注. 一些图 G 已经被证明是由矩阵 $(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ 的行列式确定的，例如双星状图[2]、沙漏图[3]、Z_n 图[4]、T-形树[5]、∞-图[6] 等.

最近，学者们考虑了什么样的图是由矩阵 $(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ 的积和式确定的. 文献[7]证明了完全图和圈是由矩阵 $(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ 的积和式确定的. 文献[8]证明了棒棒糖图是由 $(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))$ 的积和式确定的. 关于这个问题更多的研究，可参见文献[9-18].

文献[19]首次考虑了一个问题：什么样的图是由 d_2-多项式确定的？ 文献[19]证明了：几乎所有的树都有共第二 immanant 伙伴. 特别地，文献[1]证明了：如果图 G 和 H 是两个正则图，则 G 和 H 是共第二 immanant 的当且当

$$\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(H))$$

或

$$\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(G))=\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(H))$$

并且，文献[10]发现一对非正则的图对是共第二 immanant 的，如图 1 所示.

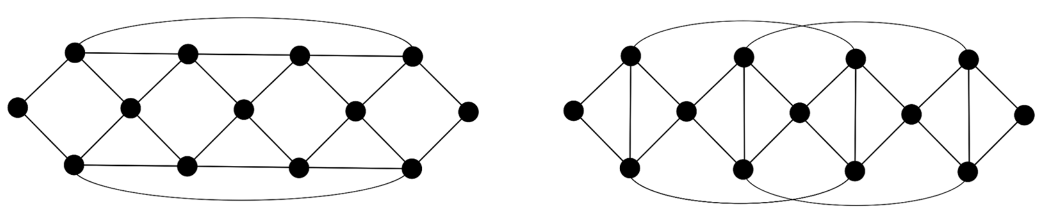

图 1 非正则的且共第二 immanant 的图对

基于文献[19]的探讨，存在一个有趣的问题：寻找一些图，既是由 d_2-多项式确定的，也是由特征多项式 $\det(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}(G))$ 确定的. 本文围绕这个问题开展研究.

令 $\mathscr{G}_n$ 是从完全图 K_n 删除至多 5 条边得到的图集. 文献[20]证明了 $\mathscr{G}_n$ 中所有的图都是由其特征多项式确定的. 本文讨论 $\mathscr{G}_n$ 中哪些图是由其第二 immanantal 多项式确定的. 意外的是，我们发现，无例外地，$\mathscr{G}_n$ 中所有的图都是由其第二 imamnantal 多项式确定的.

定理 1　$\mathscr{G}_n$ 中所有的图都是由其第二 immanantal 多项式确定的.

本文剩余内容的结构如下：先给出一些 d_2-多项式的性质；再给出定理 1 的证明；最后提出两个值得未来进一步研究的有意义的问题.

令图 $G=(V, E)$ 表示一个含有非空点集 V 和非空边集 E 的无向简单图，即 G 是不含有环和重边的图. 图 $G=(V, E)$ 的补图 $\overline{G}$ 是与 G 含有相同的点集和边集为 $\{i, j\}$（$i\neq j$ 当且仅当 $\{i, j\}\notin E$）的图. 对 G 的一个子图 H，令 $G-E(H)$ 表示从 G 中删除 H 中的边集得到的子图，$G\cup H$ 表示不含有公共顶点的两个图 G 和 H 的并. 对任意的正整数 l，令 lG 表示 l 个 G 的不交并. 为了方便起见，我们把含有 n 个顶点的完全图、路、圈和星分别记作 K_n，P_n，C_n 和 $K_{1,n-1}$.

文献[21]指出，对 $n\geqslant 10$，在 $\mathscr{G}_n$ 中存在 45 个非同构图，并标记为 G_{ij}（$i=1,2,\cdots,5$；$j=0,1,\cdots,25$），如图 2 所示.

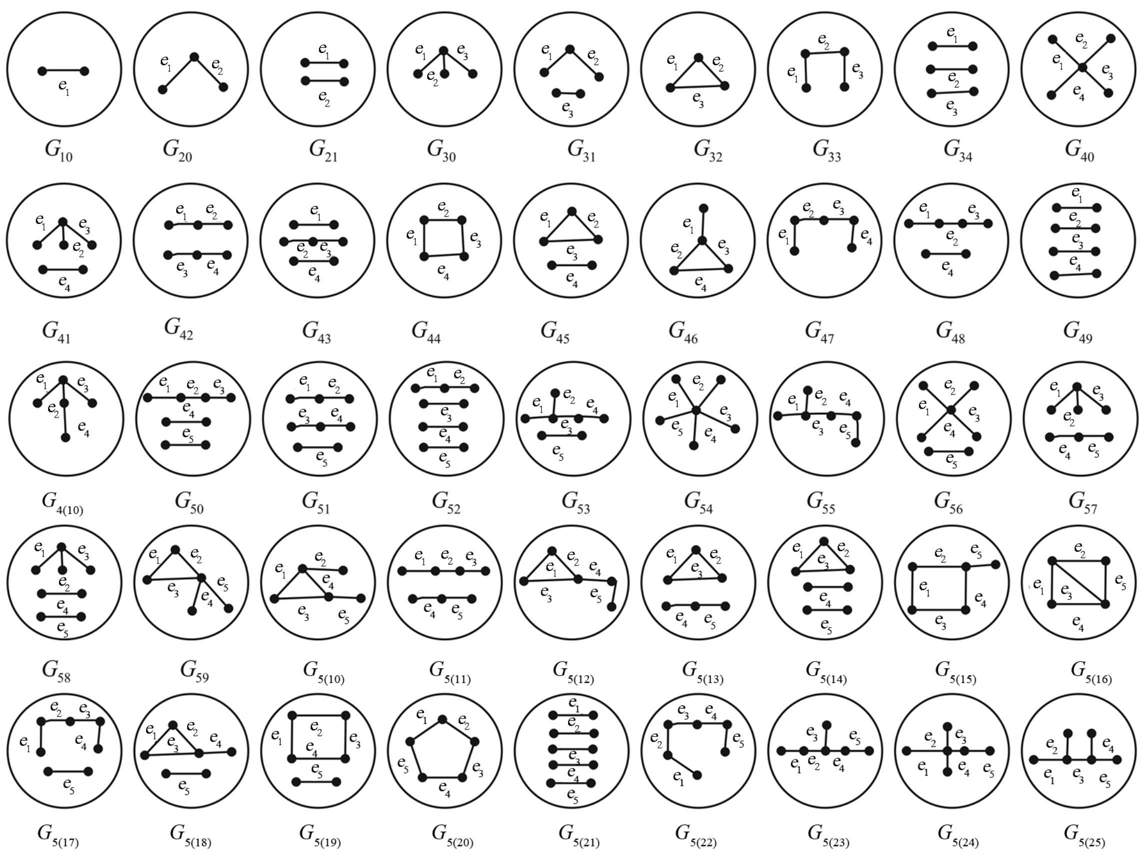

图 2　从完全图 K_n 中删除至多 5 条边得到的图集 $\mathscr{G}_n$

引理 1[1]　令 G 是含有 n 个顶点和 m 条边的连通图，$(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 表示图 G 的度序列，$\boldsymbol{L}(G)$ 是图 G 的拉普拉斯矩阵，且

$$d_2(x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(G))=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k c_k(G)x^{n-k}$$

则

$$c_0(G)=n-1$$

$$c_1(G)=2m(n-1)$$

$$c_2(G)=(n-1)a_2(G)-m(n-3) \qquad a_2(G)=\sum_{i\neq j\in\{1,2,\cdots,n\}} d_i d_j$$

$$c_n(G)=2m\tau(G)$$

其中 $\tau(G)$ 表示图 G 的生成树的个数.

由引理1，我们可以得到 d_2-多项式的一些性质.

引理2 从图 G 的 d_2-多项式的系数 $c_0(G)$，$c_1(G)$ 和 $c_n(G)$ 可以推断出 G 的顶点数、边数、生成树的个数.

引理3[22] 如果 $\bar{G}$ 是 G 的补图，且 G 含有 n 个顶点，则

$$\tau(G)=n^{-2}\det(n\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L}(\bar{G}))$$

其中 $\tau(G)$ 是 G 的生成树的个数.

由引理3，我们计算出了 $\mathscr{G}_n$ 中一些图的生成树的个数，如表1所示.

表1 $\mathscr{G}_n$ **中图的生成树的个数**

G	$\tau(G)$	G	$\tau(G)$
G_{20}	$n^{n-4}(n^2-4n+3)$	G_{21}	$n^{n-4}(n^2-4n+4)$
G_{30}	$n^{n-5}(n^3-6n^2+9n-4)$	G_{31}	$n^{n-5}(n^3-6n^2+11n-6)$
G_{32}	$n^{n-5}(n^3-6n^2+9n)$	G_{33}	$n^{n-5}(n^3-6n^2+10n-4)$
G_{34}	$n^{n-5}(n^3-6n^2+12n-8)$	G_{40}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+18n^2-16n+5)$
G_{41}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+21n^2-22n+8)$	G_{42}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+22n^2-24n+9)$
G_{43}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+23n^2-28n+12)$	G_{44}	$n^{n-5}(n^3-8n^2+20n-16)$
G_{45}	$n^{n-5}(n^3-8n^2+21n-18)$	G_{46}	$n^{n-5}(n^3-8n^2+19n-12)$
G_{47}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+21n^2-20n+5)$	G_{48}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+22n^2-24n+8)$
G_{49}	$n^{n-6}(n^4-8n^3+24n^2-32n+16)$	$G_{4(10)}$	$n^{n-6}(n^4-8n^3+20n^2-18n+5$
G_{50}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+38n^3-68n^2+56n-16)$	G_{51}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+38n^3-68n^2+57n-18)$
G_{52}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+39n^3-74n^2+68n-24)$	G_{53}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+36n^3-58n^2+41n-10)$
G_{54}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+30n^3-40n^2+25n-6)$	G_{55}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+35n^3-52n^2+32n-6)$
G_{56}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+34n^3-52n^2+37n-10)$	G_{57}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+36n^3-58n^2+43n-12)$
G_{58}	$n^{n-7}(n^5-10n^4+37n^3-64n^2+52n-16)$	G_{59}	$n^{n-6}(n^4-10n^3+32n^2-38n+15)$
$G_{5(10)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+33n^2-40n+15)$	$G_{5(11)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+37n^3-62n^2+46n-12)$
$G_{5(12)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+34n^2-44n+15)$	$G_{5(13)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+36n^2-54n+27)$
$G_{5(14)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+37n^2-60n+36)$	$G_{5(15)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+34n^2-46n+20)$
$G_{5(16)}$	$n^{n-5}(n^3-10n^2+32n-32)$	$G_{5(17)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+37n^3-62n^2+45n-10)$
$G_{5(18)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+35n^2-50n+24)$	$G_{5(19)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+36n^2-56n+32)$
$G_{5(20)}$	$n^{n-6}(n^4-10n^3+35n^2-50n+25)$	$G_{5(21)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+40n^3-80n^2+80n-32)$
$G_{5(22)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+36n^3-56n^2+35n-6)$	$G_{5(23)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+35n^3-52n^2+31n-6)$
$G_{5(24)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+33n^3-46n^2+28n-6)$	$G_{5(25)}$	$n^{n-7}(n^5-10n^4+34n^3-48n^2+29n-6)$

由引理3，我们可得：

定理2 图 G_{10} 是由 d_2-多项式确定的.

定理3 图 G_{20} 和 G_{21} 是由 d_2-多项式确定的.

证 根据表1，我们知道

$$\tau(G_{20})-\tau(G_{21})=n^{n-4}(n^2-4n+3)-n^{n-4}(n^2-4n+4)\neq 0$$

由引理 2 可知，这意味着 G_{20} 和 G_{21} 是由 d_2 -多项式确定的.

定理 4　图 G_{30},G_{31},G_{32},G_{33} 和 G_{34} 是由 d_2 -多项式确定的.

证　根据 $G_{3i}(i=0,1,\cdots,4)$ 的图结构，我们知道

$$|V(G_{30})|\geqslant 4 \qquad |V(G_{31})|\geqslant 5 \qquad |V(G_{32})|\geqslant 3 \qquad |V(G_{33})|\geqslant 4 \qquad |V(G_{34})|\geqslant 6$$

与定理 3 类似，根据表 1 可得，只有当 $n=4$ 时，

$$\tau(G_{32})-\tau(G_{33})=(-n+4)n^{n-5}=0$$

根据引理 1，我们可以得到

$$c_2(G_{32})=33 \qquad c_2(G_{33})=36$$

这意味着 G_{32} 和 G_{33} 不是共第二 immanant 的.

同样地，解方程

$$\tau(G_{30})-\tau(G_{31})=n^{n-5}(-2n+2)=0$$
$$\tau(G_{31})-\tau(G_{32})=(2n-6)n^{n-5}=0$$
$$\tau(G_{31})-\tau(G_{33})=(n-2)n^{n-5}=0$$
$$\tau(G_{31})-\tau(G_{34})=(2-n)n^{n-5}=0$$
$$\tau(G_{33})-\tau(G_{34})=(-2n+4)n^{n-5}=0$$

我们得到这些方程的解 n 小于对应图的顶点数，矛盾. 所以，G_{31} 和 G_{33}，G_{31} 和 G_{34}，G_{33} 和 G_{34} 分别都不是共第二 immanant 的.

由表 1，解方程

$$\tau(G_{30})-\tau(G_{32})=0 \qquad \tau(G_{30})-\tau(G_{33})=0$$
$$\tau(G_{30})-\tau(G_{34})=0 \qquad \tau(G_{32})-\tau(G_{34})=0$$

可以得出这些方程或者没有解，或者没有整数解.

由引理 2 及以上的讨论可知，图 G_{30},G_{31},G_{32},G_{33} 和 G_{34} 是由 d_2 -多项式确定的.

定理 5　图 G_{40},G_{41},G_{42},G_{43},G_{44},G_{45},G_{46},G_{47},G_{48},G_{49} 和 $G_{4(10)}$ 是由 d_2 -多项式确定的.

证　根据图 $G_{4j}(j=0,1,\cdots,10)$ 的结构，我们可以得到 $|V(G_{40})|\geqslant 5$，$|V(G_{41})|\geqslant 6$，$|V(G_{42})|\geqslant 6$，$|V(G_{43})|\geqslant 7$，$|V(G_{44})|\geqslant 4$，$|V(G_{45})|\geqslant 5$，$|V(G_{46})|\geqslant 4$，$|V(G_{47})|\geqslant 5$，$|V(G_{48})|\geqslant 6$，$|V(G_{49})|\geqslant 8$ 和 $|V(G_{4(10)})|\geqslant 5$.

由表 1 得到，只有当 $n=4$ 时，$\tau(G_{44})-\tau(G_{46})=(n-4)n^{n-5}=0$. 如果 $n=4$，由引理 1，我们得到 $c_2(G_{44})=16$ 和 $c_2(G_{46})=14$. 这表明 G_{44} 和 G_{46} 不是共第二 immanant 的.

同样地，只有当 $n=-1,5$ 时，有 $\tau(G_{44})-\tau(G_{47})=(-n^2+4n-5)n^{n-6}=0$. 如果 $n=5$，由引理 1 可知，在图 G_{44} 和 G_{47} 中，$c_2(G_{44})=212$ 和 $c_2(G_{47})=216$. 这意味着 G_{44} 和 G_{47} 不是共第二 immanant 的.

类似地，只有当 $n=1,5$ 时，$\tau(G_{46})-\tau(G_{4(10)})=(-n^2+6n-5)n^{n-6}=0$. 如果 $n=5$，由引理 1 可得，$c_2(G_{46})=208$ 和 $c_2(G_{4(10)})=212$. 这说明 G_{46} 和 $G_{4(10)}$ 不是共第二 immanant 的.

根据表 1，解方程 $\tau(G_{40})-\tau(G_{4j})=0(j=1,2,3,5,6,10)$，$\tau(G_{41})-\tau(G_{4j})=0(j=2,3,4,5,6,8,9,10)$，$\tau(G_{42})-\tau(G_{4j})=0(j=3,5,6,7,8,10)$，$\tau(G_{43})-\tau(G_{4j})=0(j=4,5,6,8,9,10)$，$\tau(G_{44})-\tau(G_{4j})=0(j=5,8,9)$，$\tau(G_{45})-\tau(G_{4j})=0(j=8,9)$，$\tau(G_{47})-\tau(G_{4j})=0\ (j=8,10)$，$\tau(G_{48})-\tau(G_{49})=0$. 我们得到这些方程的根 n 小于对应图的顶点数，矛盾. 因此，图 G_{40} 和图 G_{41},G_{42},G_{43},G_{45},G_{46},$G_{4(10)}$；图 G_{41} 和图 G_{42}，G_{43},G_{44},G_{45},G_{46},G_{48},G_{49},$G_{4(10)}$；图 G_{42} 和图 G_{43},G_{45},G_{46},G_{47},G_{48},$G_{4(10)}$；图 G_{43} 和图 G_{44},G_{45},G_{46},G_{49}，$G_{4(10)}$；图 G_{44} 和图 G_{45},G_{48},G_{49}；图 G_{45} 和图 G_{48},G_{49}；图 G_{47} 和图 G_{48},$G_{4(10)}$；图 G_{48} 和图 G_{49} 都分别不是共第二 immanant 的.

由表 1，解方程 $\tau(G_{40})-\tau(G_{4j})=0(j=4,7,8,9)$，$\tau(G_{41})-\tau(G_{47})=0$，$\tau(G_{42})-\tau(G_{4j})=0(j=4,9)$，$\tau(G_{43})-\tau(G_{47})=0$，$\tau(G_{44})-\tau(G_{4(10)})=0$，$\tau(G_{45})-\tau(G_{4j})=0(j=6,7,10)$，$\tau(G_{46})-\tau(G_{4j})=0(j=7,$

8,9), $\tau(G_{47})-\tau(G_{49})=0$, $\tau(G_{48})-\tau(G_{4(10)})=0$ 和 $\tau(G_{49})-\tau(G_{4(10)})=0$. 我们可以得出这些方程或者没有解,或者没有整数根. 这说明 G_{40} 和 G_{44}, G_{47}, G_{48}, G_{49}; G_{41} 和 G_{47}; G_{42} 和 G_{44}, G_{49}; G_{43} 和 G_{47}; G_{44} 和 $G_{4(10)}$; G_{45} 和 G_{46}, G_{47}, $G_{4(10)}$; G_{46} 和 G_{47} G_{48}, G_{49}; G_{47} 和 G_{49}; G_{48} 和 $G_{4(10)}$; G_{49} 和 $G_{4(10)}$ 都分别不是共第二 immanant 的.

根据引理 2 和上述讨论可得, G_{40}, G_{41}, G_{42}, G_{43}, G_{44}, G_{45}, G_{46}, G_{47}, G_{48}, G_{49} 和 $G_{4(10)}$ 是由 d_2 -多项式确定的.

定理 6 图 G_{50}, G_{51}, G_{52}, G_{53}, G_{54}, G_{55}, G_{56}, G_{57}, G_{58}, G_{59}, $G_{5(10)}$, $G_{5(11)}$, $G_{5(12)}$, $G_{5(13)}$, $G_{5(14)}$, $G_{5(15)}$, $G_{5(16)}$, $G_{5(17)}$, $G_{5(18)}$, $G_{5(19)}$, $G_{5(20)}$, $G_{5(21)}$, $G_{5(22)}$, $G_{5(23)}$, $G_{5(24)}$ 和 $G_{5(25)}$ 是由 d_2 -多项式确定的.

证 根据图 $G_{5j}(j=0,1,\cdots,25)$ 的结构,我们可得 $|V(G_{50})|\geqslant 8$, $|V(G_{51})|\geqslant 8$, $|V(G_{52})|\geqslant 9$, $|V(G_{53})|\geqslant 7$, $|V(G_{54})|\geqslant 6$, $|V(G_{55})|\geqslant 6$, $|V(G_{56})|\geqslant 7$, $|V(G_{57})|\geqslant 7$, $|V(G_{58})|\geqslant 8$, $|V(G_{59})|\geqslant 5$, $|V(G_{5(10)})|\geqslant 5$, $|V(G_{5(11)})|\geqslant 7$, $|V(G_{5(12)})|\geqslant 5$, $|V(G_{5(13)})|\geqslant 6$, $|V(G_{5(14)})|\geqslant 7$, $|V(G_{5(15)})|\geqslant 5$, $|V(G_{5(16)})|\geqslant 4$, $|V(G_{5(17)})|\geqslant 7$, $|V(G_{5(18)})|\geqslant 6$, $|V(G_{5(19)})|\geqslant 6$, $|V(G_{5(20)})|\geqslant 5$, $|V(G_{5(21)})|\geqslant 10$, $|V(G_{5(22)})|\geqslant 6$, $|V(G_{5(23)})|\geqslant 6$, $|V(G_{5(24)})|\geqslant 6$ 和 $|V(G_{5(25)})|\geqslant 6$.

与定理 5 的证明类似,根据表 1 可得:

只有当 $n=1$, $n=6$ 时, $\tau(G_{59})-\tau(G_{5(24)})=n^{n-7}(-n^3+8n^2-13n+6)=0$. 如果 $n=6$, 由引理 1 可得 $c_2(G_{59})=780$ 和 $c_2(G_{5(24)})=790$. 这表明 G_{59} 和 $G_{5(24)}$ 不是共第二 immanant 的.

只有当 $n=1$, $n=5$ 时, $\tau(G_{5(10)})-\tau(G_{5(15)})=n^{n-6}(-n^2+6n-5)=0$. 类似地,如果 $n=5$, 根据引理 1 可得 $c_2(G_{5(10)})=106$ 和 $c_2(G_{5(15)})=146$. 这说明 $G_{5(10)}$ 和 $G_{5(15)}$ 不是共第二 immanant 的.

只有当 $n=3$, $n=5$ 时, $\tau(G_{5(10)})-\tau(G_{5(16)})=n^{n-6}(n^2-8n+15)=0$. 如果 $n=5$, 由引理 1 得到 $c_2(G_{5(10)})=106$ 和 $c_2(G_{5(16)})=138$. 这意味着 $G_{5(10)}$ 和 $G_{5(16)}$ 不是共第二 immanant 的.

只有当 $n=2,5$ 时, $\tau(G_{5(15)})-\tau(G_{5(16)})=n^{n-6}(2n^2-14n+20)=0$. 如果 $n=5$, 根据引理 1 可得 $c_2(G_{5(15)})=146$ 和 $c_2(G_{5(16)})=138$. 这说明 $G_{5(15)}$ 和 $G_{5(16)}$ 不是共第二 immanant 的.

只有当 $n=-1,5$ 时, $\tau(G_{5(15)})-\tau(G_{5(20)})=n^{n-6}(-n^2+4n-5)=0$. 如果 $n=5$ 时,由引理 1 得到 $c_2(G_{5(15)})=146$ 和 $c_2(G_{5(20)})=150$. 这表明 $G_{5(15)}$ 和 $G_{5(20)}$ 不是共第二 immanant 的.

类似地,根据表 1, 解方程 $\tau(G_{50})-\tau(G_{5j})=0(j=1,2,3,6,8,11,14,15,\cdots,23)$, $\tau(G_{51})-\tau(G_{5j})=0(j=1,10,20)$, $\tau(G_{52})-\tau(G_{5j})=0(j=1,2,10,20)$, $\tau(G_{53})-\tau(G_{5j})=0(j=1,2,3,10,12,13,20)$, $\tau(G_{54})-\tau(G_{5j})=0(j=5,6,7,8,11,13,18,22,24,25)$, $\tau(G_{55})-\tau(G_{5j})=0(j=6,7,8,9,11,12,13,18,20,22,23,24,25)$, $\tau(G_{56})-\tau(G_{5j})=0(j=7,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,25)$, $\tau(G_{57})-\tau(G_{5j})=0(j=8,10,11,12,13,14,17,18,19,20,22,24,25)$, $\tau(G_{58})-\tau(G_{5j})=0(j=9,11,13,14,\cdots,19,21,22,23,24,25)$, $\tau(G_{59})-\tau(G_{5j})=0(j=10,11,12,13,14,18,22,25)$, $\tau(G_{5(10)})-\tau(G_{5j})=0(j=12,21,23)$, $\tau(G_{5(11)})-\tau(G_{5j})=0(j=12,13,14,\cdots,19,21,22,23,24,25)$, $\tau(G_{5(12)})-\tau(G_{5j})=0(j=13,14,18,22,25)$, $\tau(G_{5(13)})-\tau(G_{5j})=0(j=14,18,22,24,25)$, $\tau(G_{5(14)})-\tau(G_{5j})=0(j=15,16,17,18,19,21,22,23,25)$, $\tau(G_{5(15)})-\tau(G_{5j})=0(j=17,18,19,21,22,23)$, $\tau(G_{5(16)})-\tau(G_{5j})=0(j=17,18,19,21,22,23)$, $\tau(G_{5(17)})-\tau(G_{5j})=0(j=18,19,\cdots,23)$, $\tau(G_{5(18)})-\tau(G_{5j})=0(j=19,20,\cdots,25)$, $\tau(G_{5(19)})-\tau(G_{5j})=0(j=21,22,23)$, $\tau(G_{5(20)})-\tau(G_{5(24)})=0$, $\tau(G_{5(21)})-\tau(G_{5j})=0(j=22,23)$, $\tau(G_{5(22)})-\tau(G_{5j})=0(j=23, 24, 25\})$ 和 $\tau(G_{5(24)})-\tau(G_{5(25)})=0$. 我们得到这些方程的根 n 小于对应图的顶点数,矛盾. 因此, G_{50} 和 $G_{5j}(j=1,2,3,6,8,11,14,15,\cdots,23)$, G_{51} 和 $G_{5j}(j=1,10,20)$, G_{52} 和 $G_{5j}(j=1,2,10,20)$, G_{53} 和 $G_{5j}(j=1,2,3,10,12,13,20)$, G_{54} 和 $G_{5j}(j=5,6,7,8,11,13,18,22,24,25)$, G_{55} 和 $G_{5j}(j=6,7,8,9,11,12,13,18,20,22,23,24,25)$, G_{56} 和 $G_{5j}(j=7,8,9,11,13,15,16,17,18,19,21,22,23,24,25)$, G_{57} 和 $G_{5j}(j=8,10,11,12,13,14,17,18,19,20,22,24,25)$, G_{58} 和 $G_{5j}(j=11,13,14,\cdots,19,21,22,23,24,25)$, G_{59} 和 $G_{5j}(j=10,11,12,13,14,18,22,25)$, $G_{5(10)}$ 和 $G_{5j}(j=12,21,23)$, $G_{5(11)}$ 和 $G_{5j}(j=12,13,14,\cdots,19,21,22,23,24,25)$, $G_{5(12)}$ 和 $G_{5j}(j=13,14,18,22,25)$, $G_{5(13)}$ 和 $G_{5j}(j=14,18,22,24,25)$, $G_{5(14)}$ 和 $G_{5j}(j=15,$

16,17,18,19,21,22,23,25)，$G_{5(15)}$ 和 $G_{5j}(j=17,18,19,21,22,23)$，$G_{5(16)}$ 和 $G_{5j}(j=17,18,19,21,22,23)$，$G_{5(17)}$ 和 $G_{5j}(j=18,19,\cdots,23)$，$G_{5(18)}$ 和 $G_{5j}(j=19,20,\cdots,25)$，$G_{5(19)}$ 和 $G_{5j}(j=21,22,23)$，$G_{5(20)}$ 和 $G_{5(24)}$，$G_{5(21)}$ 和 $G_{5j}(j=22,23)$，$G_{5(22)}$ 和 $G_{5j}(j=23,24,25)$，$G_{5(24)}$ 和 $G_{5(25)}$ 都分别不是共第二 immanant 的.

同样地，根据表 1，解方程 $\tau(G_{50})-\tau(G_{5j})=0(j=4,5,7,9,10,12,13,24,25)$，$\tau(G_{51})-\tau(G_{5j})=0(j=10,20)$，$\tau(G_{52})-\tau(G_{5j})=0(j=10,20)$，$\tau(G_{53})-\tau(G_{5j})=0(j=10,12,13,20)$，$\tau(G_{54})-\tau(G_{5j})=0(j=9,10,12,14,15,16,17,19,20,21,23)$，$\tau(G_{55})-\tau(G_{5j})=0(j=10,14,15,16,17,19,21)$，$\tau(G_{56})-\tau(G_{5j})=0(j=10,12,14,20)$，$\tau(G_{57})-\tau(G_{5j})=0(j=9,15,16,21,23)$，$\tau(G_{58})-\tau(G_{5j})=0(j=10,12,20)$，$\tau(G_{59})-\tau(G_{5j})=0(j=15,16,17,19,20,21,23)$，$\tau(G_{5(10)})-\tau(G_{5j})=0(j=11,13,14,17,18,19,20,22,24,25)$，$\tau(G_{5(11)})-\tau(G_{5(20)})=0$，$\tau(G_{5(12)})-\tau(G_{5j})=0(j=15,16,17,19,20,21,23,24)$，$\tau(G_{5(13)})-\tau(G_{5j})=0(j=15,16,17,19,20,21,23)$，$\tau(G_{5(14)})-\tau(G_{5j})=0(j=20,24)$，$\tau(G_{5(15)})-\tau(G_{5j})=0(j=24,25)$，$\tau(G_{5(16)})-\tau(G_{5j})=0(j=20,24,25)$，$\tau(G_{5(17)})-\tau(G_{5j}))=0(j=24,25)$，$\tau(G_{5(19)})-\tau(G_{5j})=0(j=20,24,25)$，$\tau(G_{5(20)})-\tau(G_{5j})=0(j=21,22,23,25)$，$\tau(G_{5(21)})-\tau(G_{5j})=0(j=24,25)$ 和 $\tau(G_{5(23)})-\tau(G_{5j})=0(j=24,25)$. 我们可以得到这些方程或者没有解，或者没有整数根. 因此，G_{50} 和 $G_{5j}(j=4,5,7,9,10,12,13,24,25)$，$G_{51}$ 和 $G_{5j}(j=10,20)$，G_{52} 和 $G_{5j}(j=10,20)$，G_{53} 和 $G_{5j}(j=10,12,13,20)$，G_{54} 和 $G_{5j}(j=9,10,12,14,15,16,17,19,20,21,23)$，$G_{55}$ 和 $G_{5j}(j=10,14,15,16,17,19,21)$，$G_{56}$ 和 $G_{5j}(j=10,12,14,20)$，G_{57} 和 $G_{5j}(j=9,15,16,21,23)$，G_{58} 和 $G_{5j}(j=10,12,20)$，G_{59} 和 $G_{5j}(j=15,16,17,19,20,21,23)$，$G_{5(10)}$ 和 $G_{5j}(j=11,13,14,17,18,19,20,22,24,25)$，$G_{5(11)}$ 和 $G_{5(20)}$，$G_{5(12)}$ 和 $G_{5j}(j=15,16,17,19,20,21,23,24)$，$G_{5(13)}$ 和 $G_{5j}(j=15,16,17,19,20,21,23)$，$G_{5(14)}$ 和 $G_{5j}(j=20,24)$，$G_{5(15)}$ 和 $G_{5j}(j=24,25)$，$G_{5(16)}$ 和 $G_{5j}(j=20,24,25)$，$G_{5(17)}$ 和 $G_{5j}(j=24,25)$，$G_{5(19)}$ 和 $G_{5j}(j=20,24,25)$，$G_{5(20)}$ 和 $G_{5j}(j=21,22,23,25)$，$G_{5(21)}$ 和 $G_{5j}(j=24,25)$，$G_{5(23)}$ 和 $G_{5j}(j=24,25)$ 都分别不是共第二 immanant 的.

由引理 2 和上述探讨可知，$G_{50},G_{51},G_{52},G_{53},G_{54},G_{55},G_{56},G_{57},G_{58},G_{59},G_{5(10)},G_{5(11)},G_{5(12)},G_{5(13)},G_{5(14)},G_{5(15)},G_{5(16)},G_{5(17)},G_{5(18)},G_{5(19)},G_{5(20)},G_{5(21)},G_{5(22)},G_{5(23)},G_{5(24)}$ 和 $G_{5(25)}$ 是由 d_2-多项式确定的.

结合定理 2－定理 6，定理 1 得证.

非同构的图有相同的 immanantal 多项式的例子已经被给了出来. 因此，刻画由 d_2-多项式确定的图是一个有趣的问题. 本文证明了所有的几乎完全图都是由 d_2-多项式确定的. 另外，我们发现两个值得进一步研究的问题：

问题 1　证明图 $K_n-E(K_{1,s})$ 和 $K_n-E(pK_2)$ 是由 d_2-多项式确定的，其中 $s\leqslant n-2$ 和 $p\leqslant\frac{n}{2}$.

问题 2　构造一个从完全图 K_n 中删除 l 条边得到的图对，使得它们是共第二 immanant 的.

参考文献：

[1] MERRIS R. The Second Immanantal Polynomial and the Centroid of a Graph [J]. SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods，1986，7(3)：484-503.

[2] LIU X G，ZHANG Y P，LU P L. One Special Double Starlike Graph is Determined by Its Laplacian Spectrum [J]. Applied Mathematics Letters，2009，22(4)：435-438.

[3] LU P L，LIU X G，YUAN Z T，et al. Spectral Characterizations of Sandglass Graphs [J]. Applied Mathematics Letters，2009，22(8)：1225-1230.

[4] SHEN X L，HOU Y P，ZHANG Y P. Graph Z_n and Some Graphs Related to Z_n are Determined by Their Spectrum [J]. Linear Algebra and Its Applications，2005，404：58-68.

[5] WANG W，XU C X. Note the *T*-Shape Tree is Determined by Its Laplacian Spectrum [J]. Linear Algebra and Its Applications，2006，419(1)：78-81.

[6] WANG J F，HUANG Q X，BELARDO F，et al. On the Spectral Characterizations of ∞-Graphs [J]. Discrete Mathematics，2010，310(13/14)：1845-1855.

[7] LIU S Y. On the (Signless) Laplacian Permanental Polynomials of Graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 2019, 35(3): 787-803.

[8] LIU X G, WU T Z. Graphs Determined by the (Signless) Laplacian Permanental Polynomials [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70(18): 3599-3615.

[9] BANF S, VAN DAM E R, KOOLEN J H. Spectral Characterization of the Hamming Graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2008, 429: 2678-2686.

[10] CVETKOVIĆ D, DOOB M, SACHS H. Spectra of Graphs: Theorey and Application [M]. New York: Academic Press, 1980.

[11] VAN DAM E R, HAEMERS W H. Which Graphs are Determined by Their Spectrum? [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2003, 373: 241-272.

[12] DAM E R V, HAEMERS W H. Developments on Spectral Characterizations of Graphs [J]. Discrete Mathematics, 2009, 309(3): 576-586.

[13] LIN H Q, LIU X G, XUE J. Graphs Determined by Their A_α-Spectra [J]. Discrete Mathematics, 2019, 342(2): 441-450.

[14] MERRIS R, WATKINS W. Inequalities and Identities for Generalized Matrix Functions [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1985, 64: 223-242.

[15] MERRIS R. Immanantal Invariants of Graphs [J]. Linear Algebra and Its Applications, 2005, 401: 67-75 .

[16] SHI Y T, DEMER M, LI X L, et al. Graph Polynomials [M]. Boca Raton: CRC Press, 2016.

[17] WANG W. A Simple Arithmetic Criterion for Graphs Being Determined by Their Generalized Spectra [J]. Journal Combinatorial Theory(Series B), 2017, 122: 438-451.

[18] YU G H, QU H. The Coefficients of the Immanantal Polynomial [J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 339: 38-44.

[19] MERRIS R. Almost All Trees are Co-Immanantal [J]. Linear Algebra and Its Applications, 1991, 150: 61-66 .

[20] CÁMARA M, HAEMERS W H. Spectral Characterizations of Almost Complete Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2014, 176: 19-23.

[21] ZHANG H P, WU T Z, LAI H J. Per-Spectral Characterizations of Some Edge-Deleted Subgraphs of a Complete Graph [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2015, 63(2): 397-410.

[22] BIGGS N. Algebraic Graph Theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

责任编辑 廖坤