DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.04.006

# 单位圆盘上几种 Toeplitz 算子的数值域①

丁宣浩[1,2]，　王章逸[1]，　邵长慧[1]，　李永宁[1,2]

1. 重庆工商大学 数学与统计学院，重庆 400067；2. 经济社会应用统计重庆市重点实验室，重庆 400067

**摘要**：线性算子的凸性对其数值域而言是个极其重要的性质. 二次数值域提供了估算算子特征值的方法，更精确地刻画了谱的分布状态. 本文得到了单位圆盘上 Hardy-Toeplitz 算子、Bergman-Toeplitz 算子以及对偶截断Toeplitz 算子的数值域的结果，并用二次数值域的方法将这些算子的数值域与算子的符号联系了起来.

**关　键　词**：Toeplitz 算子；数值域；二次数值域；对偶截断 Toeplitz 算子

**中图分类号**：O177.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)04－0045－07

# Numerical Domains of Several Toeplitz Operators on the Unit Disk

DING Xuanhao[1,2]，　WANG Zhangyi[1]，
SHAO Changhui[1]，　LI Yongning[1,2]

*1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;*
*2. Chongqing Key Laboratory of Applied Statistics for Economic and Social Applications, Chongqing 400067, China*

**Abstract**: Convexity is a very important property for the numerical domain of linear operators. The binary number field provides a method to estimate the eigenvalues of the operator and to characterize the distribution state of the spectrum more precisely. In this paper, we obtain results on the numerical domains of Hardy-Toeplitz, Bergman-Toeplitz, and pairwise truncated Toeplitz operators on the unit disk, and we relate the numerical domains of these operators to the symbols of the operators, where the method of the dual number field is used.

**Key words**: Toeplitz operator; numerical domain; quadratic numerical domain; dual truncated Toeplitz operator

设 $T$ 为 Hilbert 空间上的有界线性算子. 记 $T$ 的谱为 $\sigma(T)$. 记集合 $S$ 的凸包为 conv $S$. 则算子 $T$ 的数值域定义为集合

$$W(T)=\{\langle Tf, f\rangle: f \in H, \|f\|=1\}$$

与算子的谱类似，算子的数值域是复平面中的子集，并且可以反映出算子的一些代数性质. 例如，$T$ 是自伴算子当且仅当 $W(T)\subset \mathbb{R}$，$T$ 是半正定的当且仅当 $W(T)\subset[0,\infty)$.

---

① 收稿日期：2022－07－19
基金项目：国家自然科学基金项目(11871122，12101092)；重庆市自然科学基金项目(CSTB2022NSCQ-MSX1045，cstc2020jcyj-msxmX0318)；重庆市教委科学技术研究项目(KJQN202100822).
作者简介：丁宣浩，教授，主要从事函数空间上算子理论的研究.
通信作者：李永宁，副教授.

由于本文的需要，这里列举一些算子数值域的简单性质，其证明可参见文献[1-2]. 更多关于算子数值域的知识，我们推荐文献[2-3].

**引理 1**[1] 算子 $T$ 的数值域 $W(T)$ 具有下述性质：

(i) $W(T)$ 是凸集；

(ii) $\sigma(T) \subset \overline{W(T)}$；

(iii) 对任意的 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$，$W(\alpha T+\beta I)=W(T)+\beta$；

(iv) $W(T^*)=\{\bar{\lambda}: \lambda \in W(T)\}$；

(v) 对任何的酉算子 $U$，$W(U^* TU)=W(T)$；

(vi) 如果 $T$ 是亚正规算子，则 $\overline{W(T)}=\operatorname{conv} \sigma(T)$.

设 $H_1, H_2$ 为 Hilbert 空间，记 $F$ 为 $H_1 \oplus H_2$ 上的由下述分块形式给出的线性算子

$$F=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

这里 $A$ 和 $D$ 分别表示 $H_1$ 和 $H_2$ 上的线性算子，$B$ 为从 $H_2$ 到 $H_1$ 上的线性算子，$C$ 为从 $H_1$ 到 $H_2$ 上的线性算子.

$2 \times 2$ 分块算子的二次数值域的概念是由文献[4]引入的，定义为集合

$$W^2(F)=\left\{\lambda \in \mathbb{C}: \det\begin{pmatrix} \langle Ax, x\rangle-\lambda & \langle By, x\rangle \\ \langle Cx, y\rangle & \langle Dy, y\rangle-\lambda \end{pmatrix}=0,\ \|x\|=\|y\|=1,\ 且\ x \in H_1,\ y \in H_2\right\}$$

下述关于 $F$ 的二次数值域的性质在我们主要结果的证明中很有用，故我们引用如下(引理 2)，而且，为了读者阅读方便，这里我们用更直接的方法证明了第一条性质，这与文献[5]中的证明方法不同.

**引理 2**[5] $H_1 \oplus H_2$ 上的线性算子 $F$ 的二次数值域 $W(F)$ 具有如下性质：

(i) $W^2(F) \subset W(F)$；

(ii) $\sigma(F) \subset W^2(F)$；

(iii) $W^2(F^*)=(W^2(F))^*=\{\lambda \in \mathbb{C}: \bar{\lambda} \subset W^2(F)\}$；

(iv) 若 $\dim H_2>1$，则 $W(F) \subset W^2(F)$；若 $\dim H_1>1$，则 $W(D) \subset W^2(F)$.

**证** (i) 对于任意给定的 $x \in H_1$，$y \in H_2$ 且 $\|x\|=\|y\|=1$，定义 $F_{xy}$ 为

$$F_{xy}=\begin{pmatrix} \langle Ax, x\rangle & \langle By, x\rangle \\ \langle Cx, y\rangle & \langle Dy, y\rangle \end{pmatrix}$$

则 $F_{xy}$ 是从 $\mathbb{C}^2$ 到 $\mathbb{C}^2$ 的有界线性算子. 而且，易知

$$W^2(F)=\bigcup_{\|x\|=\|y\|=1} \sigma(F_{xy})$$

对任意的 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ 且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=1$，由于

$$F_{xy}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \langle Ax, x\rangle & \langle By, x\rangle \\ \langle Cx, y\rangle & \langle Dy, y\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1\langle Ax, x\rangle+\alpha_2\langle By, x\rangle \\ \alpha_1\langle Cx, y\rangle+\alpha_2\langle Dy, y\rangle \end{pmatrix}$$

则有

$$\left\langle F_{xy}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right\rangle=\overline{\alpha_1}(\alpha_1\langle Ax, x\rangle+\alpha_2\langle By, x\rangle)+\overline{\alpha_2}(\alpha_1\langle Cx, y\rangle+\alpha_2\langle Dy, y\rangle)=$$

$$|\alpha_1|^2\langle Ax, x\rangle+\overline{\alpha_1}\alpha_2\langle By, x\rangle+\alpha_1\overline{\alpha_2}\langle Cx, y\rangle+|\alpha_2|^2\langle Dy, y\rangle \in W(F_{xy})$$

令 $f=\alpha_1 x+\alpha_2 y$. 因为 $x \perp y$，

$$\|f\|^2=\|\alpha_1 x\|^2+\|\alpha_2 y\|^2=$$

$$|\alpha_1|^2\ \|x\|^2+|\alpha_2|^2\ \|y\|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2=1$$

由于

$$Ff=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha_1 x\\ \alpha_2 y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1 Ax+\alpha_2 By\\ \alpha_1 Cx+\alpha_2 Dy\end{pmatrix}$$

故可得

$$\begin{aligned}\langle Ff,f\rangle=&\langle \alpha_1 Ax+\alpha_2 By,\alpha_1 x\rangle+\langle \alpha_1 Cx+\alpha_2 Dy,\alpha_2 x\rangle=\\ &|\alpha_1|^2\langle Ax,x\rangle+\alpha_2\overline{\alpha_1}\langle By,x\rangle+\alpha_1\overline{\alpha_2}\langle Cx,y\rangle+|\alpha_2|^2\langle Dy,y\rangle\in W(F)\end{aligned}$$

从而推出 $W(F_{xy})\subset W(F)$. 因为有限维线性空间上的有界线性算子的数值域是紧集，所以

$$\overline{W(F_{xy})}=W(F_{xy})$$

由上述事实和引理 1，可得

$$\sigma(F_{xy})\subset\overline{W(F_{xy})}=W(F_{xy})\subset W(F)$$

因此，对任意的 $x\in H_1$，$y\in H_2$，则有

$$W^2(F)=\bigcup_{\|x\|=\|y\|=1}\sigma(F_{xy})\subset W(F)\tag{1}$$

从而性质(i) 得证.

对于有界线性算子，由引理 2 中的(i) 和(ii) 可知在线性算子的谱刻画方面，二次数值域能提供比数值域更精确的信息.

设 $\mathbb{D}$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的单位开圆盘，$H^2$ 是单位开圆盘上经典的 Hardy 空间，$L^2=L^2(\mathbb{T})$ 为单位圆周 $\mathbb{T}=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ 上的 Lebesgue 空间. 设 $H^\infty$ 为 $\mathbb{D}$ 上的有界解析函数所构成的空间. 根据 Fatou 定理和调和延拓定理[6]，我们通常将 $H^2$ 与 $L^2(\mathbb{T})$ 中由解析函数构成的闭子空间等同起来.

设 $P$ 为从 $L^2$ 到 $H^2$ 上的正交投影算子. 对任意的 $\varphi\in L^\infty$，Hardy 空间上的 Toeplitz 算子 $T_\varphi$ 定义为

$$T_\varphi x=P_u(\varphi x)\qquad x\in H^2$$

Hankel 算子 $H_\varphi$：$H^2\longrightarrow(H^2)^\perp$ 定义为

$$H_\varphi x=(I-P)(\varphi x)\qquad x\in H^2$$

Hardy 空间的正交补空间$(H^2)^\perp$ 上的对偶 Toeplitz 算子 $S_\varphi$ 定义为

$$S_\varphi y=(I-P)(\varphi y)\qquad y\in(H^2)^\perp$$

设 $u$ 是非常值的内函数，即 $u$ 是 $\mathbb{D}$ 上的解析函数，且 $|u(z)|=1$ 在 $\partial\mathbb{D}$ 上几乎处处成立. 则称 $K_u^2=H^2!\ uH^2$ 为模空间，该空间是 $T_z$ 的不变子空间[7-8]. 记 $P_u$ 是从 $L^2$ 到 $K_u^2$ 上的正交投影算子，对任意的 $\varphi\in L^2$，文献[9] 引入了 $K_u^2$ 上的截断 Toeplitz 算子 $A_\varphi$，该算子定义为

$$A_\varphi x=P_u(\varphi x)\qquad x\in K_u^2$$

截断 Hankel 算子 $B_\varphi$：$K_u^2\longrightarrow(K_u^2)^\perp$ 定义为

$$B_\varphi x=(I-P_u)(\varphi x)\qquad x\in K_u^2$$

容易验证

$$B_\varphi^* y=P_u(\bar{\varphi}y)\qquad y\in K_u^2$$

模空间的正交补空间$(K_u^2)^\perp$ 上的对偶截断 Toeplitz 算子 $D_\varphi$ 最先由文献[10] 引入，该算子定义为

$$D_\varphi y=(I-P_u)(\varphi y)\qquad y\in(K_u^2)^\perp$$

记 $M_\varphi$ 为 $L^2$ 上的乘法算子，则在 $L^2=H^2\oplus(H^2)^\perp$ 下，由简单计算可得

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}T_\varphi & H_{\bar{\varphi}}^*\\ H_\varphi & S_\varphi\end{pmatrix}\tag{2}$$

如果 $L^2=K_u^2\oplus(K_u^2)^\perp$，则

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}A_\varphi & B_{\bar{\varphi}}^*\\ B_\varphi & D_\varphi\end{pmatrix}\tag{3}$$

## 1 Hardy-Toeplitz 算子的数值域和二次数值域

在本节，我们研究用 Toeplitz 算子的符号来刻画 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的数值域和二次数值域. 由 Hardy 空间上 Toeplitz 算子的代数性质[11] 可知，所有的 Hardy-Toeplitz 算子均是凸算子. 文献[12] 应用算

子的谱完全刻画了任意一个 Hardy-Toeplitz 算子的数值域.

**引理 3**[13] (i) 若 $\varphi \in L^{\infty}$ 为非常值函数且 $T_{\varphi}$ 是正规算子，则 $\sigma(T_{\varphi})$ 是一条连接 $a$ 和 $b$ 的闭直线段 $[a, b]$，并且 $W(T_{\varphi})$ 是对应的开直线段 $(a, b)$；

(ii) 若 $\varphi \in L^{\infty}$ 为非常值的函数且 $T_{\varphi}$ 不是正规算子，则 $W(T_{\varphi}) = (\operatorname{conv} \sigma(T_{\varphi}))^{\circ}$，其中 $E^{\circ}$ 表示集合 $E$ 的内部；

(iii) 若 $\varphi \in H^{\infty}$，则 $W(T_{\varphi}) = \operatorname{conv} \varphi(\mathbb{D})$.

在本节中，我们首先用 Toeplitz 算子符号的值域给出 Hardy-Toeplitz 算子的数值域的解析刻画，这和文献[12]应用算子的谱来刻画数值域的方式是不同的. 设 $f \in L^1(\mathbb{T})$，则 $\widetilde{f}(z)$ 是 $\mathbb{D}$ 上的调和函数，且 $\lim\limits_{r \to 1} \widetilde{f}(r\zeta) = f(\zeta)$ 对 $\zeta \in \mathbb{T}$ 几乎处处成立[14]. 反过来，如果 $f$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的调和函数，则下述定理 1 回答了 $f$ 何时具有边界值，以及 $f$ 是如何由其边界值确定下来的.

**定理 1**[15] 设 $f$ 是单位圆盘上的复数值调和函数，对于 $1 \leqslant p < \infty$，当 $r \to 1$ 时，设 $\int_T |f(r\zeta)|^p \mathrm{d}\sigma(\zeta)$ 是有界的，其中 $\mathrm{d}\sigma(\zeta)$ 是 $\mathbb{T}$ 上正规化的 Haar 测度，则对于几乎每个 $\zeta$，径向极限 $f^{*}(\zeta) = \lim\limits_{r \to 1} f(r\zeta)$ 是存在的，且定义了圆周 $\mathbb{T}$ 上的 $L^p$ 中的函数 $f^{*}$. 若 $p > 1$，则 $f(z)$ 是 $f^{*}$ 的调和延拓.

基于上述事实，下面，我们将 $L^{\infty}(\mathbb{T})$ 中的函数 $\varphi$ 与其调和延拓 $\widetilde{\varphi}$ 等同起来，并记作 $\varphi \in L^{\infty}$. 在我们给出本节的主要结果之前，我们首先给出乘法算子的数值域的刻画.

**定理 2** 设 $\varphi \in L^{\infty}$，$M_{\varphi}$ 是 $L^2$ 上的乘法算子，则

$$\overline{W(M_{\varphi})} = \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})} \tag{4}$$

**证** 一方面，$\forall z \in \mathbb{D}$，

$$\varphi(z) = \langle M_{\varphi} k_z, k_z \rangle \in W(M_{\varphi})$$

则有

$$\varphi(\mathbb{D}) \subset W(M_{\varphi})$$

从而

$$\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \overline{W(M_{\varphi})}$$

又因为 $W(M_{\varphi})$ 是凸集，故 $\overline{W(M_{\varphi})}$ 是凸集，因此

$$\operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \overline{W(M_{\varphi})}$$

另一方面，由于 $M_{\varphi}$ 是正规算子，根据引理 1 的性质(vi)，从而可得 $\overline{W(M_{\varphi})} = \operatorname{conv} \sigma(M_{\varphi})$，结合事实 $\sigma(M_{\varphi}) = \mathfrak{R}(\varphi)$(见文献[15])以及 $\mathfrak{R}(\varphi) \subset \overline{\varphi(\mathbb{D})}$，其中，$\mathfrak{R}(\varphi)$ 为 $\varphi$ 的本质值域，则有

$$\operatorname{conv} \mathfrak{R}(\varphi) \subset \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

从而可得

$$\overline{W(M_{\varphi})} \subset \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

将以上两方面结合起来，则结论得证.

下述定理 3 用符号的值域刻画了有界符号的 Hardy-Toeplitz 算子的数值域.

**定理 3** 设 $\varphi \in L^{\infty}$，则

$$\overline{W(T_{\varphi})} = \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

**证** 一方面，由于 $M_{\varphi}$ 在空间分解 $L^2 = H^2 \oplus (H^2)^{\perp}$ 下的表示为

$$M_{\varphi} = \begin{pmatrix} T_{\varphi} & H_{\bar{\varphi}}^{*} \\ H_{\varphi} & S_{\varphi} \end{pmatrix}$$

以及 $\dim(H^2)^{\perp} > 1$，根据引理 2，可得

$$W(T_{\varphi}) \subset W^2(M_{\varphi}) \subset W(M_{\varphi})$$

另一方面，对任意的 $z \in \mathbb{D}$，因为

$$\varphi(z) = \langle T_{\varphi} k_z, k_z \rangle = \langle \varphi k_z, k_z \rangle \in W(T_{\varphi})$$

则有 $\varphi(\mathbb{D}) \subset W(T_\varphi)$. 从而

$$\operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \overline{W(T_\varphi)} \subset \overline{W(M_\varphi)}$$

因此，根据定理 2，则有$\overline{W(T_\varphi)} = \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$. 从而结论得证.

设 $u$ 是内函数，则 Hardy 空间可分解为 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$，其中 $K_u^2 = H^2 ! \; uH^2$ 是模空间. 在该分解下，对任意的 $\varphi \in L^\infty$，Toeplitz 算子 $T_\varphi$ 可表示成 $2 \times 2$ 形式的算子

$$T_\varphi = \begin{pmatrix} t_\varphi & h_{\bar{\varphi}}^* \\ h_\varphi & A_\varphi \end{pmatrix} \tag{5}$$

其中，对 $x \in uH^2$，$t_\varphi x = uP\bar{u}\varphi x$ 被称为小 Toeplitz 算子[16]，$h_\varphi = (I - uP\bar{u})\varphi x$ 被称为小 Hankel 算子[17]. 由简单计算，易得

$$h_{\bar{\varphi}}^* = up\bar{u}\varphi y \qquad y \in K_u^2$$

设 $P_u$ 是从 $L^2$ 到 $K_u^2$ 上的正交投影算子. $K_u^2$ 上的截断 Toeplitz 算子定义为

$$A_\varphi y = P_u \varphi y \qquad y \in K_u^2$$

在 $T_\varphi$ 的上述表示((5) 式) 下，$T_\varphi$ 的二次数值域为

$$W^2(T_\varphi) = \left\{\lambda \in \mathbb{C}\colon \det\begin{pmatrix} \langle t_\varphi x, x\rangle - \lambda & \langle h_{\bar{\varphi}}^* y, x\rangle \\ \langle h_\varphi x, y\rangle & \langle A_\varphi y, y\rangle - \lambda \end{pmatrix} = 0,\ x \in uH^2,\ y \in K_u^2 \text{ 且 } \|x\| = \|y\| = 1\right\}$$

二次数值域是文献[4] 引入的概念. 应用二次数值域可以建立自伴的 $2 \times 2$ 分块算子的变分原理，进而估计算子的特征值. 由定义显然可知，二次数值域与空间的直和分解有关. 目前为止，尚未有关于 Toeplitz 算子的二次数值域的相关结果出现. 下面，我们给出 Hardy-Toeplitz 算子在空间分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下的二次数值域的刻画.

**定理 4**　设 $\varphi \in L^\infty$，在分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下(其中 $u$ 是阶大于 1 的内函数)，则

$$W^2(T_\varphi) = W(T_\varphi)$$

**证**　由 $T_\varphi$ 在空间分解 $H^2 = uH^2 \oplus K_u^2$ 下的表示(5) 式以及引理 2 可得

$$W(t_\varphi) \subset W^2(T_\varphi) \subset W(T_\varphi)$$

令 $M_u$ 为从 $H^2$ 到 $uH^2$ 的算子，且对 $f \in H^2$，$M_u f = uf$. 则易知 $M_u$ 是酉算子且 $M_u T_\varphi M_{\bar{u}} = t_\varphi$. 由引理 1 可得

$$W(t_\varphi) = W(T_\varphi)$$

从而

$$W^2(T_\varphi) = W(T_\varphi)$$

## 2　Bergman-Toeplitz 算子的数值域

在本节中，我们给出了 Bergman 空间上 Toeplitz 算子的数值域的刻画.

设 $\mathrm{d}A$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上单位开圆盘 $\mathbb{D}$ 上的面积测度. Bergman 空间 $L_a^2(\mathbb{D})$ 是 $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$ 中由解析函数构成的子空间. 下面，我们将 $L^2(\mathbb{D}, \mathrm{d}A)$ 简写成 $L^2(\mathbb{D})$. 设 $P$ 是从 $L^2(\mathbb{D})$ 到 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的正交投影. 对任意的 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$，从 $L_a^2(\mathbb{D})$ 到 $L_a^2(\mathbb{D})$ 上的符号为 $\varphi$ 的 Toeplitz 算子定义为

$$T_\varphi f = P(\varphi f) \qquad \forall f \in L_a^2(\mathbb{D})$$

Hankel 算子 $H_\varphi: L_a^2(\mathbb{D}) \longrightarrow (L_a^2(\mathbb{D}))^\perp$ 定义为

$$H_\varphi f = (\mathrm{I} - P)(\varphi f) \qquad \forall f \in L_a^2(\mathbb{D})$$

设 $\varphi \in L^\infty(\mathbb{D})$，函数 $\varphi$ 的 Berezin 变换定义为 $\tilde{\varphi}(z) = \langle \varphi k_z, k_z\rangle$，其中 $k_z$ 为 Bergman 空间中规范化的再生核函数[18]. 本文中，单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上满足 Laplacian 方程的复数值函数称为调和函数.

文献[19] 研究了 Bergman 空间上调和符号的 Toeplitz 算子的性质，给出了有界调和符号的 Bergman-Toeplitz 算子的数值域刻画，并应用符号的值域刻画了解析符号的 Bergman-Toeplitz 算子的数值域，这里我们引用如下(引理 4). 由于调和符号的 Bergman-Toeplitz 算子和 Hardy-Toeplitz 算子的性质相似[20]，本节我们运用符号的值域给出有界解析符号的 Bergman-Toeplitz 算子的数值域的类似刻画.

**引理 4**[19]　(i) 设 $\varphi$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的非常值的有界调和函数，且 $T_\varphi$ 为正规算子，则存在常数 $a$ ,$b$ 使

得 $\sigma(T_\varphi)=[a,b]$ 且 $W(T_\varphi)=(a,b)$；

(ii) 设 $\varphi$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的非常值有界调和函数，且 $T_\varphi$ 不是正规算子，则 $W(T_\varphi)$ 是一个开凸集；

(iii) 若 $\varphi\in H^\infty$，则 $W(T_\varphi)=\mathrm{conv}\,\varphi(\mathbb{D})$.

类似定理2，应用 Berezin 变换可证得下述结论：

**引理5** 设 $\varphi\in L^\infty(\mathbb{D})$，$M_\varphi$ 是 $L^2(\mathbb{D})$ 上的乘法算子，则

$$\overline{W(M_\varphi)}=\mathrm{conv}\,\overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

下面，我们给出有界调和符号的 Bergman-Toeplitz 算子的数值域的不同形式的刻画：

**定理5** 设 $\varphi$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$ 上的有界调和函数，则

$$W(T_\varphi)=\mathrm{conv}\,\varphi(\mathbb{D})$$

**证** 在空间分解 $L^2(\mathbb{D})=L_a^2(\mathbb{D})\oplus(L_a^2(\mathbb{D}))^\perp$ 下，乘法算子 $M_\varphi$ 具有下述形式的表示

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}T_\varphi & H_{\bar\varphi}^*\\ H_\varphi & S_\varphi\end{pmatrix}$$

其中 $S_\varphi$ 为从 $(L_a^2(\mathbb{D}))^\perp$ 到 $(L_a^2(\mathbb{D}))^\perp$ 的对偶 Toeplitz 算子. 由于 $\dim(L_a^2(\mathbb{D}))^\perp>1$，根据引理2可得

$$W(T_\varphi)\subset W^2(M_\varphi)\subset W(M_\varphi) \tag{6}$$

对任意的 $z\in\mathbb{D}$，因为

$$\widetilde{\varphi}(z)=\langle\varphi k_z,k_z\rangle\in W(T_\varphi)$$

且由于 $\varphi$ 是调和函数，故 $\varphi=\widetilde{\varphi}$. 从而

$$\varphi(\mathbb{D})\subset W(T_\varphi)$$

因此

$$\overline{\varphi(\mathbb{D})}\subset\overline{W(T_\varphi)}$$

根据引理5及关系式(6)，可得

$$\mathrm{conv}\,\overline{\varphi(\mathbb{D})}\subset\overline{W(T_\varphi)}$$

因为紧集的凸包仍是紧集，开集的凸包仍是开集，以及开凸集等于其闭包的内部，根据引理4，故可得

$$W(T_\varphi)=\mathrm{conv}\,\varphi(\mathbb{D})$$

# 3 对偶截断 Toeplitz 算子的数值域和二次数值域

在本节中，我们研究模空间 $(K_u^2)^\perp$ 上的对偶截断 Toeplitz 算子的数值域和二次数值域. 众所周知，在空间分解 $(K_u^2)^\perp=uH^2\oplus(H^2)^\perp$ 下，对偶截断 Toeplitz 算子 $D_\varphi$ 具有下述形式的表示

$$D_\varphi=\begin{pmatrix}t_\varphi & h_{\bar\varphi}^*\\ h_\varphi & S_\varphi\end{pmatrix} \tag{7}$$

其中 $S_\varphi$ 为定义在 $(H^2)^\perp$ 上的对偶 Toeplitz 算子. 下面，我们给出 $D_\varphi$ 的数值域和二次数值域的刻画：

**定理6** 设 $\varphi\in L^\infty$，$u$ 为阶大于1的内函数，则

$$\overline{W(D_\varphi)}=\mathrm{conv}\,\overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

而且，在空间分解 $(K_u^2)^\perp=uH^2\oplus(H^2)^\perp$ 下，

$$\mathrm{conv}\,\overline{W^2(D_\varphi)}=\mathrm{conv}\,\overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

**证** 根据 $D_\varphi$ 的表示(7)式以及引理2，可得

$$W(t_\varphi)\subset W^2(D_\varphi)\subset W(D_\varphi)$$

从而

$$\overline{W(t_\varphi)}\subset\overline{W(D_\varphi)}$$

进一步，由于 $\dim K_u^2>1$，再次根据引理2考虑 $M_\varphi$ 在空间分解 $L^2=K_u^2\oplus(K_u^2)^\perp$ 下的表示

$$M_\varphi=\begin{pmatrix}D_\varphi & B_{\bar\varphi}^*\\ B_\varphi & A_\varphi\end{pmatrix}$$

可得

$$W(D_{\varphi}) \subset W^{2}(M_{\varphi}) \subset W(M_{\varphi})$$

从而

$$\overline{W(D_{\varphi})} \subset \overline{W(M_{\varphi})}$$

因为

$$\varphi(\mathbb{D}) \subset \overline{W(T_{\varphi})} = \overline{W(t_{\varphi})}$$

故

$$\varphi(\mathbb{D}) \subset W(t_{\varphi}) \subset W^{2}(D_{\varphi}) \subset W(D_{\varphi}) \subset W^{2}(M_{\varphi}) \subset W(M_{\varphi})$$

从而

$$\overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \overline{W^{2}(D_{\varphi})} \subset \overline{W(D_{\varphi})} \subset \overline{W(M_{\varphi})}$$

因此可得

$$\operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})} \subset \operatorname{conv} \overline{W^{2}(D_{\varphi})} \subset \overline{W(D_{\varphi})} \subset \overline{W(M_{\varphi})}$$

根据定理 2，则有$\overline{W(M_{\varphi})} = \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$. 因此

$$\operatorname{conv} \overline{W^{2}(D_{\varphi})} = \overline{W(D_{\varphi})} = \operatorname{conv} \overline{\varphi(\mathbb{D})}$$

结论得证.

**参考文献：**


[1] HALMOS P R. A Hilbert Space Problem Book [M]. 2th ed. Berlin：Springer，1982.

[2] STAMPFLI J G. Extreme Points of the Numerical Range of a Hyponormal Operator [J]. Michigan Mathematical Journal，1966，13(1)：87-89.

[3] GUSTAFSON K E，RAO D K M. Numerical Range [M]. Berlin：Springer，1997.

[4] LANGER H，TRETTER C. Spectral Decomposition of Some Nonselfadjoint Block Operator Matrices [J]. Journal of Operator Theory，1998，39(2)：339-359.

[5] LANGER H，MARKUS A，MATSAEV V，et al. A New Concept for Block Operator Matrices：The Quadratic Numerical Range [J]. Linear Algebra and Its Applications，2001，330(1-3)：89-112.

[6] GARNETT J. Bounded Analytic Functions [M]. New-York：Springer Science & Business Media，2007.

[7] 丁宣浩，黄雨浩，桑元琦，等. 亚正规对偶截断 Toeplitz 算子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2022，44(6)：94-98.

[8] BEURLING A. On Two Problems Concerning Linear Transformations in Hilbert Space [J]. Acta Mathematica，1949，81(1)：239-255.

[9] SARASON D. Algebraic Properties of Truncated Toeplitz Operators [J]. Operators and Matrices，2007，1(4)：491-526.

[10] DING X H，SANG Y Q. Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2018，461(1)：929-946.

[11] BROWN A，HALMOS P. Algebraic Properties of Toeplitz Operators [J]. Journal Für Mathematik，1964，1964(213)：89-102.

[12] KLEIN E M. The Numerical Range of a Toeplitz Operator [J]. Proceedings of the American Mathematical Society，1972，35(2)：101-103.

[13] HOFFMAN K. Banach Space of Analytic Function [M]. Pretice Hall：Kenneth Hoffman，1962.

[14] 丁宣浩，梁焕超，李永宁. 可交换的 Toeplitz 算子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(2)：27-31.

[15] DOUGLAS R G. Banach Algebra Techniques in Operator Theory [M]. New-York：Springer Science & Business Media，2012.

[16] 李永宁，梁焕超，丁宣浩. 圆周上的小 Hankel 算子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(6)：89-94.

[17] LI Y N，SANG Y Q，DING X H. The Commutant and Invariant Subspaces for Dual Truncated Toeplitz Operators [J]. Banach Journal of Mathematical Analysis，2021，15(1)：224-250.

[18] ZHU K H. Operator Theory in Function Spaces [M]. Providence，Rhode Island：American Mathematical Society，2007.

[19] THUKRAL J K. The Numerical Range of a Toeplitz Operator with Harmonic Symbol [J]. Journal of Operator Theory，1995，34(2)：213-216.

[20] McDONALD G，SUNDBERG C. Toeplitz Operators on the Disc [J]. Indiana University Mathematics Journal，1979，28(4)：595-611.


**责任编辑　廖坤**