

跳跃因素下原油期货定价模型 的理论研究及实证分析^①

任芳玲, 乔克林, 张少峰

延安大学 数学与计算机科学学院, 陕西 延安 716000

摘要: 依据我国原油期货的特点, 对带有跳跃性因素的原油期货定价模型进行研究. 首先利用随机微分方程法推导出模型的解析解及模型参数的估计公式, 其次对 2019, 2020 年我国上海原油期货合约价格进行实证分析, 结果表明带有跳跃性因素的原油期货定价模型的预测能力较好, 证明了该模型的合理性与实用性. 该研究对我国原油期货的定价提供了一定的理论和实证分析依据.

关键词: 原油期货; 跳跃性因素; 定价模型; 参数估计

中图分类号: F224.9; G642

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)04-0080-10

Theoretical Study and Empirical Analysis on Crude Oil Futures Pricing Model under Jump Factors

REN Fangling, QIAO Kelin, ZHANG Shaofeng

College of Mathematics and Computer Science, Yan'an University, Yan'an Shaanxi 716000, China

Abstract: According to the characteristics of crude oil futures in China, the pricing model of crude oil futures with jump factors is studied. Firstly, the analytical solution of the model and the estimation formula of the model parameters are derived by using the stochastic differential method. Secondly, the empirical analysis of Shanghai crude oil futures contract prices in 2019 and 2020 shows that the prediction ability of the crude oil futures pricing model with jump factor is better, indicating the rationality and practicability of the model. The research provides certain theoretical basis and empirical analysis for the pricing study of crude oil futures in our country.

Key words: crude oil futures; jump factors; pricing model; parameter estimation

众所周知, 原油是工业生产的命脉, 对国家的经济发展、贸易往来等多方面起着至关重要的作用. 原油期货(Crude Oil Future) 是以远期石油价格为标的物的一类石油期货, 自期货诞生以来, 学者们就对其产品设计、定价方法、期现关系理论等展开了研究. 文献[1] 提出双因素模型, 该模型较好地预测了原油期货

^① 收稿日期: 2022-03-29

基金项目: 陕西省科技厅自然科学基金项目(2022JQ-741); 陕西省大创项目(S202110719111).

作者简介: 任芳玲, 硕士生导师, 副教授, 主要从事金融数学和统计分析研究.

价格的趋势,其方程如下:

$$\begin{cases} dS = \mu S dt + \sigma_1 S dW_1 \\ d\delta = k(\alpha - \delta) dt + \sigma_2 dW_2 \end{cases}$$

其中: dW_1 与 dW_2 是标准布朗运动的增量,且 $dW_1 dW_2 = \rho dt$, μ 是升值率, σ_1 与 σ_2 是波动率, $\alpha = \mu - \frac{\sigma^2}{2k}$, k 是均值回复率. 文献[2] 提出现货价格的双因子模型,该模型将对数现货价格分解成短期波动和长期均衡,短期波动 X_{1t} 假定其服从期望为 0 的 O-U 过程,长期均衡 X_{2t} 服从布朗运动. 其模型如下:

$$\begin{cases} \ln S_t = X_{1t} + X_{2t} \\ dX_{1t} = -kX_{1t} dt + \sigma_1 dW_1 \\ dX_{2t} = \mu X_{2t} dt + \sigma_2 dW_2 \end{cases}$$

其中 $k, \mu, \sigma_1, \sigma_2$ 为模型参数. 文献[3] 根据期货价格的特征,建立仿射期限结构模型,该模型假定现货价格的自然对数可以分解成多个状态变量的和:

$$\ln S_t = X_{1t} + X_{2t} + \cdots + X_{nt}$$

其中 $X_{it} (i=1, 2, 3, \dots, n)$ 表示影响价格变化的因素.

原油期货的定价模型一般会假设随机变量服从连续随机过程,但是如遇战争等突发事件大概率会导致原油价格出现跃动,并且会影响很多相关产业^[4-6]. 在此方面,很多学者也进行了分析研究,并得出相关的实用性模型^[7-9].

文献[10] 将跳跃扩散过程引入到石油期货价格的定价模型中,揭示了期货价格的变化特征. 文献[11] 研究了天然气价格跳跃下的期货动态定价模型. 文献[12] 则通过商品期货研究,建立了跳跃-扩散模型,其模型表示如下:

$$d\mathbf{X}_t = \mu(\mathbf{X}_t) dt + \sigma(\mathbf{X}_t) dW_t + J dN_t(\lambda)$$

其中: $\mathbf{X}_t$ 为标的资产的状态向量, $J dN_t(\lambda)$ 是跳跃强度为 λ 的跳跃过程, J 为跳跃强度.

依据受 2020 年疫情影响的我国原油期货价格特征,本文在文献[13] 三因素原油期货定价模型的基础上考虑价格的跳跃性,并结合现货价格^[14-15] 的相关关系进行建模研究.

首先设现货价格取自然对数后可以分解如下:

$$\ln S_t = X_{1t} + X_{2t} + X_{3t}$$

其中: 短期偏离 X_{1t} 和中期偏离 X_{2t} 均服从 O-U 过程,期望为 0, 而长期均衡 X_{3t} 服从布朗运动. 其模型如下:

$$\begin{cases} dX_{1t} = -(k_1 X_{1t} + c_1) dt + \sigma_1 dW_1 + J_1 dN_1 \\ dX_{2t} = -(k_2 X_{2t} + c_2) dt + \sigma_2 dW_2 + J_2 dN_2 \\ dX_{3t} = \mu dt + \sigma_3 dW_3 + J_3 dN_3 \end{cases}$$

其中: k_1, k_2 分别为短期偏离变量、中期偏离变量的均值回复率; μ 为长期均衡变量的漂移率; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 分别为 X_{1t}, X_{2t}, X_{3t} 的波动率; dW_1, dW_2, dW_3 分别为 X_{1t}, X_{2t}, X_{3t} 的标准布朗运动增量,且有

$$dW_1 \cdot dW_2 = \rho_1 dt, dW_2 \cdot dW_3 = \rho_2 dt, dW_3 \cdot dW_1 = \rho_3 dt$$

N_1, N_2 和 N_3 分别表示跳跃强度 h_1, h_2 和 h_3 的泊松过程, J_1, J_2 和 J_3 分别为 X_{1t}, X_{2t} 和 X_{3t} 的跳跃度大小, N_1, N_2 和 N_3 相互独立. 为了更好地推导出期货价格的解析解,选择跳跃度大小满足正态分布. 假设 $J_i (i=1, 2, 3)$ 服从正态分布,即

$$J_i \sim N(\gamma_i, \delta_i^2), i=1, 2, 3$$

另外,为了确保 x_{1t} 和 x_{2t} 的长期零均值,分别定义 c_1 和 c_2 为 $c_1 = h_1 \gamma_1, c_2 = h_2 \gamma_2$.

为合理求得期货价格,加入风险溢价因子,建立本文研究的模型如下:

$$\begin{cases} dX_{1t} = -(k_1 X_{1t} + c_1 + \lambda_1) dt + \sigma_1 dW_1 + J_1 dN_1 \\ dX_{2t} = -(k_2 X_{2t} + c_2 + \lambda_2) dt + \sigma_2 dW_2 + J_2 dN_2 \\ dX_{3t} = (\mu - \lambda_3) dt + \sigma_3 dW_3 + J_3 dN_3 \end{cases} \quad (1)$$

1 模型的解析解

针对带有跳跃性因素的原油期货定价模型(1), 对其进行求解, 得到原油期货的定价公式. 求解步骤如下:

1) 求解 X_{1t}, X_{2t}, X_{3t}

对(1) 式中的第一个等式同乘 e^{k_1t} 并且移项, 且由微分 $d(uv) = u dv + v du$ 得

$$d(e^{k_1t} X_{1t}) = -\frac{c_1}{k_1} de^{k_1t} - \frac{\lambda_1}{k_1} de^{k_1t} + e^{k_1t} \sigma_1 dW_1 + e^{k_1t} J_1 dN_1$$

两边积分得

$$e^{k_1t} X_{1t} - X_{10} = -\frac{c_1}{k_1} (e^{k_1t} - 1) - \frac{\lambda_1}{k_1} (e^{k_1t} - 1) + \int_0^t e^{k_1s} \sigma_1 dW_1(s) + \int_0^t e^{k_1s} J_1 dN_1(s)$$

移项同时除以 e^{k_1t} , 即得 X_{1t} 的表达式为

$$X_{1t} = e^{-k_1t} X_{10} - \frac{c_1}{k_1} (1 - e^{-k_1t}) - \frac{\lambda_1}{k_1} (1 - e^{-k_1t}) + \int_0^t e^{k_1(s-t)} \sigma_1 dW_1(s) + \int_0^t e^{k_1(s-t)} J_1 dN_1(s)$$

同理由(1) 式中的第二个等式求得 X_{2t} 的表达式为

$$X_{2t} = e^{-k_2t} X_{20} - \frac{c_2}{k_2} (1 - e^{-k_2t}) - \frac{\lambda_2}{k_2} (1 - e^{-k_2t}) + \int_0^t e^{k_2(s-t)} \sigma_2 dW_2(s) + \int_0^t e^{k_2(s-t)} J_2 dN_2(s)$$

对(1) 式中的第三个等式两边积分并移项即得 X_{3t} 的表达式为

$$X_{3t} = X_{30} + (\mu - \lambda_3)t + \int_0^t \sigma_3 dW_3(s) + \int_0^t J_3 dN_3(s)$$

2) 求解 $\ln S_t$ 的期望

为了求得期货价格, 先求解 $\ln S_t$ 的期望和方差. 按期望性质首先有

$$E(\ln S_t) = EX_{1t} + EX_{2t} + EX_{3t}$$

由 $dW_i(s) = \sqrt{\Delta s} U_i, i = 1, 2, 3$, 本文中 $\Delta s, \Delta t$ 都表示时间增量, 故有

$$E\left[\int_0^t e^{k_1(s-t)} \sigma_1 dW_1(s)\right] = E\left[\int_0^t e^{k_1(s-t)} \sigma_1 U_1 \sqrt{ds}\right] = \int_0^t E(e^{k_1(s-t)} \sigma_1 U_1) \sqrt{ds}$$

又 $EU_1 = 0$, 所以

$$E\left[\int_0^t e^{k_1(s-t)} \sigma_1 dW_1(s)\right] = 0$$

由泊松过程的定义知

$$E[dN(s)] = d[0 \times P(N = 0) + 1 \times (\lambda t + o(\Delta t)) + (N(s) \geq 2) \times o(\Delta t)] = d(\lambda t)$$

即得

$$E[dN_i(s)] = d(h_i s), i = 1, 2, 3$$

从而

$$E\left[\int_0^t J_1 e^{k_1(s-t)} dN_1(s)\right] = \int_0^t E[J_1 e^{k_1(s-t)} dN_1(s)] = \int_0^t \gamma_1 e^{k_1(s-t)} E[dN_1(s)] = \frac{\gamma_1 h_1}{k_1} (1 - e^{-k_1t})$$

由此得到 X_{1t} 的期望, 同理可得 X_{2t} 和 X_{3t} 的期望, 它们分别为

$$EX_{1t} = e^{-k_1t} X_{10} - \frac{(1 - e^{-k_1t}) \lambda_1}{k_1}, EX_{2t} = e^{-k_2t} X_{20} - \frac{(1 - e^{-k_2t}) \lambda_2}{k_2}, EX_{3t} = X_{30} + (\mu - \lambda_3 + \gamma_3 h_3)t$$

进而可得 $\ln S_t$ 的期望:

$$E(\ln S_t) = EX_{1t} + EX_{2t} + EX_{3t} = e^{-k_1t} X_{10} - \frac{(1 - e^{-k_1t}) \lambda_1}{k_1} + e^{-k_2t} X_{20} - \frac{(1 - e^{-k_2t}) \lambda_2}{k_2} + X_{30} + (\mu - \lambda_3 + \gamma_3 h_3)t$$

3) 求解 $\ln S_t$ 的方差

按方差的性质有

$$D[\ln S_t] = D[X_{1t} + X_{2t} + X_{3t}] = DX_{1t} + DX_{2t} + DX_{3t} + \\ 2\text{Cov}(X_{1t}, X_{2t}) + 2\text{Cov}(X_{1t}, X_{3t}) + 2\text{Cov}(X_{2t}, X_{3t})$$

首先求解 X_{1t}, X_{2t}, X_{3t} 的方差:

$$\text{Cov}(X_{1t}, X_{1r}) = E(X_{1t} \cdot X_{1r}) - EX_{1t}EX_{1r} =$$

$$E\left\{\left[e^{-k_1 t} X_{10} - \frac{c_1}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) - \frac{\lambda_1}{k_1}(1 - e^{-k_1 t}) + \int_0^t e^{k_1(s-t)} \sigma_1 dW_1(s_1) + \int_0^t e^{k_1(s-t)} J_1 dN_1(s)\right] \cdot \right. \\ \left. \left[e^{-k_1 r} X_{10} - \frac{c_1}{k_1}(1 - e^{-k_1 r}) - \frac{\lambda_1}{k_1}(1 - e^{-k_1 r}) + \int_0^r e^{k_1(s-r)} \sigma_1 dW_1(s_2) + \int_0^r e^{k_1(s-r)} J_1 dN_1(s)\right]\right\} - \\ \left(e^{-k_1 t} X_{10} - \frac{(1 - e^{-k_1 t})\lambda_1}{k_1}\right) \cdot \left(e^{-k_1 r} X_{10} - \frac{(1 - e^{-k_1 r})\lambda_1}{k_1}\right) \\ DX_{1t} = \int_0^t E[(\sigma_1 e^{k_1(s_1-t)})^2] ds_1 + \frac{2t}{\delta_1^2} = \int_0^t \sigma_1^2 e^{2k_1(s_1-t)} ds_1 + \frac{2t}{\delta_1^2} = \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1 t}) + \frac{2t}{\delta_1^2}$$

同理求得

$$DX_{2t} = \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2 t}) + \frac{2t}{\delta_2^2}, DX_{3t} = \sigma_3^2 t + \delta_3^2 t$$

接下来求解 $\text{Cov}(X_{1t}, X_{2t}), \text{Cov}(X_{1t}, X_{3t}), \text{Cov}(X_{2t}, X_{3t})$

$$\text{Cov}(X_{1t}, X_{2t}) = E(X_{1t}X_{2t}) - EX_{1t}EX_{2t} =$$

$$E\left\{\left[\int_0^t e^{k_1(s-t)} \left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) dW_1(s)\right] \cdot \left[\int_0^t e^{k_2(s-t)} \left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) dW_2(s)\right]\right\} = \\ \left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) E\left[\int_0^t e^{(k_1+k_2)(s-t)} dW_1(s) dW_2(s)\right] = \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) \rho_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1+k_2)t})$$

同理求得

$$\text{Cov}(X_{1t}, X_{3t}) = \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \sigma_3 \rho_3}{k_1} (1 - e^{-k_1 t}), \text{Cov}(X_{2t}, X_{3t}) = \frac{\left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) \sigma_3 \rho_2}{k_2} (1 - e^{-k_2 t})$$

进而可得 $\ln S_t$ 的方差:

$$D[\ln S_t] = \frac{\sigma_1^2}{2k_1}(1 - e^{-2k_1 t}) + \frac{2t}{\delta_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{2k_2}(1 - e^{-2k_2 t}) + \frac{2t}{\delta_2^2} + \sigma_3^2 t + \delta_3^2 t + \\ \frac{2\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) \rho_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1+k_2)t}) + \frac{2\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \sigma_3 \rho_3}{k_1} (1 - e^{-k_1 t}) + \frac{2\left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) \sigma_3 \rho_2}{k_2} (1 - e^{-k_2 t})$$

4) 模型的解析解

由对数正态分布的特性 $\ln E[S_t] = E[\ln S_t] + \frac{1}{2} D[\ln S_t]$ 可知, 若给定状态变量初始值, 根据 $F(0, t) =$

$E[S_t]$ 得到初始时刻的期货价格解析解:

$$\ln F(0, t) = e^{-k_1 t} X_{10} - \frac{(1 - e^{-k_1 t})\lambda_1}{k_1} + e^{-k_2 t} X_{20} - \frac{(1 - e^{-k_2 t})\lambda_2}{k_2} + X_{30} + (\mu - \lambda_3 + \gamma_3 h_3)t + \\ \frac{\sigma_1^2}{4k_1}(1 - e^{-2k_1 t}) + \frac{t}{\delta_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{4k_2}(1 - e^{-2k_2 t}) + \frac{t}{\delta_2^2} + \frac{\sigma_3^2 t + \delta_3^2 t}{2} + \\ \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right) \rho_1}{k_1 + k_2} (1 - e^{-(k_1+k_2)t}) + \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right) \sigma_3 \rho_3}{k_1} (1 - e^{-k_1 t}) +$$

$$\frac{\left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right)\sigma_3\rho_2}{k_2}(1 - e^{-k_2 t})$$

所以 t 时刻的期货价格解析解:

$$\begin{aligned} \ln F(t, T) = & e^{-k_1 t} X_{1t} - \frac{(1 - e^{-k_1(T-t)})\lambda_1}{k_1} + e^{-k_2(T-t)} X_{2t} - \frac{(1 - e^{-k_2(T-t)})\lambda_2}{k_2} + X_{3t} + (\mu - \lambda_3 + \gamma_3 h_3)(T-t) + \\ & \frac{\sigma_1^2}{4k_1}(1 - e^{-2k_1(T-t)}) + \frac{(T-t)}{\delta_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{4k_2}(1 - e^{-2k_2(T-t)}) + \frac{(T-t)}{\delta_2^2} + \frac{\sigma_3^2(T-t) + \delta_3^2(T-t)}{2} + \\ & \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right)\left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right)\rho_1}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)(T-t)}) + \frac{\left(\sigma_1 + \frac{1}{\delta_1}\right)\sigma_3\rho_3}{k_1}(1 - e^{-k_1(T-t)}) + \\ & \frac{\left(\sigma_2 + \frac{1}{\delta_2}\right)\sigma_3\rho_2}{k_2}(1 - e^{-k_2(T-t)}) \end{aligned} \quad (2)$$

其中 T 为期货到期期限, (2) 式即为考虑跳跃性因素的原油期货定价模型的解析解。

2 模型的参数估计

若一天内只发生一次跳跃, 则泊松过程就是伯努利过程, 将(1)式离散化并移项得

$$x_{1t} = (1 - k_1 \Delta t) x_{1t-\Delta t} - \lambda_1 \Delta t + \sigma_1 \sqrt{\Delta t} U_1 + J_1 B_1$$

同理求得

$$x_{2t} = (1 - k_2 \Delta t) x_{2t-\Delta t} - \lambda_2 \Delta t + \sigma_2 \sqrt{\Delta t} U_2 + J_2 B_2$$

$$x_{3t} = (\mu - \lambda_3) \Delta t + x_{3t-\Delta t} + \sigma_3 \sqrt{\Delta t} U_3 + J_3 B_3$$

其中: $U_i (i=1, 2, 3)$ 为标准正态随机变量, $B_i (i=1, 2, 3)$ 为独立的伯努利随机变量, 且有

$$P(B_i = 1) = h_i \Delta t, P(B_i = 0) = 1 - h_i \Delta t, i = 1, 2, 3$$

本文给出如下记号:

$$\begin{cases} w_t^1 = x_{1t} - (1 - k_1 \Delta t) x_{1t-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t = \sigma_1 \sqrt{\Delta t} U_1 + J_1 B_1 \\ w_t^2 = x_{2t} - (1 - k_2 \Delta t) x_{2t-\Delta t} + \lambda_2 \Delta t = \sigma_2 \sqrt{\Delta t} U_2 + J_2 B_2 \\ w_t^3 = x_{3t} - x_{3t-\Delta t} - (\mu - \lambda_3) \Delta t = \sigma_3 \sqrt{\Delta t} U_3 + J_3 B_3 \end{cases}$$

其中 $w_t^1 = x_{1t} - (1 - k_1 \Delta t) x_{1t-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t = \sigma_1 \sqrt{\Delta t} U_1 + J_1 B_1$.

我们选取 n 个 $\Delta x_{1t} = x_{1t} - x_{1t-\Delta t}$ 数据, 由于 Δx_{1t} 服从正态分布, 剔除异常数据后计算出均值 $\overline{\Delta x_{1t}}$, 方差 s . 本文由 $(\overline{\Delta x_{1t}} - 3s, \overline{\Delta x_{1t}} + 3s)$ 之外的数据获得 m_1 个跳跃数据.

$n - m_1$ 个正常数据的密度函数为

$$f(w_j^1) = f(\sigma_1 \sqrt{\Delta t} U_1 + J_1 B_1 | B_1 = 0) f(B_1 = 0) = (1 - h_1 \Delta t) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 \Delta t}} e^{-\frac{(x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t) x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2}{2\sigma_1^2 \Delta t}}$$

样本的似然函数为

$$L(\Theta_1) = \prod_{j=1}^{n-m_1} f(w_j^1) = (1 - h_1 \Delta t)^{n-m_1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-m_1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma_1^2 \Delta t}\right)^{\frac{n-m_1}{2}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t) x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2}{2\sigma_1^2 \Delta t}}$$

需要估计的参数有 $\Theta_1 = \{k_1, \lambda_1, \sigma_1\}$, 对数似然函数为:

$$\ln \prod_{j=1}^{n-m_1} f(w_j^1) = (n - m_1) \ln(1 - h_1 \Delta t) - \frac{n - m_1}{2} \ln(2\pi) - \frac{n - m_1}{2} \ln(\sigma_1^2 \Delta t) -$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2}{2\sigma_1^2 \Delta t}$$

进而似然方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln \prod_{j=1}^{n-m_1} f(w_j^1)}{\partial k_1} = \frac{-\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t) \cdot \Delta t x_{1j-\Delta t}}{\sigma_1^2 \Delta t} = 0 \\ \frac{\partial \ln \prod_{j=1}^{n-m_1} f(w_j^1)}{\partial \lambda_1} = \frac{-\Delta t \sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)}{\sigma_1^2 \Delta t} = 0 \\ \frac{\partial \ln \sum_{t=1}^{n-m_1} f(w_t^1)}{\partial \sigma_1^2} = \frac{-\frac{n-m_1}{2}}{\sigma_1^2} + \frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2}{2\Delta t (\sigma_1^2)^2} = 0 \end{cases}$$

即得方程组

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t) \cdot x_{1j-\Delta t} = 0 \\ \sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t) = 0 \\ (n - m_1)\sigma_1^2 \Delta t + \sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$k_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j-\Delta t})^2 + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j-\Delta t}\right)^2}{m_1 - n} - \sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j} x_{1j-\Delta t} - \frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j} \sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j-\Delta t}}{m_1 - n}}{\Delta t \sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j-\Delta t})^2 + \frac{\Delta t \left(\sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j-\Delta t}\right)^2}{m_1 - n}}$$

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j} - \sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j-\Delta t} + k_1 \Delta t \sum_{j=1}^{n-m_1} x_{1j-\Delta t}}{\Delta t (m_1 - n)}, \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n-m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t)^2}{(m_1 - n) \Delta t}$$

m_1 个跳跃数据 w_t^1 的密度函数为

$$f(w_j^1) = f(\sigma_1 \sqrt{\Delta t} U_1 + J_1 B \mid B=1) f(B=1) = (h_1 \Delta t) \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2}} e^{-\frac{(x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)^2}{2(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)}}$$

样本的似然函数为

$$L(\Theta_1) = \prod_{j=1}^{m_1} f(w_j^1) = (h_1 \Delta t)^{m_1} \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{m_1}{2}} \left(\frac{1}{\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2}\right)^{\frac{m_1}{2}} e^{-\frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)^2}{2(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)}}$$

需要估计的参数 $\Theta_2 = \{\gamma_1, \delta_1\}$, 对数似然函数为

$$\ln \prod_{j=1}^{m_1} f(w_j^1) = m_1 \ln(h_1 \Delta t) - \frac{m_1}{2} \ln(2\pi) - \frac{m_1}{2} \ln(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2) - \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)^2}{2(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)}$$

进而得似然方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln \sum_{j=1}^{m_1} f(w_j^1)}{\partial \delta_1^2} = \frac{-\frac{m_1}{2}}{(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)} + \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)^2}{2(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial \ln \prod_{j=1}^{m_1} f(w_j^1)}{\partial \gamma_1} = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)}{(\sigma_1^2 \Delta t + \delta_1^2)} = 0 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} \delta_1^2 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} (x_{1j} - (1 - k_1 \Delta t)x_{1j-\Delta t} + \lambda_1 \Delta t - \gamma_1)^2 - m_1 \sigma_1^2 \Delta t}{m_1} \\ \gamma_1 = \frac{\sum_{j=1}^{m_1} x_{1j} - \sum_{j=1}^{m_1} x_{1j-\Delta t} + k_1 \Delta t \sum_{j=1}^{m_1} x_{1j-\Delta t} + m_1 \lambda_1 \Delta t}{m_1} \end{cases}$$

同理得

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-m_2} (x_{2j-\Delta t})^2 + \frac{\left(\sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j-\Delta t}\right)^2}{m_2 - n} - \sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j} x_{2j-\Delta t} - \frac{\sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j} \sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j-\Delta t}}{m_2 - n}}{\Delta t \sum_{j=1}^{n-m_2} (x_{2j-\Delta t})^2 + \frac{\Delta t \left(\sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j-\Delta t}\right)^2}{m_2 - n}} \\ \lambda_2 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j} - \sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j-\Delta t} + k_2 \Delta t \sum_{j=1}^{n-m_2} x_{2j-\Delta t}}{\Delta t (m_2 - n)} \\ \sigma_2^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-m_2} (x_{2j} - (1 - k_2 \Delta t)x_{2j-\Delta t} + \lambda_2 \Delta t)^2}{(m_2 - n) \Delta t} \\ \gamma_2 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_2} x_{2j} - \sum_{j=1}^{m_2} x_{2j-\Delta t} + k_2 \Delta t \sum_{j=1}^{m_2} x_{2j-\Delta t} + m_2 \lambda_2 \Delta t}{m_2} \\ \delta_2^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_2} (x_{2j} - (1 - k_2 \Delta t)x_{2j-\Delta t} + \lambda_2 \Delta t - \gamma_2)^2 - m_2 \sigma_2^2 \Delta t}{m_2} \\ \mu - \lambda_3 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-m_3} x_{3j} - \sum_{j=1}^{n-m_3} x_{3j-\Delta t}}{(n - m_3) \Delta t} \\ \sigma_3^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{n-m_3} (x_{3j} - x_{3j-\Delta t} - (\mu - \lambda_3) \Delta t)^2}{(n - m_3) \Delta t} \\ \gamma_3 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_3} x_{3j} - \sum_{j=1}^{m_3} x_{3j-\Delta t} - m_3 (\mu - \lambda_3) \Delta t}{m_3} \\ \delta_3^2 &= \frac{\sum_{j=1}^{m_3} (x_{3j} - x_{3j-\Delta t} - (\mu - \lambda_3) \Delta t)^2 - m_3 \sigma_3^2 \Delta t}{m_3} \end{aligned}$$

至此, 考虑跳跃性因素的原油期货定价模型中的所有参数有了详细的估计公式. 利用此定价公式和参数估计方法, 可以依据疫情环境下具体原油期货合约的数据, 对跳跃性因素下的原油期货进行分析和定价.

3 基于我国原油期货合约的实证分析

采用平均绝对误差(MAE) 和均方根误差(RMSE) 统计量, 评价模型的拟合和预测能力^[14], 公式如下:

$$F_{\text{MAE}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{F}(t, T) - F(t, T))$$

(3)

$$F_{\text{RMSE}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{F}(t, T) - F(t, T))^2}$$

(4)

其中: $\tilde{F}(t, T)$ 为预测值; $F(t, T)$ 为真实值.

3.1 参数估计

选取上海期货交易所的 4 种短期主力合约(期限均为 1 年), 选取 4 种长期合约(期限均为 3 年). 将 4 种长期期货合约价格的对数均值作为长期均衡变量的观测值; 将所有长期合约价格的均值对数值减去所有短期合约价格的均值对数值的结果作为短期偏离的观测值; 将现货价格的对数值减去短期偏离值和长期均衡值之和所得的差值做为中期偏离的数值; 原油现货价格从 Choice 金融终端软件取得. 选取上海期货交易所的 4 种短期主力合约(期限均为 1 年), 短期期货合约代码分别为 sc1907,sc1908,sc1909,sc1910; 选取 4 种长期合约(期限均为 3 年), 长期合约代码分别为 sc2103,sc2106,sc2109,sc2112. 将 2019 年 1 月至 6 月的期货合约数据按上述方法处理后得到短期偏离、中期偏离、长期均衡值. 在数据日期选择方面, 由于上海期货交易中心在法定节假日没有期货合约交易数据, 所以本文剔除了大庆原油现货价格法定节假日的数据, 以便与上海原油期货价格数据保持一致. 由三因素原油期货定价模型的参数估计表达式, 利用 excel 表格进行模型参数的计算, 得到三因素原油期货定价模型的参数如表 1 所示.

表 1 三因素原油期货定价模型参数估计

参数	k_1	λ_1	σ_1	k_2	λ_2	σ_2	$\mu - \lambda_3$	σ_3	ρ_1	ρ_2	ρ_3
估计值	0.061 5	0.030 5	0.031 6	0.100 3	0.014 0	0.026 5	0.051 4	0.052 0	0.146 9	-0.005 0	0.0513

我们选取上海期货交易所的 4 种短期主力合约(期限均为 1 年), 短期期货合约代码分别为 sc2007, sc2008,sc2009,sc2010; 选取 4 种长期合约(期限均为 3 年), 长期期货合约代码分别为 sc2203,sc2206, sc2209,sc2212. 短期偏移变量、中期偏移变量、长期均衡变量的取值均按照上述方法获得. 对 2020 年 1 月至 6 月的期货合约数据进行参数的估计, 同样剔除了大庆原油现货价格法定节假日的数据. 由模型的参数估计方法, 在 $n=116$ 个数据中经过计算得到 3 类跳跃数据, 其数据量分别为 $m_1=43$, $m_2=67$, $m_3=36$, 计算出 $h_3=0.310\ 3$. 利用 excel 表格进行参数的计算, 得到带有跳跃性因素的原原油期货定价模型的参数如表 2 所示.

表 2 考虑跳跃性因素的原原油期货定价模型参数估计

参数	k_1	λ_1	σ_1	γ_1	δ_1	ρ_1	k_2	λ_2	γ_2
估计值	0.680 4	0.235 1	0.532 6	0.472	0.392	0.593	0.793 2	0.482	0.450 8
参数	δ_2	ρ_2	$\mu - \lambda_3$	σ_3	γ_3	δ_3	ρ_3	σ_2	
估计值	0.538 8	0.893 8	0.950 4	0.236 6	0.493 2	0.673 8	0.040	0.447 2	

3.2 模型拟合能力和预测能力

利用三因素原油期货定价模型对 sc1911 原油期货进行预测, 预测期限为 2019 年 8 月. 依据三因素原油期货定价模型的解析解公式得出预测值, 依据上海期货交易所的每日结算价得到原油期货合约的真实值. 对两种数据的比较结果见表 3.

表 3 2019 年 8 月原油期货真实值与三因素原油期货定价模型对 sc1911 的预测值 /元

日期	1 日	2 日	5 日	6 日	7 日	8 日	9 日	12 日	14 日
真实值	446.8	433.9	435.8	431.2	425	409.6	409.6	418.2	427.2
预测值	445.2	432.9	435	430.5	423.2	410.1	409.9	417.8	426.4
日期	15 日	16 日	19 日	20 日	21 日	22 日	23 日	26 日	
真实值	419.1	414.8	418.7	425.4	422.9	428.4	425.5	420.9	
预测值	418.8	413.1	417.6	421.1	420.5	426.9	424	418.1	

利用三因素原油期货定价模型对 sc2108 原油期货合约进行预测, 预测期限为 2020 年 8 月. 依据三因素原油期货定价模型的解析解公式得出预测值, 通过上海期货交易所的每日结算价得到原油期货合约的真实值, 如表 4 所示.

表 4 2020 年 8 月原油期货真实值与三因素原油期货定价模型对 sc2108 的预测值 /元

日期	4 日	5 日	6 日	7 日	10 日	11 日	12 日	13 日	14 日	17 日
真实值	363.3	366.8	367.2	364.2	361.7	361.7	361.6	359.1	361	358.6
预测值	444.4	440.6	434.3	429.3	426.2	430	425.4	434.3	424.7	437.8

日期	18 日	19 日	20 日	21 日	24 日	25 日	26 日	27 日	28 日
真实值	358.6	358.1	356.6	355.7	365.2	368.1	368.1	369.1	369.1
预测值	441.6	425	428.8	433.3	432.7	419.6	433.1	421.4	433.1

为了更精确得到模型的拟合和预测能力, 本文给出了模型的拟合能力评价标准, 利用公式(3)和公式(4)对三因素模型得到的预测值与真实值进行计算, 得到三因素原油期货模型拟合能力评价价值如表 5 所示.

表 5 三因素原油期货定价模型拟合能力评价价值

	sc1911	sc2108
F_{MAE}	-1.422 7	68.02
F_{RMSE}	1.814 1	68.584 7

由于模型拟合能力评价价值越小说明模型的预测能力越好, 从表 5 中得出三因素模型对 2019 年的原油期货合约预测能力较好, 对于 2020 年该模型的预测能力较差.

利用带有跳跃性因素原油期货定价模型对 sc2108 原油期货进行预测, 预测期限为 2020 年 8 月. 依据考虑跳跃性因素的原油期货定价模型解析解公式(2)得出预测值, 通过上海期货交易所的每日结算价得到 sc2108 原油期货合约的真实值, 如表 6 所示.

表 6 2020 年 8 月原油期货真实值与考虑跳跃性因素的原油期货定价模型对 sc2108 的预测值 /元

日期	4 日	5 日	6 日	7 日	10 日	11 日	12 日	13 日	14 日	17 日
真实值	363.3	366.8	367.2	364.2	361.7	361.7	361.6	359.1	361	358.6
预测值	367.4	364.3	361.8	359.4	362	361.9	359.4	359.7	361.3	361.3

日期	18 日	19 日	20 日	21 日	24 日	25 日	26 日	27 日	28 日
真实值	358.6	358.1	356.6	355.7	365.2	368.1	368.1	369.1	369.1
预测值	362.6	362.1	362.1	361.1	359.1	361.9	364.5	361.3	362.6

依据预测值和真实值数据绘制出对比图(图 1).

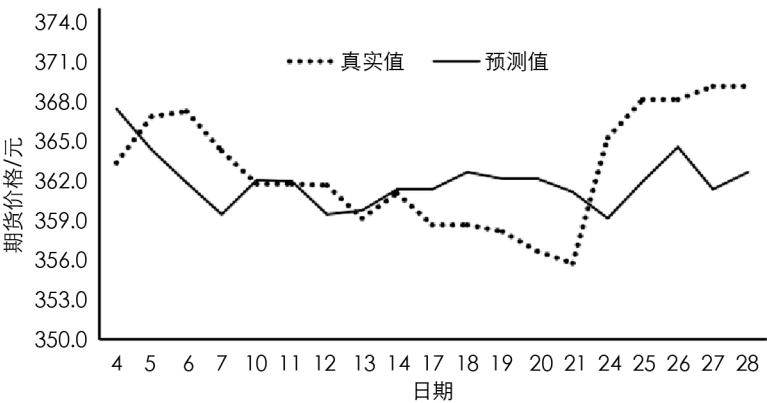


图 1 2020 年 8 月原油期货真实值与考虑跳跃性因素的原油期货定价模型对 sc2108 的预测值对比

进一步给出模型的拟合能力评价标准. 利用公式(3)和公式(4)对考虑跳跃性因素的原油期货定价模型得到的预测值与真实值进行拟合能力评价, 其中: $F_{MAE} = -0.535$, $F_{RMSE} = 3.7637$.

经与表5中得出的拟合能力评价值比较, 三因素模型对2019年的原油期货合约预测能力较好, 对于2020年该模型的预测能力较差. 考虑跳跃性因素的原油期货模型对受疫情影响的2020年的原油期货价格的预测能力较好, 说明该模型具有一定的科学性和实用性, 可为从事原油期货的研究及实务人员从事相关研究和实务操作提供一定的理论依据和参考信息.

参考文献:

- [1] GIBSON R, SCHWARTZ E S. Stochastic Convenience Yield and the Pricing of Oil Contingent Claims [J]. The Journal of Finance, 1990, 45(3): 959-976.
- [2] SCHWARTZ E, SMITH J E. Short-Term Variations and Long-Term Dynamics in Commodity Prices [J]. Management Science, 2000, 46(7): 893-911.
- [3] 王苏生, 王丽, 李志超, 等. 基于卡尔曼滤波的期货价格仿射期限结构模型 [J]. 系统工程学报, 2010, 25(3): 346-353.
- [4] 吴刚. 股指期货的运作机制及其投资策略研究 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2001, 26(6): 645-649.
- [5] 张振利, 彭柳. 上海原油期货与国际原油期货间相关性分析 [J]. 上海企业, 2022(11): 82-87.
- [6] 刘强, 王沛. 中国原油期货定价权的动态时变特征研究 [J]. 对外经贸, 2022(7): 24-27.
- [7] 曲传菊, 杨皎平. 基于小波去噪和协整理论的股指期货高频数据跨期择时套利策略 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(3): 73-79.
- [8] 袁姣荷. 股指期货对A股市场投资风险影响的实证分析 [D]. 重庆: 西南大学, 2016.
- [9] 郭子敏. 基于时变 copula 的中国原油期货和十大行业指数的风险传染研究 [D]. 重庆: 西南大学, 2021.
- [10] 姚慧, 范龙振. 石油价格跳跃下期货价格动态模型及实证分析 [J]. 系统工程学报, 2011, 26(2): 181-187.
- [11] 邢文婷, 吴胜利. 天然气价格跳跃下的期货定价动态模型及实证研究 [J]. 系统科学与数学, 2017, 37(9): 1988-1998.
- [12] 何晓燕. 我国商品期货定价: 跳跃—扩散模型研究 [D]. 北京: 北方工业大学, 2013.
- [13] 王苏生, 王丽, 陈搏, 等. 基于卡尔曼滤波的期货价格期限结构模型 [J]. 运筹与管理, 2010, 19(1): 113-118, 175.
- [14] 汪兴瑞. 我国原油期现价关系的研究 [D]. 延安: 延安大学, 2019.
- [15] 郑亚秋. 石油期货价格的波动性研究 [D]. 重庆: 西南大学, 2011.

责任编辑 张杓