

一类具有时滞的营养-微生物扩散模型的 Hopf 分支研究^①

王雅迪¹, 袁海龙^{1,2}

1. 陕西科技大学 数学与数据科学学院, 西安 710021; 2. 西安交通大学 数学与统计学院, 西安 710049

摘要: 本文主要研究在齐次 Neumann 边界条件下的一类具有时滞的营养-微生物扩散模型. 首先, 以时滞参数作为分支参数, 研究时滞效应对该模型正常数平衡点稳定性的影响, 并得到产生 Hopf 分支的条件; 其次, 利用偏泛函微分方程的规范型理论和中心流形定理, 给出 Hopf 分支方向和分支周期解的稳定性; 最后, 借助 MATLAB 软件进行数值模拟, 验证结论.

关键词: 时滞; 营养-微生物模型; Hopf 分支; 数值模拟

中图分类号: O175.12

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)05-0001-13

Hopf Bifurcation Analysis in the Diffusive Nutrient-Microorganism Model with Time Delay

WANG Yadi¹, YUAN Hailong^{1,2}

1. School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China;

2. School of Mathematics and Statistics, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China

Abstract: In this paper, the diffusive nutrient-microorganism model with time delay subject to Neumann boundary conditions is mainly investigated. Firstly, the influence of time delay effect on the stability of the positive constant equilibrium for the model is studied by taking the time delay as the bifurcation parameter, and the condition for occurrence of Hopf bifurcation is obtained. Secondly, the direction of the Hopf bifurcation and the stability of the bifurcating periodic solutions are also given by applying the normal form theory and center manifold theorem for partial differential equation. Finally, some numerical simulations are carried out with the help of MATLAB software to verify the conclusion.

Key words: time delay; nutrient-microorganism model; Hopf bifurcation; numerical simulations

近年来, 许多学者都非常关注海洋沉积物中生物化学反应现象的研究. 为探究出系统的一些典型动力学行为, 文献[1]提出了关于海洋沉积物的如下营养-微生物模型:

① 收稿日期: 2022-06-28

基金项目: 国家自然科学基金项目(11901370, 11771262); 陕西省自然科学基金基础研究计划项目(2019JQ-516); 陕西省教育厅专项科研计划项目(19JK0142).

作者简介: 王雅迪, 硕士研究生, 主要从事反应扩散方程的研究.

通信作者: 袁海龙, 讲师, 博士.

$$\begin{cases} \frac{dB}{dT} = \alpha \frac{B}{B+L} BN - mB \\ \frac{dN}{dT} = \Phi(\hat{N} - N) - \beta \frac{B}{B+L} BN \end{cases} \quad (1)$$

其中 B 和 N 分别表示细菌和营养物的生物量浓度; α 表示生物量转化速率; m 是死亡率; L 是半饱和系数; β 是捕获率; Φ 表示沉积物与海水之间的导水率; $\hat{N}$ 表示 N 在外部海水中的浓度; 模型中所有参数均为正数. 关于系统(1)的更多生物学意义可参见文献[1-3].

为了书写方便, 作无量纲变换, 令

$$N = \frac{m}{\alpha} v \quad \hat{N} = \frac{m}{\alpha} b \quad B = \frac{\Phi}{\beta} u \quad L = \frac{\Phi}{\beta} K \quad T = \frac{1}{\Phi} t$$

得到简化后的系统

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{m}{\Phi} \left(\frac{u}{u+K} uv - u \right) \\ \frac{dv}{dt} = b - v - \frac{u}{u+K} uv \end{cases} \quad (2)$$

其中 u 和 v 分别表示细菌和营养物的生物量浓度. 对系统(2) 加入扩散项后考虑如下反应扩散模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = au \left(\frac{uv}{u+K} - 1 \right) & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = b - v - \frac{u^2 v}{u+K} & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\nu} u = \partial_{\nu} v = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \geq 0, v(x, 0) = v_0(x) \geq 0 & x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$) 为具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开集; ν 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量; Δ 是拉普拉斯算子; d_1 和 d_2 分别表示细菌和营养物的扩散系数, 均为正常数; 且系数 $a = \frac{m}{\Phi}$.

对于系统(3), 文献[1]主要研究了其 Turing 模式, 发现由于 Turing 不稳定导致物种的异质分布现象, 找到了非平凡平衡点失稳的条件; 文献[2]利用空间分解定理和隐函数定理研究了系统(3)的稳态分支, 并详细讨论了 Hopf 分支的存在性与稳定性; 文献[3]研究了 Turing 不稳定性、非常数稳态解的存在性, 并利用分支理论研究了系统(3)的局部和全局分支结构.

为了反映出系统的动力学行为不仅受当前状态的影响, 还依赖于过去某一时刻的状态, 众多学者围绕时滞微分方程进行了研究, 取得了许多丰富且有意义的成果^[4-12]. 例如, 文献[4]研究了时滞效应对一类具有 Holling II 功能反应的捕食食饵模型的影响, 结果表明, 当时滞参数较大时, 系统会表现出稳定的振荡行为; 文献[5]的研究结果显示, 当系统经过某些稳定性开关后, 平衡点会由稳定变成不稳定, 并且当时滞参数取某些临界值时, 系统会产生 Hopf 分支; 文献[6]证明了系统的正平衡点在时滞小于某个临界值时是稳定的, 而当时滞超过该临界值时, 正平衡点变得不稳定; 文献[7]在给模型引入两个不同时滞的条件下, 研究了系统唯一正平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性; 文献[8]考虑了在 Dirichlet 边界条件下时滞效应对一类种群模型的影响; 文献[9]建立了一个 Wolbachia 在蚊子种群中的传播模型, 研究了时滞对 Wolbachia 传播的影响; 文献[10]利用 Mawhin 连续定理和微分不等式研究了一类带有离散型时滞的 Lotka-Volterra 食饵-捕食者模型存在 8 个正周期解的问题; 对于肿瘤-免疫动力学模型, 文献[11]研究了免疫激发分布时滞对系统动力学性态的影响, 文献[12]则发现分布时滞的引入可能导致系统产生周期振荡现象, 进而解释肿瘤的复发现象.

文献[13]在系统(3)的基础上考虑给反应过程中的营养物生物量浓度引入时滞, 研究了系统的许多动力学行为, 例如平衡点的稳定性、Turing 不稳定性、Hopf 分支以及 Hopf-Hopf 分支.

事实上, 在细菌和营养物这两类物种互相作用的过程中, 时滞效应的存在会影响细菌和营养物的生物量浓度变化. 因此, 基于上述分析, 本文在系统(3)的基础上考虑如下模型:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = au \left(\frac{uv}{u+K} - 1 \right) & x \in \Omega, t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = b - v - \frac{u^2(t-\tau)v}{u(t-\tau)+K} & x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0 & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x, t) = u_0(x, t) \geq 0, v(x, t) = v_0(x, t) \geq 0 & x \in \Omega, t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (4)$$

其中, 时滞 τ 代表细菌的成熟期, 指细菌进入环境后需经历 τ 单位的时间才能达到成熟进而完成繁殖增长. 对于系统(4), 本文分别对常微分系统和偏微分系统研究了时滞对正常数平衡点稳定性的影响, 以及在正常数平衡点处 Hopf 分支产生的条件, 并计算了分支周期解的稳定性和分支方向. 结果表明, 当时滞 τ 在经过某一临界值时, 系统会由稳定状态变为不稳定状态, 并产生 Hopf 分支. 文中分别用 $\mathbb{N}_+$ 和 $\mathbb{R}_+$ 表示非负整数集和正实数集.

本文的结构如下. 第一部分主要讨论带时滞参数的常微分系统和偏微分系统正常数平衡点的稳定性以及 Hopf 分支的存在性. 第二部分讨论 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性. 第三部分进行数值模拟, 验证结论.

1 正常数平衡点的稳定性和 Hopf 分支的存在性

1.1 带时滞的常微分系统

本节考虑如下带有时滞参数的常微分系统:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = au \left(\frac{uv}{u+K} - 1 \right) & t > 0 \\ \frac{dv}{dt} = b - v - \frac{u^2(t-\tau)v}{u(t-\tau)+K} & t > 0 \\ u(t) = u_0(t) \geq 0, v(t) = v_0(t) \geq 0 & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (5)$$

易知系统(5) 存在正常数平衡点 (u^*, v^*) 的充要条件为 $(u^*)^2 + (1-b)u^* + K = 0$, 因此可知:

若 $b < 1 + 2\sqrt{K}$, 则系统(5) 不存在正常数平衡点;

若 $b = 1 + 2\sqrt{K}$, 则系统(5) 存在 1 个正常数平衡点 $(u_0^*, v_0^*) = (\sqrt{K}, 1 + \sqrt{K})$;

若 $b > 1 + 2\sqrt{K}$, 则系统(5) 存在 2 个正常数平衡点 (u_1^*, v_1^*) 和 (u_2^*, v_2^*) , 其中

$$\begin{aligned} (u_1^*, v_1^*) &= \left(\frac{b-1+\sqrt{(1-b)^2-4K}}{2}, \frac{u_1^*+K}{u_1^*} \right) \\ (u_2^*, v_2^*) &= \left(\frac{b-1-\sqrt{(1-b)^2-4K}}{2}, \frac{u_2^*+K}{u_2^*} \right) \end{aligned}$$

根据文献[2] 可知, 当 $\tau = 0$, 且系统(5) 满足条件

$$b > 1 + 2\sqrt{K} \quad 0 < a < \frac{(u_1^*)^2 + u_1^* + K}{K}$$

时, 正常数平衡点 (u_1^*, v_1^*) 是局部渐近稳定的, 下面讨论时滞 $\tau \neq 0$ 对系统(5) 的正常数平衡点 (u_1^*, v_1^*) 稳定性的影响. 定义 $(u^*, v^*) = (u_1^*, v_1^*)$.

令 $\hat{u} = u - u^*, \hat{v} = v - v^*$, 为了方便起见, 系统(5) 可化为

$$\begin{cases} \frac{d\hat{u}}{dt} = a(u+u^*) \left[\frac{(u+u^*)(v+v^*)}{u+u^*+K} - 1 \right] & t > 0 \\ \frac{d\hat{v}}{dt} = b - (v+v^*) - \frac{(u_\tau+u^*)^2(v+v^*)}{u_\tau+u^*+K} & t > 0 \\ u(t) = u_0(t) \geq 0, v(t) = v_0(t) \geq 0 & t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$u = u(t) \quad u_\tau = u(t-\tau) \quad v = v(t)$$

根据 Taylor 展开式, 系统(6) 在 $(0, 0)$ 处的线性化系统是

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) u + \frac{au^*}{v^*} v \\ \frac{dv}{dt} = - \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) u - \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) v \end{cases} \quad (7)$$

系统(7) 的特征方程为

$$\lambda^2 + A_0 \lambda + B e^{-\lambda \tau} + C_0 = 0 \quad (8)$$

其中

$$A_0 = \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) - a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \quad B = \frac{au^*}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \quad C_0 = -a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right)$$

若 $\lambda = i\omega$ ($\omega > 0$) 是特征方程(8) 的纯虚根, 将其代入, 可得

$$\begin{cases} \omega^2 - C_0 = B \cos \omega \tau \\ \omega A_0 = B \sin \omega \tau \end{cases} \quad (9)$$

则有

$$\omega^4 + (A_0^2 - 2C_0)\omega^2 + C_0^2 - B^2 = 0 \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} A_0^2 - 2C_0 &= \left[\left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) - a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \right]^2 + 2a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) \\ C_0^2 - B^2 &= \left[a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) \right]^2 - \left[\frac{au^*}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

假设 $C_0^2 - B^2 < 0$ 成立, 则方程(10) 存在正根 ω_0 , 满足

$$\omega_0^2 = \frac{-(A_0^2 - 2C_0) + \sqrt{(A_0^2 - 2C_0)^2 - 4(C_0^2 - B^2)}}{2} \quad (11)$$

将 ω_0 代入(9) 式, 计算可得

$$\tau = \tau_0^j = \frac{1}{\omega_0} \arccos \left(\frac{\omega_0^2 - C_0}{B} \right) + \frac{2j\pi}{\omega_0} \quad j \in \mathbb{N}_+ \quad (12)$$

下面验证横截条件. 令

$$F(\omega) = \omega^4 + (A_0^2 - 2C_0)\omega^2 + C_0^2 - B^2$$

对其积分后代入 $\omega = \omega_0$, 可得

$$\left. \frac{dF}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = 2\omega_0 \sqrt{(A_0^2 - 2C_0)^2 - 4(C_0^2 - B^2)} > 0$$

因此, 当 $\omega = \omega_0$ 时横截条件成立, 可得定理 1:

定理 1 设 $b > 1 + 2\sqrt{K}$, $0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K}$, $C_0^2 - B^2 < 0$, 则有:

- (i) 若 $\tau < \tau_0^0$, 则系统(5) 的正常数平衡点 (u^*, v^*) 局部渐近稳定;
- (ii) 若 $\tau = \tau_0^j$ ($j \in \mathbb{N}_+$), 则系统(5) 在正常数平衡点 (u^*, v^*) 处产生 Hopf 分支;
- (iii) 若 $\tau > \tau_0^0$, 则系统(5) 的正常数平衡点 (u^*, v^*) 不稳定.

1.2 带时滞的偏微分系统

本节研究如下带有时滞参数的偏微分系统, 为了简化后期计算和着重探讨时滞因素对系统稳定性的影响, 此时考虑空间域 $\Omega = (0, l\pi)$ 的一维简单情形, 其中 $l \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = au \left(\frac{uv}{u+K} - 1 \right) & x \in (0, l\pi), t > 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = b - v - \frac{u^2(t-\tau)v}{u(t-\tau)+K} & x \in (0, l\pi), t > 0 \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = 0 & x = 0, l\pi, t > 0 \\ u(x, t) = u_0(x, t) \geq 0, v(x, t) = v_0(x, t) \geq 0 & x \in [0, l\pi], t \in [-\tau, 0] \end{cases} \quad (13)$$

与 1.1 节类似, 对系统(13) 在平衡点 (u^*, v^*) 处做平移变换后, 可以写成下面的抽象微分方程形式:

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{d}\Delta\mathbf{U}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{U}_t) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_t) \quad (14)$$

其中定义 $X = C([0, l\pi], \mathbb{R}^2)$, $\mathbf{d}\Delta = (d_1\Delta, d_2\Delta)$, 以及

$$\text{dom}(\mathbf{d}\Delta) = \{(u, v)^\top : u, v \in C^2([0, l\pi], \mathbb{R}); u_x, v_x = 0; x = 0, l\pi\}$$

已知

$$\mathbf{L}: C([-\tau, 0], X) \longrightarrow X \quad \mathbf{F}: C([-\tau, 0], X) \longrightarrow X$$

对于 $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2)^\top \in C([-\tau, 0], X)$, 有

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} a\left(1 - \frac{1}{v^*}\right)\phi_1(0) + \frac{au^*}{v^*}\phi_2(0) \\ -\left(2 - \frac{1}{v^*}\right)\phi_1(-\tau) - \left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right)\phi_2(0) \end{pmatrix}$$

以及

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\phi}) = \begin{pmatrix} -au^* - a\left(2 - \frac{1}{v^*}\right)\phi_1(0) - \frac{au^*}{v^*}\phi_2(0) + \frac{a(\phi_1(0) + u^*)^2(\phi_2(0) + v^*)}{\phi_1(0) + u^*v^*} \\ b - v^* + \frac{u^*}{v^*}\phi_2(0) + \left(2 - \frac{1}{v^*}\right)\phi_1(-\tau) - \frac{(\phi_1(-\tau) + u^*)^2(\phi_2(0) + v^*)}{\phi_1(-\tau) + u^*v^*} \end{pmatrix}$$

则系统(14) 在 $(0, 0)$ 处附近的线性化系统为

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \mathbf{d}\Delta\mathbf{U}(t) + \mathbf{L}(\mathbf{U}_t) \quad (15)$$

线性系统(15) 的特征方程等价于

$$\lambda\mathbf{y} - \mathbf{d}\Delta\mathbf{y} - \mathbf{L}(e^\lambda\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \mathbf{y} \in \text{dom}(\mathbf{d}\Delta) \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{0} \quad (16)$$

根据特征值问题 $-\phi'' = \mu\phi$, 其中 $x \in (0, l\pi)$, $\phi'(0) = \phi'(l\pi) = 0$, 可得特征值 $\mu_n = \frac{n^2}{l^2}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 以

及对应的特征函数 $\phi_n(x) = \cos \frac{n}{l}x$. 将 $\mathbf{y} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n}{l}x \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix}$ 代入特征方程(16), 得到

$$\begin{pmatrix} a\left(1 - \frac{1}{v^*}\right) - d_1 \frac{n^2}{l^2} & \frac{au^*}{v^*} \\ -\left(2 - \frac{1}{v^*}\right)e^{-\lambda\tau} & -\left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right) - d_2 \frac{n^2}{l^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

因此, 方程(16) 的所有特征根由以下特征方程给出:

$$\lambda^2 + A_n\lambda + B e^{-\lambda\tau} + C_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} A_n &= (d_1 + d_2) \frac{n^2}{l^2} + \left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right) - a\left(1 - \frac{1}{v^*}\right) \\ B &= \frac{au^*}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) \\ C_n &= \left[d_1 \frac{n^2}{l^2} - a\left(1 - \frac{1}{v^*}\right)\right] \left[d_2 \frac{n^2}{l^2} + \left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right)\right] \end{aligned}$$

若 $\lambda = \pm i\omega$ ($\omega > 0$) 是特征方程(17) 的一对纯虚根, 则有

$$\begin{cases} \omega^2 - C_n = B \cos \omega\tau \\ \omega A_n = B \sin \omega\tau \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

化简可得

$$\omega^4 + (A_n^2 - 2C_n)\omega^2 + C_n^2 - B^2 = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

其中

$$A_n^2 - 2C_n =$$

$$\left[(d_1 + d_2) \frac{n^2}{l^2} + \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) - a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \right]^2 + 2 \left[a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) - d_1 \frac{n^2}{l^2} \right] \left[d_2 \frac{n^2}{l^2} + \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) \right] \quad (20)$$

$$C_n^2 - B^2 = \left[d_1 \frac{n^2}{l^2} - a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \right]^2 \left[d_2 \frac{n^2}{l^2} + \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) \right]^2 - \left[\frac{au^*}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \right]^2 \quad (21)$$

假设 $C_n^2 - B^2 < 0$ 成立. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} (C_n^2 - B^2) = +\infty$, 则存在最小的 $N_0 \geq 0$, 使得: 当 $n > N_0$ 时, 方程 (19) 没有正根; 当 $0 \leq n \leq N_0$ 时, 方程 (19) 至多有 1 个正根. 此外, 假设 $d_2 \geq d_1$, 则 $A_n^2 - 2C_n > 0$ 总是成立.

对于 $0 \leq n \leq N_0$, 方程 (19) 有正根 ω_n , 满足

$$\omega_n^2 = \frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2} \quad (22)$$

因此, 可以确定 τ 的表达式为

$$\tau = \tau_n^j = \tau_n^0 + \frac{2j\pi}{\omega_n} \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

其中

$$\tau_n^0 = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n} \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B} & A_n \geq 0 \\ \frac{1}{\omega_n} \left(2\pi - \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B} \right) & A_n < 0 \end{cases} \quad (24)$$

故此时方程 (17) 存在一对纯虚特征根 $\pm i\omega_n$.

引理 1 令 $\lambda_n(\tau) = \alpha_n(\tau) + i\omega_n(\tau)$ 是方程 (17) 的根, 当 τ 趋近于 τ_n^j 时, 满足 $\alpha_n(\tau_n^j) = 0$ 和 $\omega_n(\tau_n^j) = \omega_n$, 则有横截条件成立, 即当 $0 \leq n \leq N_0$ 和 $j \in \mathbb{N}_+$ 时, 有 $\left. \frac{d\alpha_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} > 0$ 成立.

证 对特征方程 (17) 两边同时关于 τ 求导, 则有

$$\frac{d\lambda_n}{d\tau} = \frac{B\lambda_n e^{-\lambda_n \tau}}{2\lambda_n - B\tau e^{-\lambda_n \tau} + A_n} \quad (25)$$

将 $\tau = \tau_n^j$ 代入 (25) 式, 可得

$$\left. \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} = \frac{Bi\omega_n e^{-i\omega_n \tau_n^j}}{2i\omega_n - B\tau_n^j e^{-i\omega_n \tau_n^j} + A_n} \quad (26)$$

由于

$$\left. \frac{d\alpha_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} = \operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} \right)$$

以及

$$\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} \right) \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} \right)^{-1} \neq 0$$

故由 (26) 式, 有

$$\operatorname{Re} \left(\left. \frac{d\lambda_n}{d\tau} \right|_{\tau=\tau_n^j} \right)^{-1} = \frac{2(\omega_n^2 - C_n) + A_n^2}{B^2} = \frac{\sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{B^2} > 0$$

因此横截条件成立. 证毕.

根据 (23) 式易得 $\tau_n^{j+1} > \tau_n^j$. 接下来给出 τ_n^j 关于 n 的单调性.

引理 2 若 $d_2 \geq d_1$, $b > 1 + 2\sqrt{K}$, $0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K}$, 则存在正整数 $M > 0$, 使得当 $M \leq n \leq N_0$, $j \in \mathbb{N}_+$ 时, 有 $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$ 成立.

证 由 (22) 式变形, 可得

$$\omega_n^2 = \frac{-(A_n^2 - 2C_n) + \sqrt{(A_n^2 - 2C_n)^2 - 4(C_n^2 - B^2)}}{2} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{(A_n^2 - 2C_n)^2}{(B^2 - C_n^2)^2} + \frac{4}{B^2 - C_n^2}} + \frac{A_n^2 - 2C_n}{B^2 - C_n^2}}$$

其中 $A_n^2 - 2C_n$ 和 $C_n^2 - B^2$ 由 (20), (21) 式给出. 经计算可知, 由于 $d_2 \geq d_1$, 所以 $A_n^2 - 2C_n$ 关于 n 是严格递增的, 并且存在正整数 $M > 0$, 使得当 $M \leq n \leq N_0$ 时, $B^2 - C_n^2$ 关于 n 是严格递减的, 因此可得 $\omega_{n+1}^2 < \omega_n^2$. 又因为

$$0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K}$$

即有

$$a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) < 1 + \frac{u^*}{v^*}$$

故有 $A_n > 0$, 再根据 (24) 式得 $\tau_n^0 = \frac{1}{\omega_n} \arccos \frac{\omega_n^2 - C_n}{B}$, 因此当 $M \leq n \leq N_0$ 时, 有 $\tau_{n+1}^0 > \tau_n^0$. 又因为 $\omega_{n+1} < \omega_n$, 则由 (23) 式可知 $\tau_{n+1}^j > \tau_n^j$, 其中 $M \leq n \leq N_0, j \in \mathbb{N}_+$. 证毕.

由引理 2 可知分支值序列 $\{\tau_n^j\}$ 中最小的分支值是 τ_0^0 . 因此可以得到定理 2:

定理 2 设 $d_2 \geq d_1, b > 1 + 2\sqrt{K}, 0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K}$, 则有:

- (i) 若 $\tau \in [0, \tau_0^0)$, 则系统 (13) 的正常数平衡点 (u^*, v^*) 局部渐近稳定;
- (ii) 若 $\tau \in (\tau_0^0, \infty)$, 则系统 (13) 的正常数平衡点 (u^*, v^*) 不稳定;
- (iii) 若 $\tau = \tau_n^j (0 \leq n \leq N_0, j \in \mathbb{N}_+)$, 则系统 (13) 在正常数平衡点 (u^*, v^*) 处产生 Hopf 分支.

2 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性

本节主要利用时滞偏微分方程的中心流形定理 (见文献 [14]) 和规范型理论 (见文献 [15-16]) 研究当 $\tau = \tau_0 \equiv \tau_0^0$ 时 Hopf 分支的方向和分支周期解的稳定性. 令 $\tau = \tau_0 + \mu$, 将 $t = \tau \tilde{t}$ 代入方程 (14), 且依旧用 t 表示 $\tilde{t}$, 则方程 (14) 改写为

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \tau_0 \mathbf{d} \Delta \mathbf{U}(t) + \tau_0 \mathbf{L}_0(\mathbf{U}_t) + \mathbf{G}(\mathbf{U}_t, \mu) \quad (27)$$

其中对于 $\phi \in C([-1, 0], X)$, 有

$$\mathbf{L}_0(\phi) = \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{1}{v^*} \right) \phi_1(0) + \frac{au^*}{v^*} \phi_2(0) \\ - \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \phi_1(-1) - \left(1 + \frac{u^*}{v^*} \right) \phi_2(0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\phi, \mu) = \mu \mathbf{d} \Delta \phi(0) + \mu \mathbf{L}_0(\phi) + (\mu + \tau_0) \mathbf{F}_0(\phi)$$

$$\mathbf{F}_0(\phi) = \begin{pmatrix} -au^* - a \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \phi_1(0) - \frac{au^*}{v^*} \phi_2(0) + \frac{a(\phi_1(0) + u^*)^2(\phi_2(0) + v^*)}{\phi_1(0) + u^*v^*} \\ b - v^* + \left(2 - \frac{1}{v^*} \right) \phi_1(-1) + \frac{u^*}{v^*} \phi_2(0) - \frac{(\phi_1(-1) + u^*)^2(\phi_2(0) + v^*)}{\phi_1(-1) + u^*v^*} \end{pmatrix}$$

系统 (14) 在 $(0, 0)$ 处的线性化系统是

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = \tau_0 \mathbf{d} \Delta \mathbf{U}(t) + \tau_0 \mathbf{L}_0(\mathbf{U}_t) \quad (28)$$

由第二节知, $\pm i\omega_0 \tau_0$ 是线性化系统 (28) 的一对纯虚特征值. 根据 Riesz 表示定理, 存在一个 2×2 的有界变差函数矩阵 $\eta(\theta, \mu) (\theta \in [-1, 0])$, 满足以下形式:

$$(\tau_0 + \mu) \mathbf{L}_0(\boldsymbol{\phi}) = \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) \boldsymbol{\phi}(\theta) \quad \boldsymbol{\phi}(\theta) \in C([-1, 0], \mathbb{R}^2) \quad (29)$$

其中

$$\boldsymbol{\eta}(\theta, \mu) = (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} a \left(1 - \frac{1}{v^*}\right) & \frac{au^*}{v^*} \\ 0 & -\left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right) \end{pmatrix} \delta(\theta) - (\tau_0 + \mu) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(2 - \frac{1}{v^*}\right) & 0 \end{pmatrix} \delta(\theta + 1)$$

且对于 $\delta(\theta): [-1, 0] \longrightarrow (X, X)$, 有

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta \in [-1, 0) \\ 1 & \theta = 0 \end{cases}$$

接下来定义算子 $A(0)$ 和 A^* 分别为

$$\begin{aligned} A(0)(\boldsymbol{\phi}(\theta)) &= \begin{cases} \frac{d\boldsymbol{\phi}(\theta)}{d\theta} & \theta \in [-1, 0) \\ \int_{-1}^0 d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0) \boldsymbol{\phi}(\theta) & \theta = 0 \end{cases} \\ A^*(\boldsymbol{\psi}(s)) &= \begin{cases} -\frac{d\boldsymbol{\psi}(s)}{ds} & s \in (0, 1] \\ \int_{-1}^0 \boldsymbol{\psi}(-s) d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0) & s = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\boldsymbol{\phi}(\theta) \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$, $\boldsymbol{\psi}(s) \in C^1([0, 1], (\mathbb{R}^2)^*)$.

对于 $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in X = C([0, l\pi], \mathbb{R}^2)$, 定义内积为

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_1 \bar{v}_1 dx + \frac{1}{l\pi} \int_0^{l\pi} u_2 \bar{v}_2 dx$$

此外, 对于 $\boldsymbol{\phi}(\theta) \in C^1([-1, 0], \mathbb{R}^2)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(s) \in C^1([0, 1], (\mathbb{R}^2)^*)$, 引入如下双线性型内积:

$$\langle \boldsymbol{\psi}(s), \boldsymbol{\phi}(\theta) \rangle_0 = \bar{\boldsymbol{\psi}}(0) \boldsymbol{\phi}(0) - \int_{-1}^0 \int_0^\theta \bar{\boldsymbol{\psi}}(\xi - \theta) d\boldsymbol{\eta}(\theta, 0) \boldsymbol{\phi}(\xi) d\xi$$

经验证可知, $\pm i\omega_0 \tau_0$ 是算子 $A(0)$ 和 A^* 的特征值, 设 $\mathbf{q}(\theta)$ 是算子 $A(0)$ 关于特征值 $i\omega_0 \tau_0$ 的特征向量, $\mathbf{q}^*(s)$ 是算子 A^* 关于特征值 $-i\omega_0 \tau_0$ 的特征向量, 则根据算子 $A(0)$ 和 A^* 的定义可得, $\mathbf{q}(\theta)$ 和 $\mathbf{q}^*(s)$ 的形式分别为

$$\mathbf{q}(\theta) = (q_1, q_2)^T e^{i\omega_0 \tau_0 \theta} \quad \theta \in [-1, 0]$$

和

$$\mathbf{q}^*(s) = \frac{1}{D} (q_1^*, q_2^*) e^{i\omega_0 \tau_0 s} \quad s \in [0, 1]$$

再根据(30)式, 计算可得

$$\begin{aligned} (q_1, q_2) &= \left(1, \frac{a(1 - v^*) + i\omega_0 v^*}{au^*}\right) \\ (q_1^*, q_2^*) &= \left(1, \frac{a(v^* - 1) + i\omega_0 v^*}{2v^* - 1}\right) \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{q}(\theta)$ 和 $\mathbf{q}^*(s)$ 满足 $\langle \mathbf{q}^*(s), \mathbf{q}(\theta) \rangle_0 = 1$ 和 $\langle \mathbf{q}^*(s), \bar{\mathbf{q}}(\theta) \rangle_0 = 0$, 则有

$$D = 1 - \frac{[a(1 - v^*) + i\omega_0 v^*]^2}{au^*(2v^* - 1)} - \left[a \left(1 - \frac{1}{v^*}\right) - i\omega_0 \right] \tau_0 e^{-i\omega_0 \tau_0}$$

令系统(28)的中心子空间是 $Y = \{(z\mathbf{q}(\theta) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\theta)): z \in \mathbb{C}\}$. 在系统(27)中设 $\mu = 0$, 可确定一个中心流形为

$$\mathbf{W}(z, \bar{z}) = \mathbf{W}_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \mathbf{W}_{11}(\theta) z\bar{z} + \mathbf{W}_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (31)$$

设 $\boldsymbol{\Phi} = (\mathbf{q}(\theta), \bar{\mathbf{q}}(\theta))$, $\boldsymbol{\Psi} = (\mathbf{q}^*(s), \bar{\mathbf{q}}^*(s))^T$, 且系统(27)在中心流形中的流可以写为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \mathbf{\Phi}(z(t), \bar{z}(t))^T + \mathbf{W}(z(t), \bar{z}(t)) = \\ & z\mathbf{q}(\theta) + \bar{z}\bar{\mathbf{q}}(\theta) + \mathbf{W}_{20}(\theta) \frac{z^2}{2} + \mathbf{W}_{11}(\theta) z\bar{z} + \mathbf{W}_{02}(\theta) \frac{\bar{z}^2}{2} + \cdots \end{aligned}$$

再根据内积公式可得 $\langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{f}_0 \rangle = (\langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{f}_0^1 \rangle, \langle \boldsymbol{\phi}, \mathbf{f}_0^2 \rangle)^T$, 其中 $\boldsymbol{\phi} \in C([-1, 0], X)$, $\mathbf{f}_0 = (\mathbf{f}_0^1, \mathbf{f}_0^2)^T$, $\mathbf{f}_0^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{f}_0^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 因此, 当 $\mu = 0$ 时, 有

$$\frac{\partial z}{\partial t} = i\omega_0 \tau_0 z(t) + \bar{\mathbf{q}}^*(0) \langle \mathbf{G}(\mathbf{u}_t, 0), \mathbf{f}_0 \rangle = i\omega_0 \tau_0 z(t) + g(z, \bar{z})$$

其中

$$g(z, \bar{z}) = \bar{\mathbf{q}}^*(0) \langle \mathbf{G}(\mathbf{u}_t, 0), \mathbf{f}_0 \rangle = g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z\bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \cdots \quad (32)$$

根据 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, \mu)$ 的表达式可知 $\mathbf{G}(\boldsymbol{\phi}, 0) = \tau_0 \mathbf{F}_0(\boldsymbol{\phi}) = \tau_0 (G_1, G_2)^T$, 其中

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^2(0) + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) \phi_1(0) \phi_2(0) - \frac{a}{(u^*)^2 v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^3(0) + \\ & \frac{a}{u^* v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^2(0) \phi_2(0) + O(4) \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} G_2 &= -\frac{1}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^2(-1) - \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) \phi_1(-1) \phi_2(0) + \frac{1}{(u^*)^2 v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^3(-1) - \\ & \frac{1}{u^* v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \phi_1^2(-1) \phi_2(0) + O(4) \end{aligned} \quad (34)$$

其中 $O(4) = O(\|(u, v)\|^4)$.

由 (32) - (34) 式可得

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left[\frac{a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) q_1 q_2 \right] + \\ & \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{1}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} - \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) q_1 q_2 e^{-i\omega_0 \tau_0} \right] \\ g_{11} &= \frac{\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left[\frac{2a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1 \bar{q}_1 + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_1 q_2) \right] - \\ & \frac{\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[\frac{2}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1 \bar{q}_1 + \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (q_1 \bar{q}_2 e^{-i\omega_0 \tau_0} + \bar{q}_1 q_2 e^{i\omega_0 \tau_0}) \right] \\ g_{02} &= \frac{2\bar{q}_1^* \tau_0}{D} \left[\frac{a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \bar{q}_1^2 + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) \bar{q}_1 \bar{q}_2 \right] + \\ & \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{D} \left[-\frac{1}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 \bar{q}_1^2 e^{2i\omega_0 \tau_0} - \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) \bar{q}_1 \bar{q}_2 e^{i\omega_0 \tau_0} \right] \\ g_{21} &= \frac{2a\bar{q}_1^* \tau_0}{Du^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 (2W_{11}^1(0)q_1 + W_{20}^1(0)\bar{q}_1) + \\ & \frac{a\bar{q}_1^* \tau_0}{Dv^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (2W_{11}^2(0)q_1 + W_{20}^2(0)\bar{q}_1 + W_{20}^1(0)\bar{q}_2 + 2W_{11}^1(0)q_2) - \\ & \frac{6a\bar{q}_1^* \tau_0}{D(u^*)^2 v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 \bar{q}_1 + \frac{2a\bar{q}_1^* \tau_0}{Du^* v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 (q_1^2 \bar{q}_2 + 2q_1 q_2 \bar{q}_1) - \\ & \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{Du^* v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 (q_1^2 \bar{q}_2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} + 2q_1 q_2 \bar{q}_1) - \\ & \frac{\bar{q}_2^* \tau_0}{Dv^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (2W_{11}^1(-1)q_2 + W_{20}^1(-1)\bar{q}_2 + W_{20}^2(0)\bar{q}_1 e^{i\omega_0 \tau_0} + 2W_{11}^2(0)q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0}) + \end{aligned}$$

$$\frac{6\bar{q}_2^* \tau_0}{D(u^*)^2 v^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 \bar{q}_1 e^{-i\omega_0 \tau_0} - \frac{2\bar{q}_2^* \tau_0}{Du^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 (2W_{11}^1(-1)q_1 e^{-i\omega_0 \tau_0} + W_{20}^1(-1)\bar{q}_1 e^{i\omega_0 \tau_0})$$

为了得到 g_{21} 的值, 需计算 $\mathbf{W}_{20}(\theta)$ 和 $\mathbf{W}_{11}(\theta)$. 由于 $\mathbf{W}(z(t), \bar{z}(t))$ 满足

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = A(0)\mathbf{W} + \mathbf{X}_0 \mathbf{G}(u_t, 0) - \Phi \langle \Psi, \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{G}(u_t, 0), \mathbf{f}_0 \rangle \rangle_0 \cdot \mathbf{f}_0 =$$

$$A(0)\mathbf{W} + \mathbf{H}_{20} \frac{z^2}{2} + \mathbf{H}_{11} z \bar{z} + \mathbf{H}_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots \quad (35)$$

其中

$$\mathbf{X}_0 = \begin{cases} \mathbf{0} & \theta \in [-1, 0) \\ \mathbf{I} & \theta = 0 \end{cases}$$

$\mathbf{I}$ 为单位矩阵, 通过链式法则

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{W}(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{W}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$$

可得

$$\mathbf{H}_{20} = [2i\omega_0 \tau_0 - A(0)]\mathbf{W}_{20} \quad \mathbf{H}_{11} = -A(0)\mathbf{W}_{11} \quad \mathbf{H}_{02} = [-2i\omega_0 \tau_0 - A(0)]\mathbf{W}_{02} \quad (36)$$

当 $\theta \in [-1, 0)$ 时, 由(35) 式可得

$$-\Phi \langle \Psi, \langle \mathbf{X}_0 \mathbf{G}(u_t, 0), \mathbf{f}_0 \rangle \rangle_0 \cdot \mathbf{f}_0 = \mathbf{H}_{20} \frac{z^2}{2} + \mathbf{H}_{11} z \bar{z} + \mathbf{H}_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + \dots$$

则有

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{20}(\theta) = -g_{20} \mathbf{q}(\theta) - \bar{g}_{02} \bar{\mathbf{q}}(\theta) \\ \mathbf{H}_{11}(\theta) = -g_{11} \mathbf{q}(\theta) - \bar{g}_{11} \bar{\mathbf{q}}(\theta) \end{cases} \quad (37)$$

结合(36) 和(37) 式得到如下微分方程

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{W}_{20}(\theta)}{d\theta} = 2i\omega_0 \tau_0 \mathbf{W}_{20}(\theta) + g_{20} \mathbf{q}(\theta) + \bar{g}_{02} \bar{\mathbf{q}}(\theta) \\ \frac{d\mathbf{W}_{11}(\theta)}{d\theta} = g_{11} \mathbf{q}(\theta) + \bar{g}_{11} \bar{\mathbf{q}}(\theta) \end{cases} \quad (38)$$

可得方程(38) 的解为

$$\mathbf{W}_{20}(\theta) = \frac{ig_{20}}{\omega_0 \tau_0} \mathbf{q}(\theta) + \frac{i\bar{g}_{02}}{3\omega_0 \tau_0} \bar{\mathbf{q}}(\theta) + \mathbf{K}_1 e^{2i\omega_0 \tau_0 \theta}$$

$$\mathbf{W}_{11}(\theta) = -\frac{ig_{11}}{\omega_0 \tau_0} \mathbf{q}(\theta) + \frac{i\bar{g}_{11}}{\omega_0 \tau_0} \bar{\mathbf{q}}(\theta) + \mathbf{K}_2$$

当 $\theta = 0$ 时, 由(36) 式和

$$\begin{cases} \mathbf{H}_{20}(0) = -g_{20} \mathbf{q}(0) - \bar{g}_{02} \bar{\mathbf{q}}(0) + \tau_0 \mathbf{K}_1^{(2)} \\ \mathbf{H}_{11}(0) = -g_{11} \mathbf{q}(0) - \bar{g}_{11} \bar{\mathbf{q}}(0) + \tau_0 \mathbf{K}_2^{(2)} \end{cases}$$

可得

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^{(1)} \cdot \mathbf{K}_1^{(2)} \quad \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}_2^{(1)} \cdot \mathbf{K}_2^{(2)}$$

其中

$$\mathbf{K}_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2i\omega_0 - a \left(1 - \frac{1}{v^*}\right) & -\frac{au^*}{v^*} \\ \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) e^{-2i\omega_0 \tau_0} & 2i\omega_0 + \left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\mathbf{K}_1^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) q_1 q_2 \\ -\frac{1}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1^2 e^{-2i\omega_0 \tau_0} - \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) q_1 q_2 e^{-i\omega_0 \tau_0} \end{pmatrix}$$

$$K_2^{(1)} = \begin{pmatrix} -a \left(1 - \frac{1}{v^*}\right) & -\frac{au^*}{v^*} \\ \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) & \left(1 + \frac{u^*}{v^*}\right) \end{pmatrix}^{-1}$$

$$K_2^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1 \bar{q}_1 + \frac{a}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (q_1 \bar{q}_2 + \bar{q}_1 q_2) \\ -\frac{2}{u^*} \left(1 - \frac{1}{v^*}\right)^2 q_1 \bar{q}_1 - \frac{1}{v^*} \left(2 - \frac{1}{v^*}\right) (q_1 \bar{q}_2 e^{-i\omega_0 \tau_0} + \bar{q}_1 q_2 e^{i\omega_0 \tau_0}) \end{pmatrix}$$

基于上述分析, 可以计算出如下用于判断 Hopf 分支方向和分支周期解稳定性的值:

$$C_1(0) = \frac{i}{2\omega_0 \tau_0^0} \left(g_{11} g_{20} - 2 |g_{11}|^2 - \frac{|g_{02}|^2}{3} \right) + \frac{g_{21}}{2} \quad \mu_2 = -\frac{\operatorname{Re}(C_1(0))}{\operatorname{Re}(\lambda'(\tau_0^0))}$$

$$\beta_2 = 2\operatorname{Re}(C_1(0)) \quad T_2 = -\frac{\operatorname{Im}(C_1(0)) + \mu_2 \operatorname{Im}(\lambda'(\tau_0^0))}{\omega_0 \tau_0^0}$$

由此可得出定理 3:

定理 3 对于系统(13), 有如下结论:

- (i) μ_2 确定 Hopf 分支的方向, 当 $\mu_2 > 0$ ($\mu_2 < 0$) 时, 分支方向是超临界的(次临界的);
- (ii) β_2 确定分支周期解的稳定性, 当 $\beta_2 < 0$ 时, 分支周期解是渐近稳定的, 当 $\beta_2 > 0$ 时, 分支周期解是不稳定的;
- (iii) T_2 确定分支周期解的周期, 当 $T_2 > 0$ 时, 周期增大, 当 $T_2 < 0$ 时, 周期减少.

3 数值模拟

本节利用 MATLAB 软件给出具体的数值实例, 以补充验证前面给出的理论结果.

对于系统(5), 设置参数 b, K 为 $b=3, K=0.5$, 则条件 $b > 1 + 2\sqrt{K}$ 成立, 由此可得正常数平衡点为 $(u^*, v^*) = (1.7071, 1.2929)$, 令参数 $a=9.5$ 满足 $0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K} = 10.2426$, 则方程(10)存在唯一正根 $\omega_0 = 3.2222$. 再根据方程(12), 计算可得 $\tau_0^j = 0.0107 + \frac{2j\pi}{\omega_0} (j \in \mathbb{N}_+)$. 因此由定理 1 可知: 当 $\tau \in [0, 0.0107)$ 时, 正常数平衡点 (u^*, v^*) 是局部渐近稳定的; 当 $\tau \in (0.0107, +\infty)$ 时, 正常数平衡点 (u^*, v^*) 是不稳定的. 且由 Hopf 分支定理^[2] 可知, 当 $\tau = \tau_0^j = 0.0107 + \frac{2j\pi}{\omega_0} (j \in \mathbb{N}_+)$ 时, 系统(5)在正常数平衡点 (u^*, v^*) 处产生 Hopf 分支.

取 $\tau = 0.0065 < \tau_0^0$, 由定理 1 可知系统(5)的正平衡点 (u^*, v^*) 局部渐近稳定, 如图 1.

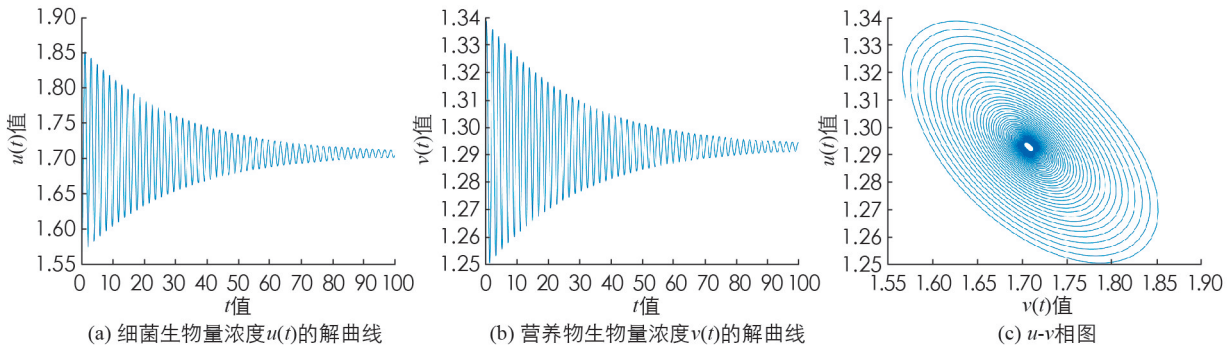


图 1 正平衡点局部渐近稳定, 此时参数 $\tau = 0.0065 < \tau_0^0$ 且初值取 $(u_0, v_0) = (1.57, 1.31)$

取 $\tau = 0.0107 = \tau_0^0$, 由定理 1 可知系统(5)在正平衡点 (u^*, v^*) 处产生 Hopf 分支, 如图 2.

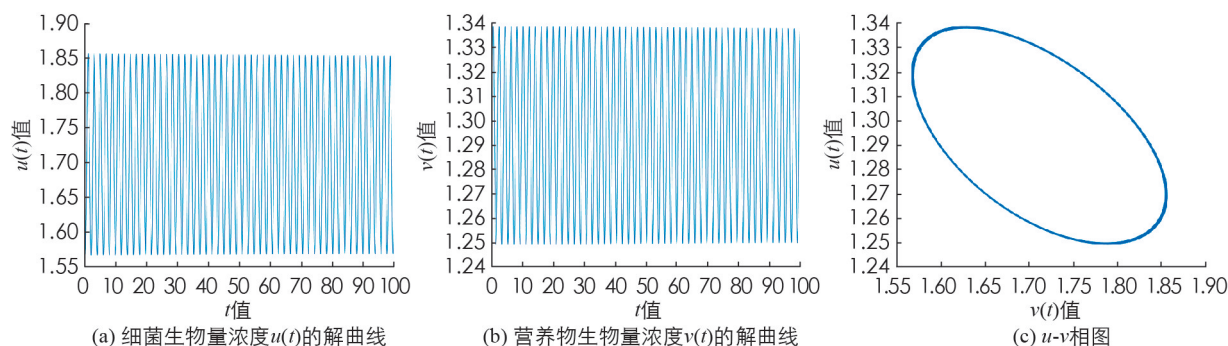


图 2 系统产生稳定的极限环, 此时参数 $\tau = 0.0107 = \tau_0^0$ 且初值取 $(u_0, v_0) = (1.57, 1.31)$
取 $\tau = 0.0121 > \tau_0^0$, 由定理 1 可知系统(5)的正平衡点 (u^*, v^*) 是不稳定的, 如图 3.

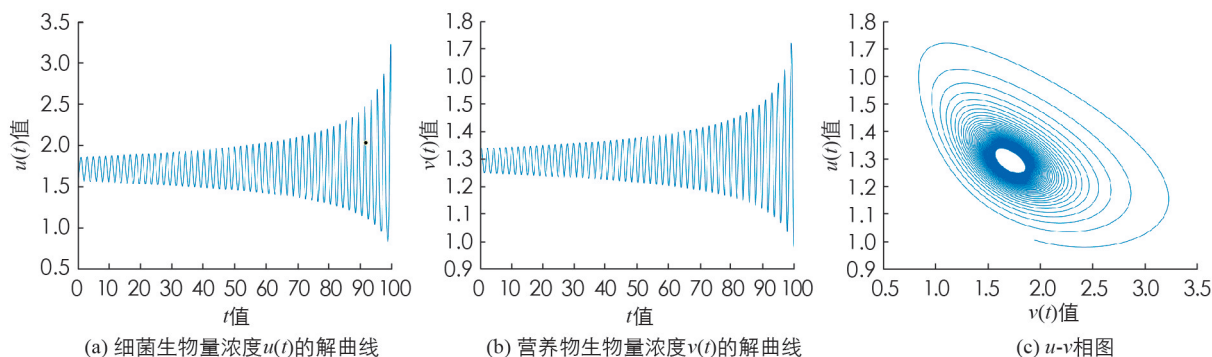


图 3 正平衡点不稳定, 此时参数 $\tau = 0.0121 > \tau_0^0$ 且初值取 $(u_0, v_0) = (1.57, 1.31)$

对于系统(13), 设置参数为 $b = 10$, $K = 16$, $d_1 = 0.04$, $d_2 = 0.5$, $l = 3$, 且取参数 $a = 3.9$ 满足条件

$0 < a < \frac{(u^*)^2 + u^* + K}{K} = 4.101$, 则计算可得正常数平衡点为 $(u^*, v^*) = (6.5616, 3.4384)$, 由定

理 2 可知, 当 $\tau = \tau_n^j$ ($0 \leq n \leq N_0$, $j \in \mathbb{N}_+$) 时, 系统(13)在正常数平衡点 (u^*, v^*) 处产生 Hopf 分支, 且由(22)–(24)式计算可得 $\tau_0^0 = 0.0112$. 取 $\tau = \tau_0^0 = 0.0112$ 和初值 $u_0(x) = u^* + 0.65\cos(5x)$, $v_0(x) = v^* - 0.65\cos(5x)$, 则在正常数平衡点 (u^*, v^*) 附近产生分支周期解, 如图 4.

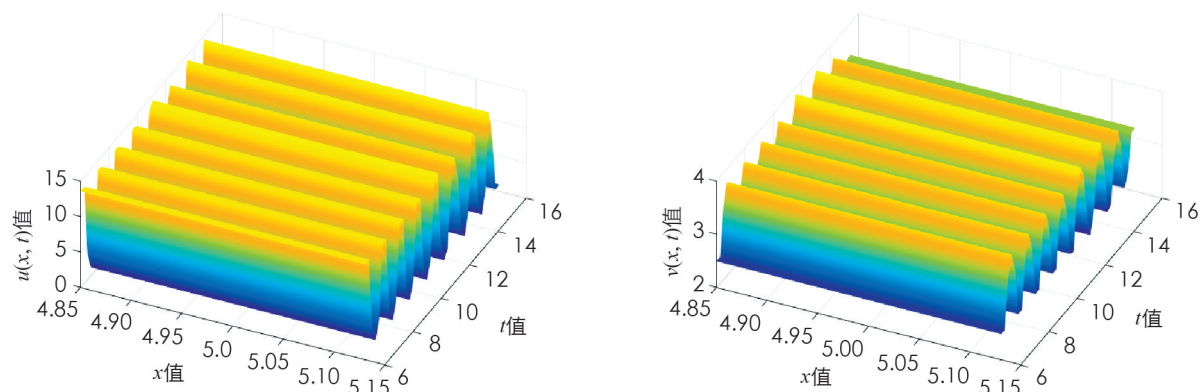


图 4 系统分支产生的空间齐次周期解,

此时参数 $\tau = 0.0112 = \tau_0^0$ 且初值取 $u_0(x) = u^* + 0.65\cos(5x)$, $v_0(x) = v^* - 0.65\cos(5x)$

参考文献:

- [1] BAURMANN M, FEUDEL U. Turing Patterns in a Simple Model of a Nutrient-Microorganism System in the Sediment [J]. Ecological Complexity, 2004, 1(1): 77-94.
- [2] CAO Q, WU J H, WANG Y E. Bifurcation Solutions in the Diffusive Minimal Sediment [J]. Computers & Mathematics

- with Applications, 2019, 77(3): 888-906.
- [3] CAO Q, WU J H. Patterns and Dynamics in the Diffusive Model of a Nutrient-Microorganism System in the Sediment [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2019, 49: 331-354.
- [4] CHEN S S, SHI J P, WEI J J. The Effect of Delay on a Diffusive Predator-Prey System with Holling Type-II Predator Functional Response [J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2013, 12(1): 481-501.
- [5] ZHANG C H, HE Y. Multiple Stability Switches and Hopf Bifurcations Induced by the Delay in a Lengyel-Epstein Chemical Reaction System [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 378: 1-22.
- [6] YAN X P, ZHANG C H. Asymptotic Stability of Positive Equilibrium Solution for a Delayed Prey-Predator Diffusion System [J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(1): 184-199.
- [7] LI L, ZHANG C H, YAN X P. Stability and Hopf Bifurcation Analysis for a Two-Enterprise Interaction Model with Delays [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2016, 30: 70-83.
- [8] MA Z P. Stability and Hopf Bifurcation for a Three-Component Reaction-Diffusion Population Model with Delay Effect [J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 37(8): 5984-6007.
- [9] 李雅芝, 任新志. 成熟时滞对 Wolbachia 在蚊子种群中的传播影响研究 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(3): 118-124.
- [10] 吕小俊, 李睿. 离散型时滞 Lotka-Volterra 食饵-捕食者系统的 8 个正周期解 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(7): 114-123.
- [11] 邵敏, 张国洪. 考虑复合治疗及分布时滞的肿瘤-免疫动力学模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(3): 111-118.
- [12] 王苗, 张国洪. 考虑化疗、免疫治疗及分布时滞的肿瘤动力学模型 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(1): 153-159.
- [13] CHEN M X, WU R C, LIU B, et al. Hopf-Hopf Bifurcation in the Delayed Nutrient-Microorganism Model [J]. Applied Mathematical Modelling, 2020, 86: 460-483.
- [14] LIN X D, SO W H, WU J H. Centre Manifolds for Partial Differential Equations with Delays [J]. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1992, 122(3-4): 237-254.
- [15] HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H. Theory and Applications of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1981.
- [16] WU J H. Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations [M]. New York: Springer, 1996.

责任编辑 廖坤