第 48 卷 第 5 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 5 月
Vol. 48 No. 5 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) May 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.05.002

B 类 Kadomtsev-Petviashvili 非线性系统的弦方程和 Virasoro 约束[①]

倪雨星， 刘少伟

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 主要研究 B 类 Kadomtsev-Petviashvili(BKP)非线性系统的弦方程以及弦方程加在该系统 τ 函数上的约束所形成的 Lie 代数. 首先，通过对现有文献分析，发现 BKP 系统弦方程的定义会产生数学上的矛盾，因此在现有文献的基础上重新优化了 BKP 系统弦方程的定义. 然后从此定义出发重新计算了弦方程的附加对称算子表达式，进一步算出弦方程约束在 BKP 系统波函数和 τ 函数上的表达式. 由于 p 约化的约束需要去掉冗余变量，因此给出了弦方程加在 p 约化 BKP 系统的 τ 函数上所生成的无冗余变量的约束算子. 最后，通过复杂的计算，低阶弦方程无冗余约束算子恰好能形成一个被广泛研究的经典无穷维 Lie 代数，即非负的 Virasoro 代数和 W 代数. 其展现了 BKP 系统良好的代数结构，与现有经典结果相容.

关 键 词： BKP 系统；附加对称；弦方程；Virasoro 代数

中图分类号： O175 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2023)05-0014-08

The String Equation of the B-type Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy and Virasoro Constraint

NI Yuxing, LIU Shaowei

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: In this paper, the string equation of the B-type Kadomtsev-Petviashvili (BKP) hierarchy and the Lie algebra formed by the constraints imposed by the string equation on the τ function of the hierarchy are mainly studied. Firstly, through the analysis of the existing literature, it is found that the definition of the string equation of the BKP hierarchy will produce a mathematical contradiction. Therefore, this paper re-optimizes the definition of the string equation of the BKP hierarchy on the basis of the existing literature. Then, from this definition, the additional symmetry operator expressions of the string equation are recalculated, and the expressions of the string equation constrained on the BKP hierarchy wave function and the

---

① 收稿日期：2022-06-08
基金项目：国家自然科学基金项目(11101338).
作者简介：倪雨星，硕士研究生，主要从事偏微分方程理论及其应用研究.
通信作者：刘少伟，副教授，硕士生导师.

τ function are further calculated. Because of the constraints of the p reduction, it is natural to remove redundant variables. Therefore, different from the existing results, this paper presents the string equation constraint operators without redundant variables, which are imposed by the string equation on the τ function of the p-reduced BKP hierarchy. Finally, through complex calculations, it is found that low-order string equation constraint operators without redundant variables can precisely form a widely studied classical infinite-dimensional Lie algebra, namely, the non-negative Virasoro algebra and W algebra. It shows the good algebraic structure of the BKP hierarchy, which is compatible with the existing classical results. This also shows that our optimized definition of the string equation for the BKP hierarchy is reasonable from another perspective.

Key words: BKP hierarchy; additional symmetries; the string equation; Virasoro algebras

B 类 Kadomtsev-Petviashvili(BKP) 系统是一个被广泛研究的受多重约束的非线性 KP 系统[1]，这里的 B表示奇维正交群，满足额外$(L^p)_-=0$，$p\in\mathbb{N}_{odd}$ 约束的BKP系统形成的 p 约化BKP系统. 其中3约化BKP系统能导出著名的非线性偏微分方程 Sawada-Kotera 方程[2-3]，并被广泛用于共形场理论和二维量子引力规范场理论. 弦方程是弦理论中的主要研究对象，也是连接可积层次与可解弦理论和相交理论的重要约束[3]，还与一些类 KP 系统的可积方程密切相关，受到了广泛的关注. 在二维量子引力中，文献[4] 证明了模空间交集理论的配分函数恰好是弦方程约束 KdV 系统的 τ 函数的对数. 由于附加对称性的不动点集在KP 系统是不变的，所以弦方程对由 KdV 系统可积方程产生的流是不变的，而弦方程恰好是这种平衡性的条件[5]. 近年来，众多学者试着把 Kontsevich 的结论推广到更高维和多约束的情况，而 BKP 恰好是主要研究对象之一[6-8]. 文献[9] 给出了 BKP 系统的 ASvM 公式. 文献[10] 受 KP 系统的启发，基于 Dickey 的方法给出了 BKP 系统的 ASvM 公式的另一种证明. 文献[11] 研究了 BKP 系统的弦方程以及 $BW_{1+\infty}$. 文献[3] 又从 Lax-Orlov-Schulman 公式中附加对称性的角度重新考虑 BKP 系统的弦方程.

然而，通过分析发现文献[3,11] 中的弦方程的引入会导致数学上的矛盾，即会使得 $L^{-p}=0$，从而使系统退化成为最平凡的情况，失去研究的意义. 因此，本文将在如下 p 约化 BKP 系统可积系统里重新探讨BKP 系统的弦方程：

$$\begin{cases}\partial_{2n+1}L=[(L^{2n+1})_+,L],\ n\geqslant 0\\ L^*=-\partial L\partial^{-1}\\ (L^p)_-=0,\ p\in\mathbb{N}_{odd}\end{cases}\tag{1}$$

其中：$t=(t_1,t_3,t_5,\cdots)$，$L=\partial+\sum\limits_{i=1}^{\infty}u_i(t)\partial^{-i}$，$\Psi=1+\sum\limits_{j=1}\omega_j\partial^{-j}$，$M=\Psi\Gamma\Psi^{-1}$，$\Gamma=\sum_{n=0}(2n+1)t_{2n+1}\partial^{2n+1}$，$(L^p)_-=\sum\limits_{i-\infty}^{-1}g(t)\partial^i$，$(L^p)_+=\sum\limits_{i=0}^{p}f(t)\partial^i$.

由于 p 约化条件的限制，在 BKP 系统中，$\{t_{mp},m\in\mathbb{N}_{odd}\}$ 和$\{\partial_{mp},m\in\mathbb{N}_{odd}\}$ 成为冗余变量需要去掉. 而现有一些关于 BKP 系统的研究忽略了这一问题，所以本文在得到弦方程约束算子后，先得到无冗余变量的算子$\{\hat{V}{}^{(i)}_{jp}\}$，再以此为基础，研究弦方程加在 BKP 系统上产生的约束的代数结构. 经过复杂的计算，发现无冗余变量的弦方程约束算子恰好能张成特殊的 Lie 代数[12-14] 以及 Virasoro 代数. 因为 Virasoro 代数是共形场论中的一类重要代数，所以弦方程在代数结构上与相关共形场论理论有一定的联系，这也和现有的关于非线性 Korteweg-de Vries(KdV) 方程的经典结果是相容的. 这一相容的良好的代数结构，也从另一个角度说明了本文给出的优化弦方程定义的合理性.

1　BKP 系统的弦方程

本节主要证明现有文献中 BKP 系统弦方程的定义会产生的数学上的矛盾，并对 BKP 系统弦方程的定

义进行重新优化，然后从此定义出发重新计算弦方程的附加对称算子表达式.

本文将 BKP 系统的弦方程[11] 认定为

$$\left[L^{p},\ \frac{ML^{1-p}-pL^{-p}}{p}\right]=1 \tag{2}$$

其中算子 L 满足 $L_{-}^{p}=0$，$p\in\mathbb{Z}_{\mathrm{odd}}$. p 约化的 BKP 系统也是由这样的算子 L 所定义. 而 M 是 Orlov Schulman 算子，满足 $[L,M]=1$. 在此令 $\left(\sum_{n}x_{n}\partial^{n}\right)_{+}=\left(\sum_{n\geqslant 0}x_{n}\partial^{n}\right)$，$\left(\sum_{n}x_{n}\partial^{n}\right)_{-}=\left(\sum_{n\leqslant 0}x_{n}\partial^{n}\right)$.

因为弦方程里的 L^{p} 是一个微分算子. 由于 $L^{p}L^{-p}=1$，故 L^{-p} 不能等于 0. 如果 $L^{-p}=0$，则 L 就是一个等于 0 的算子，这失去了意义. 为了规避 $L^{-p}=0$ 这个矛盾，文献[3] 利用如下方程

$$\left(\frac{1}{2p}ML^{1-2p}-\frac{1}{2}L^{-2p}\right)_{-}=0 \tag{3}$$

来导出 BKP 系统的弦方程. 而由(3) 式和 $(L^{-p})_{-}=L^{-p}$ 可得 $(ML^{1-2p})_{-}=pL^{-2p}$. 然而通过计算发现(3) 式和 BKP 系统的弦方程经过如下一些变换仍然会产生 $L^{-p}=0$ 这个矛盾：

1) 对 $(L^{-2p}ML)_{-}$ 做变换

$$\begin{aligned}(L^{-2p}ML)_{-}=&(L^{-2p}ML^{2p}L^{-2p+1})_{-}=\\&(L^{-2p}(L^{2p}M-2pL^{2p-1})L^{-2p+1})_{-}=\\&-pL^{-2p}\end{aligned} \tag{4}$$

2) 对 $(L^{-p}ML)_{-}$ 做两种不同变换

$$\begin{aligned}(L^{-p}ML)_{-}=&(L^{-p}ML^{p}L^{-p+1})_{-}=\\&(L^{-p}(L^{p}M-pL^{p-1})L^{-p+1})_{-}=\\&(ML^{-p+1})_{-}-pL^{-p}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}(L^{-p}ML)_{-}=&(L^{p}(L^{-2p}ML)_{-})_{-}=\\&(L^{p}(-pL^{-2p})_{-})_{-}=\\&-pL^{-p}\end{aligned} \tag{6}$$

对比(6) 式和(5) 式左右两端可得 $(ML^{-p+1})_{-}=0$，将此结果代入 BKP 系统的弦方程里，则又可得到 $L^{-p}=0$ 这个矛盾的结果. 因此，本文只将(2) 式当做 BKP 系统的弦方程. 则(2) 式中的 $ML^{1-p}-pL^{-p}$ 是一个纯微分算子，可得 $ML_{-}^{1-p}=pL^{-p}$. 又由 BKP 系统的附加对称性[6] 可得

$$\partial_{m,l}^{*}\omega(t,k)=-(A_{m,l}(L,M))_{-}\,\omega(t,k),\ A_{m,l}(L,M)=M^{m}L^{l}-(-1)^{l}L^{l-1}M^{m}L \tag{7}$$

其中 $\partial_{m,l}^{*}=\dfrac{\partial}{\partial t_{m,l}^{*}}$，$\omega(t,k)$ 是波函数，则通过弦方程能计算得到附加对称性算子表达式，也即如下命题 1. 命题 1 与文献[3] 有所不同.

命题 1 如果由弦方程限制的 Lax 算子 L^{p} 满足 p 约化的 BKP 系统，则下列等式成立

$$(M^{m}L^{jp+m})_{-}=\begin{cases}L^{-p}, & m=0,\ j=-1\\ \prod_{r=0}^{m-1}(p-r)L^{-p}, & m\geqslant 1,\ j=-1\\ 0, & m\geqslant 0,\ j=0,1,2,3\cdots\end{cases} \tag{8}$$

$$(L^{m+jp-1}M^{m}L)_{-}=\begin{cases}L^{-p}, & m=0,\ j=-1\\ 0, & m>0,\ j=-1,0,1,2,3\cdots\end{cases} \tag{9}$$

2 弦方程约束的算子

本节中，先用附加对称算子表达式算出弦方程约束在 BKP 系统波函数和 τ 函数上的表达式，然后给出

弦方程加在 p 约化BKP系统的 τ 函数上所生成的无冗余变量的弦方程约束算子 $\{\hat{V}_{jp} \mid j=-1,0,1,2\cdots\}$，其中 τ 函数[16-17] 是他们共同的特征函数. 本文与现有结果不同的是对弦方程约束的算子做了去冗余变量 $\{t_{mp}\}$ 和 $\{\partial_{mp}\}$ 的处理，这是由于 p 约化的 BKP 系统的 τ 函数不含有冗余变量 $\{t_{mp} \mid m \in \mathbb{N}\}$.

首先，用波函数来表示对称性算子表达式(8) 和(9)，即让(8) 式和(9) 式作用在波函数上，可得

$$\partial^*_{m,m+jp}\omega(t,k)=\begin{cases}2k^{-p} & m\geqslant 0,\ j=-1\\ -\prod_{r=0}^{m-1}(p-r)k^{-p}\omega(t,k) & m\geqslant 1,\ j=-1\\ 0 & m\geqslant 0,\ j=0,1,2,3\cdots,\end{cases}\tag{10}$$

其中：$\omega(t,k)=\dfrac{G(k)\tau(t)}{\tau(t)}e^{\xi(t,k)}$，$G(k)\tau(t)=\tau(t-2[k^{-1}])$.

接着，利用 ASVM 公式[6] $\partial^*_{m,m+l}\tau(t)=Z_l^{(m+1)}(\tau(t))$ 可得

$$\partial^*_{m,m+l}\omega(t,k)=\left((G(k)-1)\frac{Z_l^{(m+1)}\tau(t)}{\tau(t)}\right)\cdot\omega(t,k),\ m\geqslant 0\ ,\ l\in\mathbb{Z}\tag{11}$$

再将(11) 式代入(10) 式中，可得到弦方程对 p 约化的 BKP 层次结构的 τ 函数施加的约束方程[3]

$$\left((G(k)-1)\frac{Z_{jp}^{(m+1)}\tau(t)}{\tau(t)}\right)=\begin{cases}2k^{-p}, & m=0,\ j=-1\\ -\prod_{r=0}^{m-1}(p-r)k^{-p}, & m\geqslant 0,\ j=-1\\ 0, & m\geqslant 0,\ j=0,1,2,3\cdots\end{cases}\tag{12}$$

根据算子 $G(k)$ 的性质可得

$$Z_{jp}^{m+1}\tau(t)=c\cdot\tau(t),\ m\geqslant 0\tag{13}$$

再根据文献[3] 中 $Z_l^{(1)}=W_l^{(1)}$，$Z_l^{(m+1)}=\dfrac{W_l^{(m+1)}}{m+1}+\dfrac{1}{2}W_l^{(m)}$，$m\geqslant 1$，可得

$$W_l^{(m+1)}\tau(t)=c\cdot\tau(t),\ m\geqslant 0\tag{14}$$

然后，从(14) 式中确定具体的无冗余变量的弦方程约束算子. 为此，先引入顶点算子

$$X_B(\lambda,\mu)=:\exp\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(\frac{J_{2i+1}}{(2i+1)\lambda_{2i+1}}-\frac{J_{2i+1}}{(2i+1)\mu_{2i+1}}\right):\tag{15}$$

其中符号“:: ”表示 $J_{i<0}$ 放 $J_{i>0}$ 的左边. 当 $i\in\mathbb{Z}^+_{\mathrm{odd}}$ 时，$J_i=2\partial_i$；当 $i\in\mathbb{Z}^-_{\mathrm{odd}}$ 时，$J_i=|i|t_i$. 接着将顶点算子 $X_B(\lambda,\mu)$ 在 $\mu=\lambda$ 处泰勒展开，其中 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lambda^{-m-l}W_n^{(m)}=\partial_\mu^m|_{\mu=\lambda}X_B(\lambda,\mu)$. 由此可计算得到 $W_n^{(m)}$ 的前几项

$$W_n^{(0)}=\delta_{n,0}\tag{16}$$

$$W_n^{(1)}=V_n^{(1)}\tag{17}$$

$$W_n^{(2)}=V_n^{(2)}-(n+1)V_n^{(1)}\tag{18}$$

$$W_n^{(3)}=V_n^{(3)}-\frac{3}{2}(n+2)V_n^{(2)}+(n+1)(n+2)V_n^{(1)}\tag{19}$$

$$W_n^{(4)}=V_n^{(4)}-2(n+3)V_n^{(3)}+(2n^2+9n+11)V_n^{(2)}-(n+1)(n+2)(n+3)V_n^{(1)}\tag{20}$$

$$\begin{aligned}W_n^{(5)}=&V_n^{(5)}-\frac{5}{2}(n+4)V_n^{(4)}+\left(\frac{10}{3}n^2+20n+35\right)V_n^{(3)}-\\&-\left(\frac{5}{2}n^3+20n^2+\frac{105}{2}n+50\right)V_n^{(2)}+(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)V_n^{(1)}\end{aligned}\tag{21}$$

$$W_n^{(m)}=V_n^{(m)}+C_{n_m,m-1}V_n^{(m-1)}+C_{n_m,m-2}V_n^{(m-2)}+\cdots+C_{n_m,1}V_n^{(1)}\tag{22}$$

其中

$$V_n^{(0)}=\delta_{n,0} \tag{23}$$

$$V_n^{(1)}=\begin{cases}J_n & n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\\ \text{no exist} & n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\end{cases} \tag{24}$$

$$V_n^{(2)}=\begin{cases}\text{no exist} & n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\\ \sum_{i+j=n}:J_iJ_j: & n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\end{cases} \tag{25}$$

$$V_n^{(3)}=\begin{cases}\sum_{i+j+k=n}:J_iJ_jJ_k: & n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\\ \text{no exist} & n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\end{cases} \tag{26}$$

$$V_n^{(4)}=\begin{cases}\text{no exist} & n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\\ \sum_{i+j+k+l=n}:J_iJ_jJ_kJ_l:-\sum_{i+j=n}:ijJ_iJ_j: & n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\end{cases} \tag{27}$$

$$V_n^{(5)}=\begin{cases}\sum_{i+j+k+l+d=n}:J_iJ_jJ_kJ_lJ_d:-5\sum_{i+j=n}:ijJ_iJ_jJ_k: & n\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\\ \text{no exist} & n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\end{cases} \tag{28}$$

与 KP 系统里的$\{V_n^{(l)}\}$有所不同，BKP 系统的$\{V_n^{(l)}\}$只有n和l都是奇数或者都是偶数时才存在，这导致了 BKP 与 KP 系统里的$\{W_n^{(m)}\}$不同. $\{W_n^{(m)}\mid n\in\mathbb{Z}_{\text{even}}\}$不同于$\{W_n^{(m)}\mid\in\mathbb{Z}_{\text{odd}}\}$，例如：$W_{2n}^{(2)}=V_{2n}^{(2)}$，$W_{2n+1}^{(2)}=-(2n+1+1)V_{2n+1}^{(1)}$.

根据(22)式可知$\{W_n^{(m)}\}$可以由$V_n^{(m)},V_n^{(m-1)},\cdots,V_n^{(1)}$线性表示. 而$\{W_n^{(m)}\}$和$\{V_n^{(m)}\}$之间的变换矩阵是下三角矩阵，所以$\{V_n^{(m)}\}$也可以由$W_n^{(m)},W_n^{(m-1)},\cdots,W_n^{(1)}$线性表示. 因此，以下命题成立.

命题 2 对于任意的$m\in\mathbb{N}$，$\{W_n^{(m)}\}$和$\{V_n^{(m)}\}$可以相互线性表示.

$$V_n^{(j)}=W_n^{(j)}+c'_{nj,j-1}W_n^{(j-1)}+\cdots+c'_{nj,1}W_n^{(1)} \tag{29}$$

$$W_n^{(m)}=V_n^{(m)}+c_{n_m,m-1}V_n^{(m-1)}+\cdots+c_{n_m,1}V_n^{(1)} \tag{30}$$

其中$\{c_{n_m,l}\mid m,l\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}\}$，$\{c'_{nj,l}\mid j,l\in\mathbb{N},n\in\mathbb{Z}\}$都能计算出.

由于p约化的 BKP 系统的τ函数并不含有冗余变量t_{mp}，所以要将这些算子的冗余变量去掉. 为了方便表示引入下列符号：用$\widetilde{V}_n^{(j)}$和$\widetilde{W}_n^{(j)}$表示包含的所有项都不含变量$\{J_{-mp}\mid m\in\mathbb{N}\}$中的任一项，用$\overset{\vee}{V}_n^{(j)}$和$\overset{\vee}{W}_n^{(j)}$表示包含的所有项均至少含变量$\{J_{-mp}\mid m\in\mathbb{N}\}$中的一项.

$$V_n^{(j)}=\widetilde{V}_n^{(j)}+\overset{\vee}{V}_n^{(j)},\ \widetilde{V}_n^{(j)}=V_n^{(j)}\ |_{J_{-mp}=0,\,m\in\mathbb{N}} \tag{31}$$

$$W_n^{(j)}=\widetilde{W}_n^{(j)}+\overset{\vee}{W}_n^{(j)},\ \widetilde{W}_n^{(j)}=W_n^{(j)}\ |_{J_{-mp}=0,\,m\in\mathbb{N}} \tag{32}$$

然而去掉变量t_{mp}后，变量∂_{mp}(or J_{mp})也变得冗余. 因此，冗余变量$\{J_{mp}\mid m\in\mathbb{Z}\}$也需要去掉. 同样的引入一些符号，用$\hat{V}_n^{(j)}$和$\hat{W}_n^{(j)}$表示包含的所有项都不含变量$\{J_{-mp}\mid m\in\mathbb{Z}\}$中的任一项，用$\ddot{V}_n^{(j)}$和$\ddot{W}_n^{(j)}$表示包含的所有项均至少含变量$\{J_{-mp}\mid m\in\mathbb{Z}\}$中的一项.

$$V_n^{(j)}=\hat{V}_n^{(j)}+\ddot{V}_n^{(j)},\ \hat{V}_n^{(j)}=V_n^{(j)}\ |_{J_{mp}=0,\,m\in\mathbb{Z}} \tag{33}$$

$$W_n^{(j)}=\hat{W}_n^{(j)}+\ddot{W}_n^{(j)},\ \hat{W}_n^{(j)}=W_n^{(j)}\ |_{J_{mp}=0,\,m\in\mathbb{Z}} \tag{34}$$

最后，根据命题2里对于任意的$m\in\mathbb{N}$，$\{W_n^{(m)}\}$和$\{V_n^{(m)}\}$可以相互线性表示. 将弦方程约束算子$\{\hat{V}_{jp}\mid j=-1,0,1,2\cdots\}$作用在$\tau$函数上便可得到如下结论.

定理 1 如果τ函数$\tau(t)$是p约化 BKP 系统的且满足弦方程，则

$$\widetilde{V}_{jp}^{(i)}\tau(t)=\hat{V}_{jp}^{(i)}\tau(t)=\lambda_j^{(i)}\tau(t)\qquad i\in\mathbb{N}_{\text{even}},\ j=0,2,4,6,\cdots \tag{35}$$

$$\widetilde{V}_{jp}^{(i)}\tau(t)=\hat{V}_{jp}^{(i)}\tau(t)=\lambda_j^{(i)}\tau(t)\qquad i\in\mathbb{N}_{\text{odd}},\ j=-1,1,3,5,\cdots \tag{36}$$

其中$\lambda_j^{(i)}$是τ函数的特征值，算子$\widetilde{V}_{jp}^{(i)}$只有当j，p和i都是奇数或都是偶数时存在.

3　Virasoro 代数和 p 约化的 W 代数

本节进一步研究弦方程加在 BKP 系统的约束所形成的代数结构. 通过计算发现二阶弦方程约束算子 $\hat{V}_{jp}^{(2)}$ 恰好可以生成特殊的 Lie 代数，即非负的 Virasoro 代数；三阶弦方程约束算子也可以生成特殊的 Lie 代数，即 p 约化的 W 代数，说明其具有良好的内部结构.

为方便计算代数结构，先将 $V_n^{(2)}$ 和 $V_n^{(3)}$ 按冗余变量 $\{J_{mp} \mid m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}\}$ 展开.

$$V_n^{(2)} = \hat{V}_n^{(2)} + \sum_{m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} :J_{mp} V_{n-mp}^{(1)}:\,,\quad n \in \mathbb{Z}_{\text{even}} \tag{37}$$

$$V_n^{(3)} = \hat{V}_n^{(3)} + 3\sum_{m \in \mathbb{Z}_{\text{odd}}} :J_{mp} \hat{V}_{n-mp}^{(2)}: + \sum_{n_1,\, n_2 \in \mathbb{Z}_{odd}} :J_{n_1 p} J_{n_2 p} J_{n-n_1 p-n_2 p}^{(1)}:\,,\quad n \in \mathbb{Z}_{\text{odd}} \tag{38}$$

接着，计算二阶与三阶的弦方程约束的算子的对易子.

3.1　$\{\hat{V}_{2k}^{(2)}\}$ 和 $\{\hat{V}_{2l}^{(2)}\}$ 的代数结构标题布置

引理 1　对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$，$p \geqslant 3$ 且 $p \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$，$\{\hat{V}_{2np}^{(2)}\}$ 存在以下的对易关系

$$\left[\frac{1}{4p}\hat{V}_{2kp}^{(2)},\ \frac{1}{4p}\hat{V}^{(2)2lp}\right] = \frac{(k-l)}{4p}\hat{V}_{2kp+2lp}^{(2)} + \frac{(2k^3p-k)}{24}\left(1-\frac{1}{p}\right)\delta_{k+l,0}\qquad k,l \in \mathbb{Z} \tag{39}$$

证　通过复杂计算，可以有以下对易子[15]

$$\left[\frac{1}{4}V_{2kp}^{(2)},\ \frac{1}{4}V_{2lp}^{(2)}\right] = \frac{(kp-lp)}{4}V_{2kp+2lp}^{(2)} + \frac{2(kp)^3+kp}{24}\delta_{kp+lp,0} \tag{40}$$

然后根据(37) 式将(40) 式的左边表示成

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{4}V_{2kp}^{(2)},\ \frac{1}{4}V_{2lp}^{(2)}\right] &= \left[\frac{1}{4}\hat{V}_{2kp}^{(2)} + \frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2k-2m-1)p},\ \frac{1}{4}\hat{V}_{2lp}^{(2)} + \frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2l-2m-1)p}\right] = \\ &\left[\frac{1}{4}\hat{V}_{2kp}^{(2)},\ \frac{1}{4}\hat{V}_{2lp}^{(2)}\right] + \left[\frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2k-2m-1)p},\ \frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2l-2m-1)p}\right]\end{aligned} \tag{41}$$

通过直接计算可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2k-2m-1)p},\ \frac{1}{4}\sum_{m\in\mathbb{Z}} J_{(2m+1)p}J_{(2l-2m-1)p}\right] = \\ &p^2\left[\frac{1}{4p}\sum_{m+n=(k-1)p} J_{(2m+1)p}J_{(2n+1)p},\ \frac{1}{4p}\sum_{m+n=(l-1)p} J_{(2m+1)p}J_{(2n+1)p}\right] = \\ &\frac{(k-l)}{4}p\,\ddot{V}_{2kp+2lp}^{(2)} + \frac{2k^3+k}{24}p^2\delta_{kp+lp,0}\end{aligned} \tag{42}$$

将(42) 式和(41) 式代入(40) 式里，可得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{4}\hat{V}_{2kp}^{(2)},\ \frac{1}{4}\hat{V}_{2lp}^{(2)}\right] + \frac{(k-l)}{4}p\,\ddot{V}_{2kp+2lp}^{(2)} + \frac{2k^3+k}{24}p^2\delta_{kp+lp,0} = \\ &\frac{(kp-lp)}{4}(\hat{V}_{2kp+2lp}^{(2)} + \ddot{V}_{2kp+2lp}^{(2)}) + \frac{2(kp)^3+kp}{24}\delta_{kp+lp,0}\end{aligned} \tag{43}$$

将(43) 式两边相同的项消掉，然后在所得式子两边除以 p^2，就可得到$\{\hat{V}_{2np}^{(2)}\}$ 之间的对易关系(39).

弦方程限制的算子$\{\hat{V}_{jp}^{(2)}\}$ 的下指标 j 的取值范围为$\{0,1,2,\cdots\}$. 在引理 1 的基础上，经过一个简单变换，便可得到以下定理.

定理 2　记 $Y_k^{(2)} = \dfrac{1}{4p}\hat{V}_{2kp}^{(2)}$，则

$$[Y_k^{(2)},\ Y_l^{(2)}] = (k-l)Y_{k+l}^{(2)}\qquad k,l \in \{0,1,2,\cdots\} \tag{44}$$

(44) 式表明$\{Y_k^{(2)} \mid k=0,1,2,\cdots\}$ 恰好形成一个非负 Virasoro 代数.

3.2 $\{\hat{V}{}^{(2)}_{2k}\}$ 和 $\{\hat{V}{}^{(3)}_{2l+1}\}$ 的代数结构

推论 1 对于任意的 $n \in \mathbb{Z}$，$p \geqslant 3$ 且 $p \in \mathbb{N}_{\text{odd}}$，$\{\hat{V}{}^{(2)}_{2np}\}$ 和 $\{\hat{V}{}^{(3)}_{2np+1}\}$ 存在以下对易关系，

$$\left[\frac{1}{2}\hat{V}{}^{(2)}_{2kp},\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=(2(2kp)-(2l+1)p)\hat{V}{}^{(3)}_{(2k+2l+1)p} \tag{45}$$

证 计算得到以下对易子[15]

$$\left[\frac{1}{2}V^{(2)}_{2kp},\ V^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=(2(2kp)-(2l+1)p)V^{(3)}_{(2k+2l+1)p}+(2k^3+k)V^{(1)}_{(2k+2l+1)p} \tag{46}$$

再将(33)式代入(46)式，可得

$$\left[\frac{1}{2}(\hat{V}{}^{(2)}_{2kp}+\ddot{V}^{(2)}_{2kp}),\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}+\ddot{V}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=(2(2kp)-(2l+1)p)V^{(3)}_{(2k+2l+1)p}+(2k^3p^3+kp)V^{(1)}_{(2k+2l+1)p} \tag{47}$$

然后，利用(37)式和(38)式将(47)式的左边写成如下形式

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{2}(\hat{V}{}^{(2)}_{2kp}+\ddot{V}^{(2)}_{2kp}),\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}+\ddot{V}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=\\&\left[\frac{1}{2}\hat{V}{}^{(2)}_{2kp},\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]+\left[\frac{1}{2}\hat{V}{}^{(2)}_{2kp},\ \ddot{V}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]+\left[\frac{1}{2}\ddot{V}^{(2)}_{2kp},\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]+\left[\frac{1}{2}\ddot{V}^{(2)}_{2kp},\ \ddot{V}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=\\&\left[\frac{1}{2}\hat{V}{}^{(2)}_{2kp},\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]+(4k-(2l+1))p\,\ddot{V}^{(3)}_{(2k+2l+1)p}+(2k^3p^3+kp)V^{(1)}_{(2k+2l+1)p}\end{aligned} \tag{48}$$

最后，将(48)式代入(47)式后，消掉相同的项便可得到(45)式所示 $\{\hat{V}{}^{(2)}_{2np}\}$ 和 $\{\hat{V}{}^{(3)}_{2np+1}\}$ 对易关系.

因弦方程约束算子 $\{\hat{V}{}^{(3)}_{jp}\}$ 的下指标 j 取值范围为 $\{-1,0,1,2,\cdots\}$，则有

$$\left[\frac{1}{2}\hat{V}{}^{(2)}_{2kp},\ \hat{V}{}^{(3)}_{(2l+1)p}\right]=((4k-2l-1)p)\hat{V}{}^{(3)}_{(2k+2l+1)p},\ k\in\{0,1,2,\cdots\},\ l\in\{-1,0,1,2,\cdots\} \tag{49}$$

从(49)式可以看出 $\{\hat{V}{}^{(2)}_{2k}\}$ 和 $\{\hat{V}{}^{(3)}_{2l+1}\}$ 能形成一个 W 代数.

上述结论表明弦方程约束算子 $\{\hat{V}{}^{(i)}_{jp}\}$ 也有很好的代数结构，这可以看作是 Virasoro 代数的扩展. 这也是BKP系统不同于其他KP系统的一个特殊性质. 其代数结构和现有的KP系统也是相容的，从而验证了本文的 BKP 系统弦方程的定义的正确性.

4 结束语

本文先重新优化了 BKP 弦方程的定义，并从此定义出发给出了弦方程加在 p 约化 BKP 系统的 τ 函数上所生成的无冗余变量的弦方程约束算子 $\{\hat{V}_{jp}\mid j=-1,0,1,2\cdots\}$. 通过计算，发现弦方程加在BKP系统的约束形成良好的 Lie 代数、非负的 Virasoro 代数和 W 代数. 这为进一步探索非线性可积系统与二维共形场论的内在联系打下基础. 我们将继续探索 BKP 系统的弦方程的无冗余变量约束算子的性质，进一步尝试探索弦方程约束算子对应 p 约化 BKP 系统的 τ 函数的代数性质.

参考文献：

[1] DATE E, KASHIWARA M, JIMBO M, et al. Transformation Groups for Soliton Equations, in Nonlinear Integrable Systems-Classical Theory and Quantum Theory [M]. World Scientifc, 1983, 39-119.

[2] SAWADA K, KOTERA T. A Method for Finding N-Soliton Solutions of the K. D. V. Equation and K. D. V. -Like Equation [J]. Progress of Theoretical Physics, 1974, 51(5): 1355-1367.

[3] SHEN H F, TU M H. On the String Equation of the BKP Hierarchy [J]. International Journal of Modern Physics A, 2009, 24(22): 4193-4208.

[4] KONTSEVICH M. Intersection Theory on the Moduli Space of Curves and the Matrix Airy Function [J]. Communications in Mathematical Physics，1992，147(1)：1-23.

[5] DICKEY L A. Additional Symmetries of Kp，Grassmannian，and the String Equation Ii [J]. Modern Physics Letters A，1993，8(14)：1357-1377.

[6] MA W X. N-Soliton Solution of a Combined pKP-BKP Equation [J]. Journal of Geometry and Physics，2021，165：104191.

[7] ASAAD M G，MA W X. Pfaffian Solutions to a (3+1)-Dimensional Generalized B-Type Kadomtsev-Petviashvili Equation and Its Modified Counterpart [J]. Applied Mathematics and Computation，2012，218(9)：5524-5542.

[8] ROZHKOVSKAYA N. Multiparameter Schur Q-Functions are Solutions of the BKP Hierarchy：10. 3842/SIGMA. 2019. 065 [P]. 2019-08-30.

[9] VAN DE LEUR J. The Adler-Shiota-Van Moerbeke Formula for the BKP Hierarchy [J]. Journal of Mathematical Physics，1995，36(9)：4940-4951.

[10] TU M H. On the BKP Hierarchy：Additional Symmetries，Fay Identity and Adler-Shiota-Van Moerbeke Formula [J]. Letters in Mathematical Physics，2007，81(2)：93-105.

[11] LEUR J. The Nth Reduced BKP Hierarchy，the String Equation and BW1+∞-Constraints [J]. Acta Applicandae Mathematica，1996，44(1-2)：185-206.

[12] LA H. Geometry of Virasoro Constraints in Nonperturbative 2-d Quantum Gravity [J]. Communications in Mathematical Physics，1991，140(3)：569-588.

[13] DICKEY L A. Lectures on Classical W-Algebras [J]. Acta Applicandae Mathematica，1997，47(3)：243-321.

[14] JIMBO M，MIWA T. Solitons and Infinite-Dimensional Lie Algebras [J]. Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences，1983，19(3)：943-1001.

[15] LIU S W. Eigenvalues of the String Constraints for the Kadomtsev-Petviashvili Hierarchy [J]. Journal of Mathematical Physics，2015，56(11)：113505.

[16] KAC V，VAN DE LEUR J. Polynomial Tau-Functions of BKP and DKP Hierarchies [J]. Journal of Mathematical Physics，2019，60(7)：071702.

[17] DATE E，KASHIWARA M，MIWA T. Vertex Operators and “τ” Functions Transformation Groups for Soliton Equations，II [J]. Proceedings of the Japan Academy，Series A，Mathematical Sciences，1981，57(8)：427-507.

责任编辑　张构