第 48 卷 第 5 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 5 月
Vol. 48 No. 5 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) May 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.05.003

乘法噪音下 Kuramoto-Sivashinsky 方程的后向紧随机奇拉回吸引子①

夏欢， 李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：在由奇函数构成的勒贝格空间上研究了带有彩色系数和乘法噪音的随机 Kuramoto-Sivashinsky 方程对应解的长时间动力行为. 在外力是后向缓增的假设下，利用桥函数和彩色噪音的性质对方程的解进行了后向一致估计，由此构造一个后向一致吸收集，并证明了协循环的后向渐近紧性. 最后利用吸引子的存在性定理证明了后向紧奇拉回吸引子的存在性及其可测性.

关 键 词：Kuramoto-Sivashinsky 方程；乘法噪音；后向紧随机拉回吸引子

中图分类号：O193 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2023)05-0022-08

The Backward Compact Random Odd Pullback Attractor of The Kuramoto-Sivashinsky Equation Under Multiplicative Noise

XIA Huan， LI Yangrong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract: In this paper，we study the long-time dynamic behavior for the solution of stochastic Kuramoto-Sivashinsky equation with color coefficient and multiplicative noise on a Lebesgue space composed of odd functions. Under the assumption that the external force is backward tempered，we obtain the backward-uniform estimates of the solution by using the properties of bridge function and color noise. Thus a backward-uniform absorption set is constructed and the backward asymptotic compactness of cocycle is proved. Finally，the existence and measurability of the backward compact odd pullback attractor are proved by using the existence theorem of attractors.

Key words: Kuramoto-Sivashinsky equations；multiplicative noise；backward compact random pullback attractor

1 带乘法噪音和彩色系数的随机 K-S 方程

文献[1-2]引入了有周期边界的一维确定型 Kuramoto-Sivashinsky(K-S) 方程作为反应扩散系统中湍

① 收稿日期：2022-11-24

基金项目：国家自然科学基金项目(12271444).

作者简介：夏欢，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授.

流和波传播的一维模型. 文献[3-4]研究了确定型 K-S 方程. 文献[5-9]和文献[10]分别研究了 Wiener 噪音和 Lévy 噪音下的随机 K-S 方程. 本文主要研究带有乘法噪音和彩色系数的随机 K-S 方程

$$\begin{cases} du+(\eta D^4u+D^2u+e^{-\alpha z(\theta_t\omega)}uDu)dt=f(t,x)dt+\alpha u\circ dW_t \\ D^iu(t,-l)=D^iu(t,l) \qquad i=0,1,2,3 \\ u(\tau,x)=u_\tau(x) \qquad \forall x\in G=(-l,l) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t\geqslant\tau\in\mathbb{R}$，$\alpha>0$，$D=\dfrac{\partial}{\partial x}$，$f$ 是依赖于时间和空间的外力项. $W_t=W(t,\omega)$ 是概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$上的双边实值 Wiener 过程，$z(\theta_t\omega)$ 是一个彩色噪音，$\alpha u\circ dW_t$ 表示 Stratonovich 积分意义下的乘法噪音.

设状态空间为

$$H=\left\{u\in L^2(G):u(t,-l)=u(t,l),\int_G u(t,x)dx=0\right\}$$

本文主要研究其对应的奇空间

$$H_0=\{u\in H:u(t,-x)=-u(t,x)\}$$

上的后向紧拉回随机吸引子的存在性. 勒贝格空间 H_0 被赋予通常的 L^2 范数

$$\|u\|_{H_0}^2=\|u\|_{L^2}^2=(u,u)_{L^2}$$

$H_{\text{per}}^2(G)$ 为 G 上由周期函数构成的索伯列夫空间，记 $V=\dot{H}_{\text{per}}^2(G)=H\cap H_{\text{per}}^2(G)$，其奇空间为 $V_0=H_0\cap H_{\text{per}}^2(G)$. 索伯列夫空间 V_0 上的范数为 $\|u\|_{V_0}=\|D^2u\|_{H_0}$，内积为 $(u,v)_{V_0}=\int_G D^2u\cdot D^2v\,dx$（见文献[11]).

令$(\Omega,\mathscr{F},P)$为标准的 Wiener 空间，其中

$$\Omega=\left\{\omega\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}):\omega(0)=0,\lim_{t\to\pm\infty}\frac{\omega(t)}{t}=0\right\}$$

$\mathscr{F}$ 是 Ω 上由紧开拓扑诱导的博雷尔-σ 代数. P 是$(\Omega,\mathscr{F})$上的双边 Wiener 测度. $\{\theta_t:\Omega\longrightarrow\Omega\}$ 为一族保测自变换，$\theta_t w(\cdot)=w(t+\cdot)-w(t)$. 于是得到一个遍历度量动力系统$(\Omega,\mathscr{F},P,(\theta_t)_{t\in\mathbb{R}})$. 取 $W(t,\cdot)$ 是恒同算子，即满足 $W(t,\omega)=\omega(t)$，$\forall\omega\in\Omega$（见文献[5，12-14]).

对于非自治动力系统(1)，为了研究其长时间动力行为，我们关注其生成的拉回随机吸引子 $\mathscr{A}(\tau,\omega)$（见文献[12,15]). 由于在 H_0 或 V_0 上，方程(1)的解满足 $u(t,-x)=-u(t,x)$，因此 $\mathscr{A}(\tau,\omega)$ 由奇函数组成，这样的吸引子被称为奇吸引子. 在本节，我们取集族 $\mathfrak{B}$ 由 H_0 中所有后向缓增的双参数集 $\mathscr{B}$ 构成，其中 $\mathscr{B}$ 为

$$\mathscr{B}=\{\mathscr{B}(\tau,\omega)\subset H_0:\lim_{t\to+\infty}e^{-\mu t}\sup_{s\leqslant\tau}\|\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|_{H_0}^2=0,\ \forall\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega,\ \forall\mu>0\}$$

此外称双参数集 $\mathscr{B}$ 是后向紧的，如果 $\mathscr{B}$ 是紧的并且对每个时间 $\tau\in\mathbb{R}$ 和样本 $\omega\in\Omega$，$\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{B}(s,\omega)$ 是预紧的. 这样的 $\mathscr{B}$ 对应生成的 $\mathfrak{B}$-拉回随机吸引子称为后向紧随机拉回吸引子.

我们考虑如下的变量变换：

$$v(t,\tau,\omega,v_\tau(x))=e^{-\alpha z(\theta_t\omega)}u(t,\tau,\omega,u_\tau(x))-\xi(x) \tag{2}$$

其中 $-\dfrac{a_1}{\pi}\sum_{k=1}^{M}\dfrac{1}{k}\sin\dfrac{2k\pi x}{l}=\xi(x)\in\dot{C}^\infty(-l,l)$ 是 H_0 和 V_0 之间的桥函数，$M=M(a_1,a_2,l)>0$ 是一个足够大的数. 显然 $\xi(x)$ 是奇函数，且对任意 $a_1,a_2>0$，$w\in V_0$ 有[5]

$$a_1\|w\|_{H_0}^2\leqslant a_2\|w\|_{V_0}^2+(wD\xi,w) \tag{3}$$

随机变量 $z(\theta_t\omega)=-\int_{-\infty}^0 e^s\cdot\theta_t\omega(s)ds$ 是一维随机微分方程 $dz+zdt=dW(t)$ 的稳定解，被称为 Ornstein-Uhlenbeck(O-U) 过程或彩色噪音，有如下性质(见文献[5,12-13])：存在 θ-不变满测集 $\widetilde{\Omega}\in\Omega$，使得对任意 $\omega\in\widetilde{\Omega}$，有 $t\longrightarrow z(\theta_t\omega)$ 连续，且对任意 $\lambda>0$，有

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^t|z(\theta_r\omega)|dr=E|z|<+\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-\lambda t}\sup_{t\in\mathbb{R}}|z(\theta_{-t}\omega)|=0$$

$$\lim_{t\to\pm\infty}\frac{|z(\theta_t\omega)|}{|t|}=0 \tag{4}$$

对任意 $\omega\in\widetilde{\Omega}$(仍记 $\widetilde{\Omega}=\Omega$),方程(1)在(2)式的变换下可重记为关于 $v(t,\tau,\omega,v_\tau(x))$ 的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\eta D^4v+D^2v+vD(v+\xi)+\xi Dv-\alpha z(\theta_t\omega)v= \\ \mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_t\omega)}f+\alpha z(\theta_t\omega)\xi-(\eta D^4\xi+D^2\xi+\xi D\xi) \\ D^iv(t,-l)=D^iv(t,l) \qquad i=0,1,2,3 \\ v(\tau,x)=v_\tau(x) \qquad \forall x\in G\end{cases} \tag{5}$$

引理1　对 $f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H_0)$ 和任意的 $v_\tau\in H_0$,$\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,方程(5)在 H_0 中存在唯一的弱解 $v(s,\tau,\omega,v_\tau)$ 满足 $v(\cdot,\tau,\omega,v_\tau)\in C(\tau,+\infty;H_0)\cap L^2_{\mathrm{loc}}(\tau,+\infty;V_0)$,$v(\tau,\tau,\omega,v_\tau)=v_\tau\in H_0$. 此外,$v(s,\tau,\omega,v_\tau)$ 连续依赖于 s,τ,v_τ,且关于样本 $\omega\in\Omega$ 可测.

类似文献[3-5,7],可以用标准的 Faedo-Galerkin 方法证明方程(5)在奇空间 $H_0\cap V_0$ 上解的适定性. 因此由方程(5)的解可以定义一个协循环 Φ:$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\Omega\times H_0\longrightarrow H_0$,使得对任意$(t,\tau,\omega,v_\tau)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\Omega\times H_0$,有

$$\Phi(t,\tau,\omega,u_\tau)=u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau)=\mathrm{e}^{\alpha z(\theta_t\omega)}(v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,v_\tau)+\xi) \tag{6}$$

其中初值 $u_\tau=\mathrm{e}^{\alpha z(\omega)}(v_\tau+\xi(x))$. Φ 关于 t,τ,u_τ 是三元连续的,且关于 $\omega\in\Omega$ 是可测的.

2　解的后向一致估计

为了得到 K-S 方程(5)的解的后向一致估计,我们给出外力项 $f(t,x)$ 和噪音系数 α 的一些合理假设.

假设1　存在某个常数 $c_0<+\infty$,使得噪音系数 $0<\alpha\leqslant c_0$.

事实上,α 可以看作一个控制方程(1)中噪音项增长速度的常数. 若没有特殊说明,c 为任意常数.

假设2　$f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H_0)$ 是后向缓增的,即对任意 $\lambda>0$,$\tau\in\mathbb{R}$,有

$$F(\lambda,\tau)=\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{s}\mathrm{e}^{\lambda(r-s)}\|f(r)\|^2_{H_0}\mathrm{d}r<+\infty$$

显然 $F(\lambda,\cdot)$ 是增函数. 若 f 后向缓增,则 f 是缓增的,且

$$\int_{-\infty}^{\tau}\mathrm{e}^{\lambda(r-\tau)}\|f(r)\|^2_{H_0}\mathrm{d}r<+\infty \qquad \forall\lambda>0,\ \tau\in\mathbb{R}$$

引理2　若假设1、假设2成立,则对任意的 $\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$ 和 $\mathscr{B}=\{\mathscr{B}(\tau,\omega)\}\in\mathfrak{B}$,存在 $T=T(\mathscr{B},\tau,\omega)$,使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\|u(s,s-t,\theta_{-s}\omega,u_{s-t})\|^2_{H_0}\leqslant R_0(\omega)+R_1(\tau,\omega) \tag{7}$$

对所有 $t\geqslant T$,$u_{s-t}\in\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)$ 一致成立. 其中

$$R_0(\omega)=c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\left[1+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\mathrm{d}r\right] \tag{8}$$

$$R_1(\tau,\omega)=c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r \tag{9}$$

证　在方程(5)两端同时乘 $2v(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})$,并关于 $x\in G$ 积分,有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v\|^2_{H_0}+2\eta\|D^2v\|^2_{H_0}-2\|Dv\|^2_{H_0}+2(D(\xi v),v)-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\|v\|^2_{H_0}= \\ &2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f,v)+2(\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\xi,v)-2(\eta D^4\xi+D^2\xi+\xi D\xi,v)\end{aligned} \tag{10}$$

记 $\|\cdot\|_{H_0}=\|\cdot\|$. 利用 Young 不等式 $ab\leqslant\dfrac{\eta a^2}{4}+\dfrac{b^2}{\eta}$($\forall\eta>0$)和 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式 $\|Du\|_{L^2}\leqslant\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}\cdot\|D^2u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2}$,得到

$$-2\|Dv\|^2\geqslant-\frac{\eta}{2}\|D^2v\|^2-\frac{2}{\eta}\|v\|^2$$

再由分部积分法,有 $2(\xi Dv,v)=-(vD\xi,v)$,于是 $2(D(\xi v),v)=(vD\xi,v)$. 下面由假设1和 ξ 的连续

性对(10)式的右边项进行估计：

$$2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f,v)=2\int_G \mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f\cdot v\mathrm{d}x\leqslant \mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f\|^2+\|v\|^2$$

$$2(\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\xi,v)\leqslant c\,|z(\theta_{r-s}\omega)|^2+\|v\|^2$$

$$-2(\eta D^4\xi+D^2\xi+\xi D\xi,v)\leqslant c+\|v\|^2$$

则(10)式可放缩为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v\|^2+\eta\|D^2v\|^2+\frac{\eta}{2}\|D^2v\|^2-\left(\frac{2}{\eta}+3+2\alpha\,|z(\theta_{r-s}\omega)|\right)\|v\|^2+(vD\xi,v)\leqslant \mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f\|^2+c(1+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2) \tag{11}$$

在(3)式中取 $a_1=\frac{2}{\eta}+4+2\alpha(E\,|z|+1)>0$，$a_2=\frac{\eta}{2}>0$，于是(11)式可转化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v\|^2+\eta\|D^2v\|^2\leqslant -\beta\|v\|^2+2\alpha\,|z(\theta_{r-s}\omega)|\cdot\|v\|^2+\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f\|^2+c(1+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2) \tag{12}$$

由(4)式知 $1+2\alpha(E\,|z|+1)=\beta<+\infty$. 将(12)式乘 $\mathrm{e}^{\beta(r-(s-t))-\int_{s-t}^{r}2\alpha|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}$ 并关于 $r\in[s-t,s]$ 积分，有

$$\begin{aligned}&\|v(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\|^2-\|v_{s-t}\|^2\mathrm{e}^{-\beta t+2\alpha\int_{s-t}^{s}|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}+\\&\eta\int_{s-t}^{s}\|D^2v(r)\|^2\mathrm{e}^{\beta(r-s)+2\alpha\int_r^s|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{d}r\leqslant\\&\int_{s-t}^{s}\mathrm{e}^{\beta(r-s)+2\alpha\int_r^s|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+c(1+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2))\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{13}$$

通过变换 $u(s)=u(s,s-t,\theta_{-s}\omega,u_{s-t})=\mathrm{e}^{\alpha z(\omega)}(v(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})+\xi)$，并借助 $(a+b)^2\leqslant 2a^2+2b^2$，有

$$\begin{aligned}\|u(s)\|^2=&\ \mathrm{e}^{2\alpha z(\omega)}\|v(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})+\xi\|^2\leqslant \mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}(c+\|v(s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\|^2)\leqslant\\&c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\left[1+\|v_{s-t}\|^2\mathrm{e}^{-\beta t+2\alpha\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}+\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\,\mathrm{d}r\right]+\\&c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r=I_1+I_f\end{aligned} \tag{14}$$

其中 $\|v_{s-t}\|^2\leqslant c\,\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{-t}\omega)}\|u_{s-t}\|^2+c$，$I_f$ 为 f 的相关项，I_1 为 f 的无关项.

由(4)式，存在某个 $T_0=T_0(\omega)>0$，使得对任意 $t\geqslant T_0$，有

$$\left|\frac{1}{t}\int_{-t}^{0}|z(\theta_r\omega)|\,\mathrm{d}r-E\,|z|\right|<\varepsilon=1$$

于是

$$\mathrm{e}^{-\beta t+2\alpha\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\leqslant \mathrm{e}^{-t}<1 \tag{15}$$

又根据 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{|z(\theta_{-t}\omega)|}{|-t|}=0$，于是对任意 $\varepsilon>0$，存在某个 T_1，使得当 $t\geqslant T_1>0$ 时有

$$\frac{|z(\theta_{-t}\omega)|}{t}<\varepsilon \tag{16}$$

若取 $\varepsilon=\frac{1}{4\alpha}$，则 $-2\alpha z(\theta_{-t}\omega)<2\alpha\varepsilon t=\frac{t}{2}$，从而当 $t\to+\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{-t}\omega)}<\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\to 0$. 结合 $u_{s-t}\in\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)$，有 $\sup\limits_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{-t}\omega)}\|u_{s-t}\|^2\leqslant\sup\limits_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\|\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2\leqslant 1$，因此将(14)式关于 $s\leqslant\tau$ 取上确界后，对任意 $t\geqslant T=\max\{T_0,T_1\}$，结合(15)式可找到变量 $R_0(\omega)$ 控制 I_1：

$$\begin{aligned}\sup_{s\leqslant\tau}I_1\leqslant&\sup_{s\leqslant\tau}c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\left[1+\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{-t}\omega)}\|u_{s-t}\|^2+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\mathrm{d}r\right]\leqslant\\&c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\left[1+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\mathrm{d}r\right]=R_0(\omega)\end{aligned} \tag{17}$$

最后证明 I_f 可由变量 $R_1(\tau,\omega)$ 控制. 为了统一，我们仍对时间 $s\leqslant\tau$ 取上确界

$$\sup_{s\leqslant\tau} I_f = c\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$

$$c\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r=R_1(\tau,\omega) \tag{18}$$

综合(17)和(18)式即证得解 $u(t,\tau,\omega,u_\tau)$ 的后向一致估计(7)式.

推论1 根据(13)和(14)式,对任意 $\omega\in\Omega$, $\tau\in\mathbb{R}$,有

$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-t}^{0}\|D^2v(r+s)\|^2\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{d}r\leqslant R_0(\omega)+R_1(\tau,\omega)<+\infty \tag{19}$$

在(12)式两边同时乘 $\mathrm{e}^{\beta(r-(s-t))-\int_{s-t}^{r}2\alpha|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}$,并关于 $r\in[s-t,\sigma]$ 积分,(其中 $s-1\leqslant\sigma\leqslant s$, $t\geqslant1$),得

$$\|v(\sigma,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\|^2\leqslant$$

$$\|v_{s-t}\|^2\mathrm{e}^{\beta(s-t-\sigma)+\int_{s-t}^{\sigma}2\alpha|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}+$$

$$\int_{s-t}^{\sigma}\mathrm{e}^{\beta(r-\sigma)+\int_r^{\sigma}2\alpha|z(\theta_{\tilde r-s}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}[\eta\|D^2v(r)\|^2+\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+c(1+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2)]\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{s-t-\sigma}(\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|}\|u_{s-t}\|^2+c)+$$

$$\int_{s-t}^{\sigma}\mathrm{e}^{r-\sigma}[\eta\|D^2v(r)\|^2+\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+c(1+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2)]\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\mathrm{e}^{s-\sigma}(\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\|u_{s-t}\|^2+c\mathrm{e}^{-t})+$$

$$\int_{-t}^{\sigma-s}(\eta\|D^2v(r+s)\|^2+\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2)\mathrm{d}r+\mathrm{e}^{s-\sigma}\int_{-t}^{\sigma-s}\mathrm{e}^r(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\mathrm{e}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\|u_{s-t}\|^2+c+\int_{-t}^{0}(\eta\|D^2v(r+s)\|^2+\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2)\mathrm{d}r+\mathrm{e}\cdot\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^r|z(\theta_r\omega)|^2\mathrm{d}r$$

根据 $u_{s-t}\in\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)$, $\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^r|z(\theta_r\omega)|^2\mathrm{d}r\to0(t\to+\infty)$ 及以下估计

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^{0}\eta\|D^2v(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant c\sup_{s\leqslant\tau}\eta\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-t}^{0}\|D^2v(r+s)\|^2\mathrm{e}^{\beta r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\mathrm{d}r<+\infty$$

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant c_0\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant R_1(\tau,\omega)$$

我们可以得到

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sup_{s-1\leqslant\sigma\leqslant s}\|v(\sigma)\|^2<+\infty \tag{20}$$

命题1 协循环 Φ 有一个 $\mathfrak{B}$-拉回吸收集 $\mathscr{K}$,由如下形式给定:

$$\mathscr{K}(\tau,\omega)=\{u\in H_0:\|u\|_{H_0}^2\leqslant R_0(\omega)+R_1(\tau,\omega)\} \tag{21}$$

其中 $R_0(\omega)$,$R_1(\tau,\omega)$ 分别由(8)和(9)式给出.并且 $\mathscr{K}=\{\mathscr{K}(\tau,\omega)\}\in\mathfrak{B}$ 是一个后向吸收集,即对任意 $\mathscr{B}\in\mathfrak{B}$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$,存在 $T=T(\tau,\omega,\mathscr{B})$,使得对于任意 $t\geqslant T$,有

$$\bigcup_{s\leqslant\tau}\Phi(t,s-t,\theta_{-t}\omega,\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega))\subset\mathscr{K}(\tau,\omega) \tag{22}$$

证 首先证明 $\mathscr{K}=\{\mathscr{K}(\tau,\omega)\}\in\mathfrak{B}$.由于 $z(\theta_t\omega)$ 是随机变量,则 $R_0(\omega)$ 是随机变量.由(15)式,对每个 $\omega\in\Omega$,有 $R_0(\omega)<+\infty$ 成立.另外,由于 $R_0(\omega)$ 与变量 τ 无关,因此只需证 $R_0(\omega)$ 是缓增的.

不失一般性地,我们假设 $0<\mu\leqslant\mathrm{e}^{-t}\wedge4\alpha$,因此有 $\beta=2\alpha(E|z|+1)+1\geqslant2\alpha\left(E|z|+\frac{\mu}{4\alpha}\right)$ 以及

$$\mathrm{e}^{-\mu t}R_0(\theta_{-t}\omega)=c\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|}\mathrm{e}^{-\mu t}\left[1+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta\cdot r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r-t}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}(1+|z(\theta_{r-t}\omega)|^2)\mathrm{d}r\right]\leqslant$$

$$c\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|}\left[\mathrm{e}^{-\mu t}+\int_{-\infty}^{-t}\mathrm{e}^{\beta\cdot(r+t)+2\alpha\int_r^{-t}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r-\mu t}(1+|z(\theta_r\omega)|^2)\mathrm{d}r\right] \tag{23}$$

由(4)式有

$$\int_r^{-t}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r=$$

$$\int_r^{0}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r-\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r\leqslant$$

$$E\,|\,z\,|\,(-t-r)+\frac{\mu}{8\alpha}(t-r)\qquad \forall\, t\geqslant T_0$$

因此

$$\mathrm{e}^{\beta\cdot(r+t)+2\alpha\int_r^{-t}|z(\theta_{\tilde r}\omega)|\mathrm{d}\tilde r}\leqslant \mathrm{e}^{\frac{\mu r}{4}+\frac{3\mu t}{4}}\tag{24}$$

在(16)式中取 $\varepsilon=\dfrac{\mu}{16\alpha}<1$，于是 $2\alpha\,|\,z(\theta_{-t}\omega)\,|<2\alpha\varepsilon t=\dfrac{\mu}{8}t$. 因此对于任意 $t\geqslant T_1$，有

$$\mathrm{e}^{-\mu t}R_0(\theta_{-t}\omega)\leqslant c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|-\mu t}+c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|-\frac{\mu t}{4}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{\mu r}{4}}(1+|\,z(\theta_r\omega)\,|^2)\mathrm{d}r\leqslant$$

$$c\,\mathrm{e}^{-\frac{7\mu t}{8}}+c\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{8}}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{\mu r}{4}}(1+|\,z(\theta_r\omega)\,|^2)\,\mathrm{d}r<+\infty\tag{25}$$

从而证得 $R_0(\omega)$ 是后向缓增的. 根据 $\mathscr{F}(\lambda,\cdot)$ 的单调性有 $\sup\limits_{s<\tau}R_1(s-t,\theta_{-t}\omega)=R_1(\tau-t,\theta_{-t}\omega)$，同时利用(24),(16) 式和假设 1、假设 2，对任意 $t\geqslant T_1$，有

$$\begin{aligned}&c\,\mathrm{e}^{-\mu t}\sup_{s\leqslant\tau}R_1(s-t,\theta_{-t}\omega)\leqslant\\&c\,\mathrm{e}^{-\mu t+2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|}\sup_{s\leqslant\tau-t}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\beta r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde r-t}\omega)|\mathrm{d}\tilde r-2\alpha z(\theta_{r-t}\omega)}\,\|\,f(r+s)\,\|^2\mathrm{d}r\leqslant\\&c(\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{4}}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\theta_{-t}\omega)|})\sup_{s\leqslant\tau-t}\int_{-\infty}^{-t}(\mathrm{e}^{\frac{\mu r}{4}}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)})\,\|\,f(r+s+t)\,\|^2\mathrm{d}r\leqslant\\&c\,\mathrm{e}^{-\frac{\mu t}{8}}\sup_{s\leqslant\tau-t}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\frac{\mu r}{8}}\,\|\,f(r+s+t)\,\|^2\mathrm{d}r<+\infty\end{aligned}\tag{26}$$

由(26) 式即证 $R_1(\tau,\omega)$ 是后向缓增的. 最后由引理 2，对任意 $t\geqslant T=\max\{T_0,T_1\}$，有

$$\mathrm{e}^{-\mu t}\sup_{s\leqslant\tau}\|\,u(s-t,\theta_{-t}\omega)\,\|_{H_0}^2\leqslant \mathrm{e}^{-\mu t}\sup_{s\leqslant\tau}R_0(\theta_{-t}\omega)+\mathrm{e}^{-\mu t}\sup_{s\leqslant\tau}R_1(s-t,\theta_{-t}\omega)<+\infty$$

这意味着 $\mathscr{K}\in\mathfrak{B}$. 借助 $F(\lambda,\cdot)$ 的单调递增性质可以得到 $\bigcup\limits_{s\leqslant\tau}R_1(s,\omega)=R_1(\tau,\omega)$. 于是由(21) 式中吸收集的构造知 $\bigcup\limits_{s\leqslant\tau}\mathscr{K}(s,\omega)=\mathscr{K}(\tau,\omega)$，即证 $\mathscr{K}$ 是一个后向缓增的吸收集.

为了得到吸引子，接下来我们对方程(5) 在状态空间 V_0 上的解进行后向一致估计.

引理 3　若假设 1、假设 2 成立. 对任意 $s\leqslant\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ 和 $\mathscr{B}=\{\mathscr{B}(\tau,\omega):\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega\}\in\mathfrak{B}$, 存在 $T_2=T_2(\mathscr{B},\tau,\omega)$，使得对于每个 $t\geqslant T_2$ 和 $u_{s-t}\in\mathscr{B}(s-t,\theta_{-t}\omega)$，有 $\|\,u(s,s-t,\theta_{-s}\omega,u_{s-t})\,\|_{V_0}^2<+\infty$.

证　将方程(5) 两端同时与 $2D^4v(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})$ 做内积，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|\,D^2v\,\|^2+2\eta\,\|\,D^4v\,\|^2-2\,\|\,D^3v\,\|^2+2(vDv,D^4v)+2(D(\xi v),D^4v)-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\,\|\,D^2v\,\|^2=\\&2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f,D^4v)+2(\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\xi,D^4v)-2(\eta D^4\xi+D^2\xi+\xi D\xi,D^4v)\end{aligned}\tag{27}$$

首先利用 Young 不等式和 Gagliardo-Nirenberg 插值不等式对(27) 式中的某些项进行估计，

$$-2\,\|\,D^3v\,\|^2\geqslant-\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{4}-\frac{4}{\eta}\,\|\,D^2v\,\|^2$$

$$2(vDv,D^4v)\geqslant-\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{4}-\frac{4}{\eta}\,\|\,v\,\|^2\,\|\,D^2v\,\|^2$$

$$2(D(\xi v),D^4v)\geqslant-\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{4}-c\,\|\,D^2v\,\|^2$$

$$2(\mathrm{e}^{-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}f,D^4v)\leqslant\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{2}+c\,\mathrm{e}^{-2z(\theta_{r-s}\omega)}\,\|\,f(r)\,\|^2$$

再利用假设 1 和 $\xi(x)$ 的连续性对(27) 式的剩余项进行估计，

$$2(\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\xi,D^4v)\leqslant\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{2}+c\,|\,z(\theta_{r-s}\omega)\,|^2$$

$$-2(\eta D^4\xi+D^2\xi+\xi D\xi,D^4v)\leqslant\frac{\eta\,\|\,D^4v\,\|^2}{4}+c$$

综合上述估计可以得到不等式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|D^2v(r)\|^2-c\|D^2v(r)\|^2(1+\|v(r)\|^2+z(\theta_{r-s}\omega))\leqslant$$
$$c(\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2+1)\tag{28}$$

再根据微分形式的Gronwall引理，有

$$\|D^2v(s)\|^2\leqslant c\,\mathrm{e}^{\int_{s-1}^{s}(1+\|v(r)\|^2+z(\theta_{r-s}\omega))\mathrm{d}r}\int_{s-1}^{s}(\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2+1)\mathrm{d}r+$$
$$c\,\mathrm{e}^{\int_{s-1}^{s}(1+\|v(r)\|^2+z(\theta_{r-s}\omega))\mathrm{d}r}\int_{s-1}^{s}\|D^2v(r)\|^2\mathrm{d}r=$$
$$c\,\mathrm{e}^{J_1}J_2+c\,\mathrm{e}^{J_1}J_3\tag{29}$$

根据变换(2)有 $D^2u(s)=\mathrm{e}^{\alpha z(\omega)}\cdot(D^2v(s)+D^2\xi(x))$，其中 $\xi\in\dot{C}^{\infty}(-l,l)$，于是对任意 $s\leqslant\tau$，有

$$\|D^2u(s)\|^2\leqslant\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\cdot(2\sup_{s\leqslant\tau}\|D^2v(s)\|^2+c)\leqslant c\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{J_1}\cdot\sup_{s\leqslant\tau}(\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}J_2+\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}J_3)+c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}$$

根据(20)式和 $t\rightarrow z(\theta_t\omega)$ 的连续性知，存在某个 $T_{J_1}=T_{J_1}(\mathscr{B},\tau,\omega)$，对任意 $t\geqslant T_{J_1}$，

$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{J_1}=\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{\int_{s-1}^{s}(1+\|v(r)\|^2+z(\theta_{r-s}\omega))\mathrm{d}r}\leqslant\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{1+\int_{-1}^{0}z(\theta_r\omega)\mathrm{d}r+\sup\limits_{s-1\leqslant r\leqslant s}\|v(r)\|^2}\leqslant$$
$$\mathrm{e}^{1+\max\limits_{-1\leqslant r\leqslant 0}z(\theta_r\omega)}\mathrm{e}^{\sup\limits_{s\leqslant\tau}\sup\limits_{s-1\leqslant r\leqslant s}\|v(r)\|^2}<+\infty\tag{30}$$

由(15)式，存在 c_0 使得 $c_0\mathrm{e}^{\beta r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde{r}}\omega)|\mathrm{d}\tilde{r}}\geqslant 1$. 因此存在 $T_{J_2}=T_{J_2}(\mathscr{B},\tau,\omega)$，使得对任意 $t\geqslant T_{J_2}$，

$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}J_2=\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{s-1}^{s}[\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2+|z(\theta_{r-s}\omega)|^2+1]\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{s-1}^{s}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_{r-s}\omega)}\|f(r)\|^2\mathrm{d}r+c\int_{-1}^{0}|z(\theta_r\omega)|^2\mathrm{d}r+1\leqslant$$
$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-2\alpha z(\theta_r\omega)}\|f(r+s)\|^2\mathrm{d}r+c=$$
$$c_0R_1(\tau,\omega)+c<+\infty\tag{31}$$

最后利用(19)式可对(29)式的剩余项进行估计，存在 $T_{J_3}=T_{J_3}(\mathscr{B},\tau,\omega)$，当 $t\geqslant T_{J_3}$ 时，

$$\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}J_3=\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-1}^{0}\|D^2v(r+s)\|^2\mathrm{d}r\leqslant$$
$$c_0\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^{\beta r+2\alpha\int_r^0|z(\theta_{\tilde{r}}\omega)|\mathrm{d}\tilde{r}}\|D^2v(r+s)\|^2\mathrm{d}r<+\infty\tag{32}$$

注意，对每个 $\omega\in\Omega$，显然有 $c\,\mathrm{e}^{2\alpha|z(\omega)|}<+\infty$. 因此对任意的 $s\leqslant\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$\mathscr{B}\in\mathfrak{D}$，总存在 $T_2=T_2(\mathscr{B},\tau,\omega)=\max\{T_{J_1},T_{J_2},T_{J_3}\}$，使得对任意 $t\geqslant T_2$ 有 $\|D^2u(s)\|_{H_0}^2<+\infty$.

3 后向紧随机奇拉回吸引子的存在性

定理1 令噪音系数 α 满足假设1，外力项 $f\in L_{\mathrm{loc}}^2(\mathbb{R},H_0)$ 满足假设2. 在状态空间 $X=H_0$ 上，由K-S方程(5)生成的协循环 Φ 存在一个后向紧随机奇拉回吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}\in\mathfrak{D}$.

证 后向吸收集 $\mathscr{K}=\mathscr{K}(\tau,\omega)\in\mathfrak{D}$ 的存在性见命题1. 下面证明 Φ 是 $\mathfrak{D}$-拉回渐近紧的. 对于固定的 $(\tau,\omega,\mathscr{B})\in\mathbb{R}\times\Omega\times\mathfrak{D}$，取任意序列 $\{s_k\}$，$s_k\leqslant\tau$，$t_k\rightarrow+\infty$，并定义

$$u_k=\Phi(t_k,s_k-t_k,\theta_{-t_k}\omega,u_{0,k})=u(s_k,s_k-t_k,\theta_{-s_k}\omega,u_{0,k})\tag{33}$$

引理3已证 $\{u_k:k\in\mathbb{N}\}$ 在 V_0 中有界，再根据 V_0 紧嵌入 H_0 知 $\{u_k:k\in\mathbb{N}\}$ 在 H_0 中有收敛子列，即序列 $\{u_k:k\in\mathbb{N}\}$ 在 H_0 中是预紧的.

接下来证明后向紧的奇拉回吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 的存在性. 在(22)式中取 $s=\tau$，于是有 $\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,\mathscr{B}(\tau-t,\theta_{-t}\omega))\subset\mathscr{K}(\tau,\omega)$，$\forall t\geqslant T(\mathscr{B})$，$\mathscr{B}\in\mathfrak{D}$，即 $\mathscr{K}(\tau,\omega)$ 是吸收集. 在(33)式中取 $s_k=\tau$，则对应的序列 $\{u(\tau,\tau-t_k,\theta_{-\tau}\omega,u_{0,k})\}$ 有收敛子列，即 Φ 是后向渐近紧的. 因此根据文献[15]的吸引子存在定理可得 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 存在，且由 ω-极限集构成，

$$\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau,\omega)=\bigcap_{T>0}\overline{\bigcup_{t\geqslant T}\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,\mathscr{K}(\tau-t,\theta_{-t}\omega))}\tag{34}$$

并且 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau,\omega)$ 是后向紧的，即对任意 $\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$\bigcup\limits_{s\leqslant\tau}\mathscr{A}(s,\omega)$ 是预紧的(证明见文献[5,12-13]). 因此

$\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 可以重记为(34)式的后向形式

$$\mathscr{A}_{\mathscr{B}}(\tau,\omega)=\bigcap_{T>0}\overline{\bigcup_{t\geqslant T}\bigcup_{s\leqslant T}\Phi(t,s-t,\theta_{-t}\omega,\mathscr{K}(s-t,\theta_{-t}\omega))}$$

最后证明 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 是随机吸引子. 我们考虑 $\mathscr{D}=\{\mathscr{D}(\tau,\omega)\}$ 为通常的缓增集，类似于文献[5]可证 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ 的存在性. 由于可测集的任意交(或任意并)仍然是可测集，则由吸收集 $\mathscr{K}_{\mathscr{D}}$ 的可测性得到 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}(\tau,\omega)=\bigcap_{T>0}\overline{\bigcup_{t\geqslant T}\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega)\mathscr{K}_{\mathscr{D}}}$ 仍是可测集. 最后根据 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 与随机吸引子 $\mathscr{A}_{\mathscr{D}}$ 是等价的(证明见文献[3])，就得到 $\mathscr{A}_{\mathscr{B}}$ 的可测性.

参考文献：

[1] KURAMOTO Y, TSUZUKI T. On the Formation of Dissipative Structures in Reaction-Diffusion Systems: Reductive Perturbation Approach [J]. Progress of Theoretical Physics, 1975, 54(3): 687-699.

[2] MICHELSON D. Steady Solutions of the Kuramoto-Sivashinsky Equation [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1986, 19(1): 89-111.

[3] HE J, GRANERO-BELINCHÓN R. On the Dynamics of 3D Electrified Falling Films [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-A, 2021, 41(9): 1553-5231.

[4] AMBROSE D M, HADADIFARD F, DOUGLAS WRIGHT J. Well-Posedness and Asymptotics of a Coordinate-Free Model of Flame Fronts [J]. SIAM Journal on Applied Dynamical Systems, 2021, 20(4): 2261-2294.

[5] LI Y R, YANG S, ZHANG Q H. Odd Random Attractors for Stochastic Non-Autonomous Kuramoto-Sivashinsky Equations without Dissipation [J]. Electronic Research Archive, 2020, 28(4): 1529-1544.

[6] GAO P. Averaging Principle for Stochastic Kuramoto-Sivashinsky Equation with a Fast Oscillation [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systens-A, 2018, 38(11): 5649-5684.

[7] LIN L, LI M. The Asymptotic Behavior of the Stochastic Coupled Kuramoto-Sivashinsky and Ginzburg-Landau Equations [J]. Boundary Value Problems, 2020, 2020(1): 1-14.

[8] 李勇，张强恒，李扬荣. 非自治随机时滞广义 Kuramoto-Sivashinsky 方程的拉回随机吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(2): 95-102.

[9] 乔闪闪，李扬荣. 随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(8): 48-53.

[10] GESS B, LIU W, SCHENKE A. Random Attractors for Locally Monotone Stochastic Partial Differential Equations [J]. Journal of Differential Equations, 2020, 269(4): 3414-3455.

[11] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1988.

[12] LI Y R, YANG S. Backward Compact and Periodic Random Attractors for Non-Autonomous Sine-Gordon Equations with Multiplicative Noise [J]. Communications on Pure & Applied Analysis, 2019, 18(3): 1155-1175.

[13] WANG R H, LI Y R. Backward Compactness and Periodicity of Random Attractors for Stochastic Wave Equations with Varying Coefficients [J]. Discrete & Continuous Dynamical Systems-B, 2019, 24(8): 4145-4167.

[14] YANG D S. Dynamics for the Stochastic Nonlocal Kuramoto-Sivashinsky Equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 330(1): 550-570.

[15] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253(5): 1544-1583.

责任编辑　廖坤