第 48 卷 第 5 期　西南师范大学学报(自然科学版)　2023 年 5 月
Vol. 48 No. 5　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　May 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.05.005

广义分位数的渐近性质[①]

杨茜，　彭作祥

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：Bellini 等人提出了广义分位数并研究了其基本性质，特别针对重尾分布分析了期望分位数与一般分位数的渐近关系．本文在假设广义分位数为正规变化函数的基础上，研究广义分位数与一般分位数的渐近关系．

关　键　词：广义分位数；重尾分布；正规变化函数；一般分位数；渐近关系

中图分类号：O211.4　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)05－0037－05

The Asymptotic Properties of Generalized Quantiles

YANG Xi，　PENG Zuoxiang

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract：Bellini et al. (2014) proposed the generalized quantile and studied its basic properties. In particular，for heavy-tailed distributions，the paper also analyzed the asymptotic relationship between expectiles and quantiles. Based on the assumption that the generalized quantile is a regularly varying function，this paper studies its asymptotic relationship with quantiles.

Key words：generalized quantile；heavy-tailed distribution；regularly varying function；quantiles；asymptotic relationship

令 X 的分布函数为 F，其生存函数为 $\overline{F}=1-F$．假定 X 服从重尾分布，即 $\overline{F}$ 满足如下的正规变化条件：

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)}=x^{-\frac{1}{\gamma}},\ x>0,\ \gamma>0$$

记为 $\overline{F}\in RV_{-\frac{1}{\gamma}}$．

令 $H(x)$：$[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 为严格单调递增、可导的凸函数，满足

$$H(0)=0 \qquad H(1)=1 \qquad H'_{+}(0)=0$$

文献[1]定义 X 的广义分位数

① 收稿日期：2022－09－04

作者简介：杨茜，硕士研究生，主要从事概率统计的研究．

通信作者：彭作祥，教授．

$$q_\tau^* \in \arg\min_q \tau \mathrm{E}[H((X-q)^+)]+(1-\tau)\mathrm{E}[H((X-q)^-)],\ \tau\in(0,1) \tag{1}$$

则 $q_\tau^* \in \arg\min_q \mathrm{E}[\eta_\tau(X-q)-\eta_\tau(X)]$，其中 $\eta_\tau(x)=|\tau-1(x\leqslant 0)|H(|x|)$. 它进一步研究了 M 分位数[2] 的性质. 当 $H(x)=x, x^2, x^p$，$p>1$ 时，(1) 式分别为一般分位数 $q_\tau\in\arg\min_q\tau\mathrm{E}[(X-q)^+]+(1-\tau)\mathrm{E}[(X-q)^-]$[3]、期望分位数[4]、$L_p$ 分位数[5].

文献[6-9] 说明了 q_τ 与期望分位数之间的联系. 文献[10-11] 则得到了 q_τ 与 L_p 分位数的渐近关系. 有关 q_τ，期望分位数和 L_p 分位数应用的更多研究见文献[12-13]. 本文受文献[11] 的启发，在假定 $H\in RV_\alpha$ 且 $\alpha>1$ 的基础上，讨论极端情况下 q_τ^* 与 q_τ 的渐近关系.

下面给出本文的主要结果，即 q_τ^* 与 q_τ 的联系. 首先建立 $\bar F(q_\tau^*)$ 与 $1-\tau$ 的联系，结论如下：

定理 1 假定 $\bar F\in RV_{-\frac{1}{\gamma}}$，$H\in RV_\alpha$. 对任意的 $\alpha>1$，$c>0$，有 $\mathrm{E}[H(c|X|)]<\infty$ 和 $0<\gamma<\dfrac{1}{\alpha-1}$. 则

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{\bar F(q_\tau^*)}{1-\tau}=\frac{\gamma}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma^{-1}-\alpha+1)}$$

其中 $\mathrm{B}(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x$ 是贝塔函数.

由于 $\bar F(q_\tau)=1-\tau$，因此基于定理 1 我们易得到 q_τ^* 与 q_τ 的联系(定理 2).

定理 2 在定理 1 的条件下，有

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{q_\tau^*}{q_\tau}=\left[\frac{\gamma}{\mathrm{B}(\alpha,\gamma^{-1}-\alpha+1)}\right]^{-\gamma}$$

在证明定理 1 之前，先引入 3 个引理.

引理 1 若对任意的 $c>0$，有 $\mathrm{E}[H(c|X|)]<\infty$，则 $q_\tau^*\in\arg\min_q\mathrm{E}[\eta_\tau(X-q)-\eta_\tau(X)]$ 当且仅当 $(1-\tau)\mathrm{E}[H'((X-q_\tau^*)^-)]=\tau\mathrm{E}[H'((X-q_\tau^*)^+)]$.

证 参见文献[1] 引理 3.

引理 2 若对任意的 $c>0$，有 $\mathrm{E}[H(c|X|)]<\infty$，则 q_τ^* 是 $(0,1)$ 上的单调递增函数且当 $\tau\to 1$ 时，$q_\tau^*\to+\infty$.

证 q_τ^* 的单调性见文献[1] 的命题 5(f). 若当 $\tau\to 1$ 时，$q_\tau^*\not\to+\infty$. 则由单调收敛定理可得 q_τ^* 收敛到一个有限数值，记为 q^*. 函数 $\mathrm{E}[H'((X-q_\tau^*)^-)]$ 和 $\mathrm{E}[H'((X-q_\tau^*)^+)]$ 是连续的，利用控制收敛定理及引理 1，当 $\tau\to 1$ 时，$\mathrm{E}[H'((X-q_\tau^*)^+)]=0$，即 $\mathrm{P}(X\leqslant q^*)=1$. 这与 X 服从重尾分布 F，其上端点为 $+\infty$[15] 矛盾.

引理 3 假定 $\bar F\in RV_{-\frac{1}{\gamma}}$，$H\in RV_\alpha$. 对任意的 $\alpha>1$，$b\geqslant 1$ 和 $c>0$，有 $\mathrm{E}[H(c|X|)]<\infty$，$0<\gamma<\dfrac{1}{b(\alpha-1)}$. 则

$$\lim_{\tau\to 1}\int_1^{+\infty}\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=\frac{1}{\gamma}\mathrm{B}(b(\alpha-1)+1,\gamma^{-1}-b(\alpha-1))$$

证 记

$$\int_1^{+\infty}\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=$$

$$\int_1^{+\infty}s^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]+\int_1^{+\infty}\left(\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}-s^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=:$$

$$\Delta_1(\tau)+\Delta_2(\tau) \tag{2}$$

其中

$$\Delta_1(\tau)=\int_1^{+\infty}s^{-\frac{1}{\gamma}}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=$$

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b \mathrm{d}(-t^{-\frac{1}{\gamma}})=$$

$$\frac{1}{\gamma}\int_1^2\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t+\frac{1}{\gamma}\int_2^{+\infty}\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t \tag{3}$$

由文献[14]的命题0.7(b)可知 $H'\in RV_{\alpha-1}$. 根据文献[14]的命题0.5，控制收敛定理及正规变化函数的局部一致收敛性，有

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{1}{\gamma}\int_1^2\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\gamma}\int_1^2(t-1)^{b(\alpha-1)}t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t \tag{4}$$

由文献[15]的定理B.2.18，对任意 $\epsilon>0$，$0<\delta<\gamma^{-1}-b(\alpha-1)$，存在 $t_0=t_0(\epsilon,\delta)$ 使得对 $t\geqslant t_0$，$x>1$，有

$$\left|\left(\frac{H'(tx)}{H'(t)}\right)^b-x^{b(\alpha-1)}\right|\leqslant \epsilon x^{b(\alpha-1)+\delta}$$

因此，对 $t>2$，$q_\tau^*\geqslant t_0$，有

$$\left|\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right|\leqslant (t-1)^{b(\alpha-1)}+\epsilon(t-1)^{b(\alpha-1)+\delta}$$

由于 $\gamma^{-1}-b(\alpha-1)>0$，$\gamma^{-1}-b(\alpha-1)-\delta>0$. 因而 $(t-1)^{b(\alpha-1)}t^{-\frac{1}{\gamma}-1}$ 和 $(t-1)^{b(\alpha-1)+\delta}t^{-\frac{1}{\gamma}-1}$ 在 $(2,+\infty)$ 上关于 t 可积. 同样利用控制收敛定理，可得

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{1}{\gamma}\int_2^{+\infty}\left(\frac{H'(q_\tau^* t-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{\gamma}\int_2^{+\infty}(t-1)^{b(\alpha-1)}t^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}t \tag{5}$$

因此，由(3)－(5)式可得

$$\begin{aligned}\lim_{\tau\to 1}\Delta_1(\tau)=&\frac{1}{\gamma}\int_1^{+\infty}(s-1)^{b(\alpha-1)}s^{-\frac{1}{\gamma}-1}\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{\gamma}\int_0^1(1-x)^{b(\alpha-1)}x^{\frac{1}{\gamma}-b(\alpha-1)-1}\mathrm{d}x=\\&\frac{1}{\gamma}\mathrm{B}(b(\alpha-1)+1,\ \gamma^{-1}-b(\alpha-1))\end{aligned} \tag{6}$$

对 $\Delta_2(\tau)$，同样由文献[15]的定理B.2.18可知，对任意 $\epsilon>0$，$0<\delta<\gamma^{-1}-b(\alpha-1)$，存在 $t_0^*=t_0^*(\epsilon,\delta)$ 使得对 $q_\tau^*\geqslant t_0^*$，$s>1$，有

$$\left|\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}-s^{-\frac{1}{\gamma}}\right|\leqslant \epsilon s^{-\frac{1}{\gamma}+\delta}$$

因此，

$$\left|\int_1^{+\infty}\left(\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}-s^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]\right|\leqslant \epsilon\int_1^{+\infty}s^{-\frac{1}{\gamma}+\delta}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]$$

注意到

$$\lim_{\tau\to 1}\int_1^{+\infty}s^{-\frac{1}{\gamma}+\delta}\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=\frac{1}{\gamma}\mathrm{B}(b(\alpha-1),\ \gamma^{-1}-\delta-b(\alpha-1))$$

令 $\epsilon\to 0$ 可得

$$\lim_{\tau\to 1}\Delta_2(\tau)=\lim_{\tau\to 1}\int_1^{+\infty}\left(\frac{\bar F(q_\tau^* s)}{\bar F(q_\tau^*)}-s^{-\frac{1}{\gamma}}\right)\mathrm{d}\left[\left(\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right)^b\right]=0 \tag{7}$$

由(2),(6)与(7)式可知结论成立，引理证毕.

定理 1 的证明　由引理1可知

$$(1-\tau)\mathrm{E}[H'(q_\tau^*-X)1_{(X<q_\tau^*)}]=\tau\mathrm{E}[H'(X-q_\tau^*)1_{(X>q_\tau^*)}]$$

等价于

$$(1-\tau)I_2(q_\tau^*)=I_1(q_\tau^*) \tag{8}$$

其中 $I_1(q_\tau^*)=\mathrm{E}[H'(X-q_\tau^*)1_{(X>q_\tau^*)}]$，$I_2(q_\tau^*)=\mathrm{E}[H'(|X-q_\tau^*|)]$. (8) 式两边同除以 $H'(q_\tau^*)$，有

$$\frac{I_1(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}=\int_{q_\tau^*}^{\infty}\int_1^{\frac{x}{q_\tau^*}}\mathrm{d}\left[\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right]\mathrm{d}[F(x)]=$$

$$\bar{F}(q_\tau^*)\int_1^{\infty}\frac{\bar{F}(q_\tau^* s)}{\bar{F}(q_\tau^*)}\mathrm{d}\left[\frac{H'(q_\tau^* s-q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\right]$$

由引理3，令 $b=1$ 有

$$\frac{I_1(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}=\frac{\bar{F}(q_\tau^*)}{\gamma}\mathrm{B}(\alpha,\gamma^{-1}-\alpha+1)(1+o(1)) \tag{9}$$

记

$$\frac{I_2(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}=\frac{I_1(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}+\frac{\mathrm{E}[H'(|X-q_\tau^*|)|1_{(X<-q_\tau^*)}]}{H'(q_\tau^*)}+\frac{\mathrm{E}[H'(|X-q_\tau^*|)|1_{(|X|<q_\tau^*)}]}{H'(q_\tau^*)}=:$$

$$A_1(\tau)+A_2(\tau)+A_3(\tau)$$

当 $q_\tau^*\to+\infty$ 时，则 $\bar{F}(q_\tau^*)\to 0$，由(9)式知 $A_1(\tau)=\dfrac{I_1(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)}\to 0$.

注意到，文献[14]的命题0.7(a)表明，由 $\mathrm{E}[H(c|X|)]$ 的存在性可得 $\mathrm{E}[H'(c|X|)]$ 的存在性. 因此对第二项 $A_2(\tau)$，利用 $\mathrm{E}[H'(c|X|)]$ 的存在性及文献[14]的命题0.8(i)，当 $q_\tau^*\to+\infty$ 时，有

$$A_2(\tau)=\frac{\mathrm{E}[|H'(X-q_\tau^*)|1_{(X<-q_\tau^*)}]}{H'(q_\tau^*)}=\frac{1}{H'(q_\tau^*)}\mathrm{E}[H'(q_\tau^*-X)1_{(X<-q_\tau^*)}]\leqslant$$

$$\frac{1}{H'(q_\tau^*)}\mathrm{E}[H'(-2X)1_{(X<-q_\tau^*)}]=$$

$$\frac{1}{H'(q_\tau^*)}\mathrm{E}[H'(2|X|)1_{(X<-q_\tau^*)}]=$$

$$o\left(\frac{1}{H'(q_\tau^*)}\right)=o(1)$$

对第三项 $A_3(\tau)$，有

$$A_3(\tau)=\frac{\mathrm{E}[H'(|X-q_\tau^*|)|1_{(|X|<q_\tau^*)}]}{H'(q_\tau^*)}=$$

$$\int_{-1}^{1}\left(\frac{H'(q_\tau^*-q_\tau^* s)}{H'(q_\tau^*)}-(1-s)^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}[F(q_\tau^* s)]+\mathrm{E}\left[\left(1-\frac{X}{q_\tau^*}\right)^{\alpha-1}1_{(|X|<q_\tau^*)}\right] \tag{10}$$

由文献[14]的命题0.7(b)可得 $H'\in RV_{\alpha-1}$，类似引理3的证明有

$$\lim_{\tau\to 1}\int_{-1}^{1}\left(\frac{H'(q_\tau^*-q_\tau^* s)}{H'(q_\tau^*)}-(1-s)^{\alpha-1}\right)\mathrm{d}[F(q_\tau^* s)]=0 \tag{11}$$

注意到，当 $\tau\to 1$ 时，有 $q_\tau^*\to+\infty$，则(10)式第二项中的 $\left(1-\dfrac{X}{q_\tau^*}\right)^{\alpha-1}1_{(|X|<q_\tau^*)}$ 几乎处处收敛到1且小于等于 $2^{\alpha-1}$，由控制收敛定理可得

$$\lim_{\tau\to 1}\mathrm{E}\left[\left(1-\frac{X}{q_\tau^*}\right)^{\alpha-1}1_{(|X|<q_\tau^*)}\right]=1 \tag{12}$$

$$\lim_{\tau\to 1}\frac{\mathrm{E}[|H'(X-q_\tau^*)|1_{(|X|<q_\tau^*)}]}{H'(q_\tau^*)}=1$$

由(10),(11)与(12)式可得 $A_3(\tau)$ 收敛到1. 因此，

$$\lim_{\tau \to 1} \frac{I_2(q_\tau^*)}{H'(q_\tau^*)} = 1 \tag{13}$$

联合(8),(9) 与(13) 式可得定理得证.

参考文献：

[1] BELLINI F, KLAR B, MÜLLER A, et al. Generalized Quantiles as Risk Measures [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, 54: 41-48.

[2] BRECKLING J, CHAMBERS R. M-Quantiles [J]. Biometrika, 1988, 75: 761-772.

[3] KOENKER R, BASSETT G. Regression Quantiles [J]. Econometrica, 1978, 46(1): 33.

[4] NEWEY W K, POWELL J L. Asymmetric Least Squares Estimation and Testing [J]. Econometrica, 1987, 55(4): 819.

[5] CHEN Z H. Conditional Lp-Quantiles and Their Application to the Testing of Symmetry in Non-Parametric Regression [J]. Statistics & Probability Letters, 1996, 29(2): 107-115.

[6] ABDOUS B, REMILLARD B. Relating Quantiles and Expectiles under Weighted-Symmetry [J]. Annals of the Institute of Statistical Mathematics, 1995, 47(2): 371-384.

[7] EFRON B. Regression Percentiles Using Asymmetric Squared Error Loss [J]. Statistica Sinica, 1991, 1(1): 93-125.

[8] YAO Q, TONG H. Asymmetric Least Squares Regression Estimation: a Nonparametric Approach [J]. Journal of Nonparametric Statistics, 1996, 6(2-3): 273-292.

[9] SCHNABEL S K, EILERS P H C. A Location-Scale Model for Non-Crossing Expectile Curves [J]. Stat, 2013, 2(1): 171-183.

[10] DAOUIA A, GIRARD S, STUPFLER G. Estimation of Tail Risk Based on Extreme Expectiles [J]. Journal of the Royal Statistical Society Series B: Statistical Methodology, 2018, 80(2): 263-292.

[11] DAOUIA A, GIRARD S, STUPFLER G. Extreme M-Quantiles as Risk Measures: From L^1 to L^p Optimization [J]. Bernoulli, 2019, 25(1): 264-209.

[12] POLLARD D. Asymptotics for Least Absolute Deviation Regression Estimators [J]. Econometric Theory, 1991, 7(2): 186-199.

[13] PORTNOY S, KOENKER R. Adaptive L-Estimation for Linear Models [J]. The Annals of Statistics, 1989, 17(1): 362-381.

[14] RESNICK S I. Point Processes [M]// Extreme Values, Regular Variation and Point Processes. New York: Springer, 1987: 123-161.

[15] DE HAAN L, FERREIRA A. Extreme Value Theory [M]. New York: Springer New York, 2006.

责任编辑 张枸