

拟连续 Domain 的 SM^* 性质^①

王武¹, 谭彬², 张舜³

1. 天津理工大学 中环信息学院 基础课部, 天津 300380;
2. 天津理工大学 理学院, 天津 300384;
3. 天津仁爱学院 数理教学部, 天津 300163

摘要: 研究了拟连续 Domain 中比 M^* 性质更强的 SM^* 性质, 并得到了一些有意义的结论. 主要结果有: 给出了拟连续 Domain 具有 M^* 性质的等价刻画; 给出了拟连续 Domain 的 SM^* 性质的定义, 并说明了 M^* 性质与 SM^* 性质的关系; 给出了 QL-Domain 具有 SM^* 性质的等价条件; 给出了两类具有性质 SM^* 的特殊的拟连续 Domain.

关键词: 拟连续 Domain; M^* 性质; SM^* 性质; qmub-完备

中图分类号: O153.1; O189.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)06-0025-06

SM^* Property of Quasi-Continuous Domain

WANG Wu¹, TAN Bin², ZHANG Shun³

1. Department of Basic Course, Zhonghuan Information College, Tianjin University of Technology, Tianjin 300380, China;
2. College of Science, Tianjin University of Technology, Tianjin 300384, China;
3. Department of Mathematics Teaching, Tianjin Ren'ai College, Tianjin 300163, China

Abstract: In this paper, the SM^* property which is stronger than the M^* property is studied in quasi-continuous Domain and some meaningful conclusions are obtained. The main results are as follows: the equivalent characterization of quasi-continuous Domain with the property of M^* is given; The definition of property of quasi-continuous Domain is given, and the relationship between the SM^* property and the M^* property is illustrated. Meanwhile, the equivalent conditions that QL-Domain has the SM^* property are given; Two kinds of special quasi-continuous Domains with property SM^* are given.

Key words: quasi-continuous Domain; M^* property; SM^* property; qmub-complete

定向完备偏序集是偏序集理论中的一种重要结构, 旨在为计算机高级程序设计语言提供数学模型, 受到了计算机科学和数学领域诸多学者的关注, 并得到了很多有价值的结论和模型^[1-6]. 随着计算机理论的发

① 收稿日期: 2022-09-02

基金项目: 国家青年自然科学基金项目(11401435); 天津市教委科研计划项目(2018KJ147); 2021 年高等学校大学数学教学研究与发展中心教学改革项目(CMC20210115).

作者简介: 王武, 副教授, 主要从事理论计算机、Domain 理论、模糊数学的研究.

展, 偏序集理论不断向信息科学、逻辑学、分析学及各种应用学科渗透^[7-8]. Domain 理论研究的一个重要方面是尽可能地将连续格(Domain)推广到更为一般的格序结构上去, 其中最重要的推广就是拟连续 Domain. 拟连续 Domain 具有很多类似于 Domain 的良好性质, 并且在理论计算机领域应用更广泛^[9]. 文献[10]给出了拟连续 Domain 的拟基的概念, 并研究了拟基的一些性质. 连续 Domain 的 M 性质与 Lawson 拓扑的紧性密切相关, 文献[11]将 M 性质进行了推广, 引入了 M_F 性质, 并给出了拟连续 Domain 为 Lawson 紧的一个等价条件. 文献[12]在连续 Domain 中给出了比 M 性质更强的 SM 性质, 同时研究了具有性质 SM 的连续 Domain 与 L-Domain 的关系. 本文在此基础上, 将连续 Domain 的 M 性质进行推广, 首先给出 M^* 性质的一些结论, 其次研究了拟连续 Domain 中比 M^* 性质更强的 SM^* 性质, 并得到了一些有意义的结论. 主要结果有: 给出了拟连续 Domain 具有 M^* 性质的等价刻画; 给出了拟连续 Domain 的 SM^* 性质的定义, 并说明了 M^* 性质与 SM^* 性质的关系; 给出了 QL-Domain 具有 SM^* 性质的等价条件; 给出了两类具有性质 SM^* 的特殊拟连续 Domain. 本文的结果有助于 Domain 理论的进一步研究.

1 预备知识

首先, 介绍偏序集中的一些基本概念^[13]. 设 L 是偏序集, $D \subseteq L$, 如果 D 中任意两个元在 D 中有上界, 则称 D 为定向集. 如果 L 的每个定向子集 D 都有上确界(记为 $\sup D$), 则称 L 为定向完备偏序集. 任给 $A \subseteq L$, 记

$$\uparrow A = \{x \in L : \text{存在 } a \in A, \text{ 使得 } a \leq x\}$$

$$\downarrow A = \{x \in L : \text{存在 } a \in A, \text{ 使得 } x \leq a\}$$

若 A 为单点集 $\{a\}$, 则有记号 $\uparrow A = \uparrow a$, $\downarrow A = \downarrow a$.

设 L 是偏序集, G, H 为 L 的两个非空子集. 如果 $H \subseteq \uparrow G$, 则 $G \leq H$, 称这种序关系为 Symth 序. 如果对任意的定向集 $D \subseteq L$, $\sup D \in \uparrow H$ 蕴含存在 $d \in D$ 使得 $d \in \uparrow G$, 则称 G 逼近 H , 记为 $G \ll H$. 特别地, $\{y\} \ll H$ 简记为 $y \ll H$, $G \ll \{x\}$ 简记为 $G \ll x$. 显然, $G \ll H$ 蕴含 $\forall h \in H, G \ll h$. 易知上述定义的逼近关系有如下性质:

- (i) $G \ll H$ 蕴含 $G \leq H$;
- (ii) $G \leq E \ll F \leq H$ 蕴含 $G \ll H$.

令 $\mathcal{P}^w(L)$ 表示 L 的所有非空有限子集构成的集族. 设非空集族 $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^w(L)$, 如果任给 $E, F \in \mathcal{F}$, 存在有限集 $H \in \mathcal{F}$, 使得 $H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 则称 $\mathcal{F}$ 为定向集族. 设 L 是定向完备偏序集, 如果 $\forall x \in L$, 集族 $\text{fin}(x) = \{F \in \mathcal{P}^w(L) : F \ll x\}$ 是定向的, 且 $\uparrow x = \bigcap_{F \in \text{fin}(x)} \uparrow F$, 则称 L 是拟连续 Domain.

定义 1^[13] 设 L 是定向完备偏序集,

(a) 任给子集 $U \subseteq L$, 如果 $U = \uparrow U$, 且任意的定向集 $D \subseteq L$, $\sup D \in U$ 意味着 $D \cap U \neq \emptyset$, 则称 U 为 Scott 开集. 所有的 Scott 开集构成一个拓扑, 称为 Scott 拓扑, 记为 $\sigma(L)$;

(b) 以主滤子的补 $L \setminus \uparrow x$ 为子基生成的拓扑称为下拓扑, 记为 $\omega(L)$;

(c) 称由 $\sigma(L)$ 和 $\omega(L)$ 共同加细的拓扑 $\sigma(L) \vee \omega(L)$ 为 Lawson 拓扑, 记为 $\lambda(L)$.

命题 1^[13] 设 L 是拟连续 Domain, 记 $\uparrow F = \{x : F \ll x\}$, 则:

- (i) $\forall x \in L$, H 为 L 的有限子集. 如果 $H \ll x$, 则存在有限集 $F \subseteq L$ 使得 $H \ll F \ll x$;
- (ii) $\text{int}_{\sigma(L)}(\uparrow F) = \uparrow F$, 其中 $\text{int}_{\sigma(L)}(\uparrow F)$ 表示 $\uparrow F$ 在 Scott 拓扑 $\sigma(L)$ 中的内部;
- (iii) $\{\uparrow F : F \in \mathcal{P}^w(L)\}$ 为 Scott 拓扑 $\sigma(L)$ 的基.

定义 2^[14] 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}^w(L)$. 如果 $\forall x \in L$, 集族 $\text{fin}(x) \cap \mathcal{B}$ 是定向集族且 $\uparrow x = \bigcap_{F \in \text{fin}(x) \cap \mathcal{B}} \uparrow F$, 则称 $\mathcal{B}$ 是 L 的拟基.

显然, 设 L 是定向完备偏序集, 则 L 是拟连续的当且仅当 L 有拟基. 如果 $K(L) = \{G \in \mathcal{P}^w(L) : G \ll G\}$ 是 L 的拟基, 则称 L 是代数拟连续 Domain.

2 性质 M^* 与性质 SM^*

文献[15]介绍了拟连续 Domain 的 M^* 性质, 并研究了其与 Lawson 拓扑紧性的关系. 本节首先研究拟连续 Domain 的 M^* 性质, 然后引入 SM^* 性质的概念, 并给出性质 M^* 与性质 SM^* 的关系以及 QL-Domain 具有性质 SM^* 的等价条件.

定义 3^[15] 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B}$ 是 L 的拟基. 如果 $\forall E, F, G, H \in \mathcal{B}$ 且 $E \ll G, F \ll H$, 存在有限集族 $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$, 使得 $\uparrow G \cap \uparrow H \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} \uparrow B \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 则称 L 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 M^* .

拟连续 Domain 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 M^* , 可以有更一般的描述. 文献[15]证明了以下命题:

命题 2^[15] 设 L 是拟连续 Domain. 则下列条件等价:

- (i) $\forall x, y \in L, \uparrow x \cap \uparrow y$ 是 Scott 紧的;
- (ii) L 相对于所有拟基具有性质 M^* ;
- (iii) L 相对于某个拟基具有性质 M^* .

容易验证, 命题 2 中, $\forall x, y \in L, \uparrow x \cap \uparrow y$ 是 Scott 紧的当且仅当 $\forall E, F \in \mathcal{P}^w(L), \uparrow E \cap \uparrow F$ 是 Scott 紧的, 其直接推论为文献[15]的推论 4.7: 拟连续 Domain L 上的 Lawson 拓扑是紧的当且仅当 L 是有限生成的且具有性质 M^* .

由定义 2 知, 任意拟连续 Domain $L, \mathcal{P}^w(L)$ 是 L 的拟基. 如果 L 相对于某个拟基具有性质 M^* , 则由命题 2 知 L 相对于 $\mathcal{P}^w(L)$ 也具有性质 M^* . 如未特殊说明, 本文中的 L 具有性质 M^* 总是指 L 相对于 $\mathcal{P}^w(L)$ 具有性质 M^* .

命题 3 设 L 是拟连续 Domain, 则 L 具有性质 M^* 当且仅当对 $\forall E, F \in \mathcal{P}^w(L), x, y \in L$ 且 $E \ll x, F \ll y$, 存在有限集 $H \in \mathcal{P}^w(L)$, 使得 $\uparrow x \cap \uparrow y \subseteq \uparrow H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$.

证 必要性 因为 L 是具有性质 M^* 的拟连续 Domain, 则由命题 2 知, L 相对于 $\mathcal{P}^w(L)$ 具有性质 M^* . 设 $E, F, \{x\}, \{y\} \in \mathcal{P}^w(L)$, 且 $E \ll x, F \ll y$. 由 L 具有性质 M^* 可知, 存在有限集族 $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{P}^w(L)$, 使得

$$\uparrow x \cap \uparrow y \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} \uparrow B \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$$

令 $H = \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} \uparrow B$, 有限多个有限集的并仍然是有限集, 则 H 为有限集, 且 $\uparrow x \cap \uparrow y \subseteq \uparrow H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$.

充分性 $\forall E, F, G, H \in \mathcal{B}$ 且 $E \ll G, F \ll H$, 显然 $\forall g \in G, E \ll g$ 成立. 同理, $\forall h \in H, F \ll h$. 由已知条件可知, 存在有限集 $H_{gh} \in \mathcal{P}^w(L)$, 使得

$$\uparrow g \cap \uparrow h \subseteq \uparrow H_{gh} \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$$

令

$$\mathcal{B}^* = \{H_{gh} : g \in G, h \in H\}$$

显然其是有限集族, 则

$$\uparrow G \cap \uparrow H = \bigcup_{g \in G, h \in H} (\uparrow g \cap \uparrow h) \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} \uparrow H_{gh} \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$$

即 L 相对于拟基 $\mathcal{P}^w(L)$ 具有性质 M^* .

由于 Smyth 序为预序关系^[16], 下面给出一种具有性质 M^* 的特殊的偏序结构. 设 L 是偏序集, 令 $\text{fin}(L) = \{\uparrow F : F \in \mathcal{P}^w(L)\}$. $\forall \uparrow E, \uparrow F \in \text{fin}(L)$, 定义二元关系: $\uparrow E \leq \uparrow F$ 当且仅当 $\uparrow F \subseteq \uparrow E$, 即 $\text{fin}(L)$ 上的偏序关系为反包含序. 本文中涉及到 $\text{fin}(L)$ 中的序关系总是反包含序. 对 $\forall \mathcal{F} \subseteq \text{fin}(L)$, 记

$$\text{qumb } \mathcal{F} = \{\uparrow E \in \text{fin}(L) : \uparrow E \text{ 是 } \mathcal{F} \text{ 在 } \text{fin}(L) \text{ 中的极小上界}\}$$

定义 4 设 L 是偏序集, 有限子集族 $\mathcal{F} \subseteq \text{fin}(L)$. 如果:

- (a) 集族 $\text{qumb } \mathcal{F}$ 是有限的;
- (b) 任意 $\mathcal{F}$ 的上界 $\uparrow A \in \text{fin}(L)$, 存在 $\uparrow E \in \text{qumb } \mathcal{F}$, 使得 $\uparrow A \subseteq \uparrow E$.

则称 L 是 qumb -完备的.

命题 4 设 L 是 qumb- 完备的拟连续 Domain, 则 L 具有性质 M^* .

证 $\forall x, y \in L, E, F \in \mathcal{P}^w(L)$, 且 $E \ll x, F \ll y$, 由 L 的 qumb- 完备性知 $\text{qumb}\{\uparrow E, \uparrow F\}$ 是有限集族. $\forall z \in \uparrow x \cap \uparrow y, \{z\}$ 是 E, F 的上界, 且 $\uparrow z$ 是 $\uparrow E$ 和 $\uparrow F$ 的上界. 由 L 的 qumb- 完备性知, 存在 $\uparrow G \in \text{qumb}(\uparrow E, \uparrow F)$, 使得 $z \in \uparrow G$. 令

$$H = \bigcup \{G : \uparrow G \in \text{qumb}\{\uparrow E, \uparrow F\}\}$$

从而 $\uparrow x \cap \uparrow y \subseteq \uparrow H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 由 $\text{qumb}\{\uparrow E, \uparrow F\}$ 的有限性和 G 为有限集知 H 是有限集, 故由命题 3 知 L 具有性质 M^* .

文献[15]引入了 QFS-Domain 的概念, 并证明了 QFS-Domain 具有性质 M^* . 结合命题 4, 说明存在一些特殊的偏序结构(如 QFS-Domain、qumb- 完备的拟连续 Domain) 具有性质 M^* . 接下来, 引入拟连续 Domain 的 SM^* 性质的概念.

定义 5 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B}$ 是 L 的拟基. 如果 $\forall E, F \in \mathcal{B}$, 存在有限集族 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$ 且 $\forall H \in \mathcal{H}, H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 使得 $\uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H$, 则称 L 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 SM^* . 如果 L 相对于拟基 $\mathcal{P}^w(L)$ 具有性质 SM^* , 则简称 L 具有性质 SM^* .

命题 5 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B}$ 是 L 的拟基. 则 L 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 SM^* 蕴含 L 具有性质 M^* . 如果 L 是代数拟连续 Domain, 则 L 相对于拟基 $\mathcal{K}(L)$ 具有性质 SM^* 当且仅当 L 具有性质 M^* .

证 设 L 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 SM^* , $\forall E, F \in \mathcal{B}, x, y \in L$ 且 $E \ll x, F \ll y$, 存在有限集族 $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{B}$, 并且 $\forall H \in \mathcal{H}, H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 使得 $\uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H$ 成立. 令 $H' = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H$, 从而有

$$\uparrow x \cap \uparrow y \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H \subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H = \uparrow H' \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$$

则由命题 3 知 L 相对于拟基 $\mathcal{B}$ 具有性质 M^* . 由命题 2 知 L 具有性质 M^* .

如果 L 是代数拟连续的, 只需证明 L 具有性质 M^* 蕴含 L 相对于 $\mathcal{K}(L)$ 具有性质 SM^* . 设 L 具有性质 M^* , 则由命题 2 知 L 相对于 $\mathcal{K}(L)$ 具有性质 M^* . $\forall E, F \in \mathcal{K}(L), E \ll E, F \ll F$, 存在有限集族 $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{K}(L)$, 使得

$$\uparrow E \cap \uparrow F = \uparrow E \cap \uparrow F \subseteq \bigcup_{B \in \mathcal{B}^*} \uparrow B \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F = \uparrow E \cap \uparrow F$$

取 $\mathcal{H} = \mathcal{B}^*$ 即可得到 $\uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H$, 从而 L 相对于拟基 $\mathcal{K}(L)$ 具有性质 SM^* .

参考文献[15]的引理 4.8 证明了所有的 QFS-Domain 具有 M^* 性质. 由命题 5 知, 所有的代数 QFS-Domain 相对于拟基 $\mathcal{K}(L)$ 具有 SM^* 性质.

设 L 是定向完备偏序集, 有限集族 $\mathcal{F} \subseteq \text{fin}(L)$, 记

$$\text{qmub}_{\ll} \mathcal{F} = \{\uparrow G : \uparrow G \in \text{qmub}(\mathcal{F}), \uparrow G \neq \emptyset\}$$

令

$$\mathcal{F}_H = \{\uparrow G : \uparrow G \in \text{fin}(L), \uparrow H \subseteq \uparrow G\}$$

如果 $\forall H \in \mathcal{P}^w(L)$, $\mathcal{F}_H$ 在反包含序下是完备格(任意子集的上确界存在), 则称 L 是 QL-Domain.

定理 1 设 L 是 qumb- 完备的拟连续 QL-Domain. 则下列结论等价:

- (i) L 具有性质 SM^* ;
- (ii) $\forall E, F \in \mathcal{P}^w(L)$, $\text{qmub}_{\ll} \{\uparrow E, \uparrow F\}$ 是有限集族;
- (iii) 对任意有限集族 $\mathcal{F} \subseteq \text{Fin}(L)$, $\text{qmub}_{\ll} \mathcal{F}$ 是有限集族.

证 (i) $\Rightarrow$ (ii) 设 $\uparrow G \in \text{qmub}_{\ll} \{\uparrow E, \uparrow F\}$, 则 $\uparrow G \in \text{qmub}\{\uparrow E, \uparrow F\}$ 且 $\uparrow G \neq \emptyset$. 设 $G \ll x$, 则 $E \ll x, F \ll x$, 即 $x \in \uparrow E \cap \uparrow F$. 因为 L 具有性质 SM^* , 则存在有限集族 $\mathcal{H} \in \mathcal{P}^w(L)$, 且 $\forall H \in \mathcal{H}, H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 使得 $\uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H$, 则 $x \in \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H$. 故存在 $H \in \mathcal{H}$, 使得 $H \ll x$. 而 $\uparrow E, \uparrow F \in \mathcal{F}_H$, 且 $\uparrow G$ 为 $\uparrow E$ 和 $\uparrow F$ 的极小上界, 同时 $\mathcal{F}_H$ 是完备格, 则 $\uparrow G = \uparrow E \vee_{\mathcal{F}_H} \uparrow F$. 因为 $\mathcal{H}$ 是有限集族, 则 $\text{qmub}_{\ll} \{\uparrow E, \uparrow F\}$ 也是有限集族.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 对有限集族 $\mathcal{F}$ 的基数做数学归纳法. 设 $|\mathcal{F}|=2$, 由已知, $qmub_{\ll} \mathcal{F}$ 是有限集族. 假设 $|\mathcal{F}|=n \geq 2$ 时, $qmub_{\ll} \mathcal{F}$ 是有限集族. 当 $|\mathcal{F}|=n+1$ 时, 设 $\mathcal{F}=\{\uparrow F_1, \dots, \uparrow F_n, \uparrow F_{n+1}\}$, 令 $\mathcal{F}_n=\{\uparrow F_1, \dots, \uparrow F_n\}$. $\forall \uparrow G \in qmub_{\ll} \mathcal{F}$, $\uparrow F_i \in \mathcal{F}_n (i=1, \dots, n+1)$. 令 $\uparrow F = \bigvee_{\mathcal{F}_n} F_n$, 显然 $\uparrow G$ 是 $\uparrow F$ 和 $\uparrow F_n$ 的上界. 设 $\uparrow H \in \mathcal{F}_n$ 且 $\uparrow H = \uparrow F \vee_{\mathcal{F}_n} \uparrow F_{n+1}$, 则 $\uparrow G \subseteq \uparrow H$. 而 $\uparrow H$ 为 $\uparrow F$ 和 $\uparrow F_{n+1}$ 的上界, 故也是 $\mathcal{F}$ 的上界, 则由 $qumb$ -完备性知, 存在 $\uparrow G' \in qmub \mathcal{F}$, 使得 $\uparrow H \subseteq \uparrow G'$. 因此 $\uparrow G \subseteq \uparrow H \subseteq \uparrow G'$, 由 $\uparrow G'$ 的极小性知 $\uparrow G = \uparrow H = \uparrow G'$, 即 $\uparrow G$ 是 $\uparrow F$ 和 $\uparrow F_n$ 的极小上界. 由假设 $qmub_{\ll} \mathcal{F}_n$ 是有限集族知

$$\{\uparrow F = \bigvee_{\mathcal{F}_n} F_n : \uparrow G \in qmub_{\ll} \mathcal{F}\}$$

是有限集, 则 $qmub_{\ll} \mathcal{F}$ 也是有限集. 因此由数学归纳法知, 对任意有限集族 $\mathcal{F} \subseteq \text{fin}(L)$, $qmub_{\ll} \mathcal{F}$ 是有限集族.

(iii) $\Rightarrow$ (i) $\forall E, F \in \mathcal{P}^w(L)$, $\uparrow E, \uparrow F \in \text{fin}(L)$, 令

$$H = qmub_{\ll} \{\uparrow E, \uparrow F\} = \{\uparrow G \in qmub\{\uparrow E, \uparrow F\} : \uparrow G \neq \emptyset\}$$

首先如果存在 $\uparrow G \in qmub\{\uparrow E, \uparrow F\}$, 使得 $G \ll x$, 显然有 $E \ll x, F \ll x$, 即

$$\bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H = \{x : \text{存在 } G \in qmub\{E, F\}, \text{ 使得 } G \ll x\} \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$$

$$\forall x \in \uparrow E \cap \uparrow F, \text{ 有 } E \vee_{\mathcal{F}(x)} F \ll x \text{ 且 } E \vee_{\mathcal{F}(x)} F \in qmub_{\ll} \{E, F\}, x \in \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H.$$

综上所述, 有 $\bigcup_{H \in \mathcal{H}} \uparrow H = \uparrow E \cap \uparrow F$, L 具有性质 SM^* .

3 几类具有 SM^* 性质的特殊拟连续 Domain

下面介绍两类具有性质 SM^* 的特殊的拟连续 Domain:

定义 6 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B}$ 是 L 的拟基. 若存在由有限集作为元素的有限集族 $\mathcal{F}_i (i \in I)$ 满足:

(a) $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, 且 $\{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{B}$ 蕴含 $\{B_1, B_2\} \subseteq \mathcal{F}_i$ 对某个 i 成立;

(b) $\forall i \in I, E, F \in \mathcal{F}_i, x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, 存在 $H \in \mathcal{F}_i$, 使得 $H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$ 且 $H \ll x$.

则称 $\mathcal{B}$ 是 L 的拟双有限基.

定理 2 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}^w(L)$ 是有限集族. 则 $\forall E, F \in \mathcal{F}, x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, 存在 $H \in \mathcal{F}$, 使得 $H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$ 且 $H \ll x$, 当且仅当 $D = \{\uparrow F : F \in \mathcal{F} \cap \text{fin}(x)\}$ 在反包含序下存在最大元.

证 $\forall E, F \in \mathcal{F}, x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, 存在 $H \in \mathcal{F}$, 使得 $H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$ 且 $H \ll x$, 则 $\uparrow H$ 是 $\uparrow E$ 和 $\uparrow F$ 在 D 中的上界, 从而 D 是有限的定向集, 则必有最大元. 反之, 若 D 存在最大元 $\uparrow H'$, $\forall E, F \in \mathcal{F}, x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, 则 $\uparrow E, \uparrow F \in D$, 故 $H' \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$ 且 $H' \ll x$.

定理 3 设 L 是拟连续 Domain, $\mathcal{B}$ 是 L 的拟双有限基, 则 L 相对于 $\mathcal{B}$ 具有性质 SM^* .

证 设 $\forall E, F \in \mathcal{B}, E \ll x, F \ll x$. 由于 $\mathcal{B}$ 是 L 的拟双有限基, 则存在由有限集作为元素的有限集族 $\mathcal{F}_i (i \in I)$, 使得:

(i) $\mathcal{B} \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{F}_i$, 且 $E, F \in \mathcal{F}_i$ 对某个 i 成立;

(ii) 存在 $H \in \mathcal{F}_i$, 使得 $H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$ 且 $H \ll x$, 则 $\uparrow E \cap \uparrow F \subseteq \bigcup_{i \in I} \uparrow H$.

反之, 若 $x \in \bigcup_{i \in I} \uparrow H$, 存在 $H \in \mathcal{F}_i$ 使得 $H \ll x$ 对某个 i 成立, 且 $x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, $\bigcup_{i \in I} \uparrow H \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$. 则 $\bigcup_{i \in I} \uparrow H = \uparrow E \cap \uparrow F$, L 相对于 $\mathcal{B}$ 具有性质 SM^* .

定理 4 设 L 是拟连续 Domain, 如果对任意有限集 $E, F \subseteq L$, $\uparrow E \cap \uparrow F$ 是 Scott 拓扑的紧子集, 则 L 具有 SM^* 性质.

证 设有限集 $E, F \subseteq L$. $\forall x \in \uparrow E \cap \uparrow F$, 由于 $\uparrow E \cap \uparrow F$ 是 Scott 开集, 则存在有限集 H_x 使得 $x \in \uparrow H_x \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F$, 则 $\mathcal{H} = \{\uparrow H_x : x \in \uparrow H_x \subseteq \uparrow E \cap \uparrow F\}$ 是 $\uparrow E \cap \uparrow F$ 的开覆盖, 则存在有限多个 $H_1, \dots, H_n \in \mathcal{H}$ 是 $\uparrow E \cap \uparrow F$ 的开覆盖, 则 $x \in \bigcup_i \uparrow H_i$.

反之, $\forall y \in \bigcup_i \uparrow H_i$, 存在 i 使得 $H_i \ll y, y \in \uparrow E \cap \uparrow F$. 从而 $\uparrow E \cap \uparrow F = \bigcup_i \uparrow H_i$, L 具有 SM^* 性质.

本文给出了比 M^* 性质更强的 SM^* 性质, 并给出了一些具有 SM^* 性质的特殊拟连续 Domain, 并说明

了在代数情形下, SM^* 性质与 M^* 性质等价, 同时给出了一种新的偏序结构 QL-Domain 以及其具有 SM^* 性质的等价条件. 本文的结论有助于 Domain 理论的进一步研究.

参考文献:

- [1] 许达, 喻厚义. 非交换拟洗牌 Hopf 代数的对极 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 25-29.
- [2] 马岫, 魏美华. Z-准连续 Domain 的性质及其等价刻画 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2017, 39(8): 73-76.
- [3] 吴昌耀, 陈剑尘, 何焕民. 含参数集值向量优化问题超有效点集的连通性 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(7): 118-125.
- [4] 罗海秀, 赵海兴, 肖玉芝, 等. 基于超图的公交超网络拓扑特性及鲁棒性分析 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 181-191.
- [5] 王武. 连续空间的伴随式刻画 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(19): 276-280.
- [6] 王武, 张国丽, 王颖. 定向空间的 Way Below 基 [J]. 系统科学与数学, 2022, 42(4): 1060-1066.
- [7] YUAN Y Y, KOU H. Consistent Smyth Powerdomains [J]. Topology and its Applications, 2014, 173: 264-275.
- [8] WANG W, ZHAO B. Characterization of Residuated Lattices via Multipliers [J]. Acta Mathematica Scientia, 2022, 42(5): 1902-1920.
- [9] MAO X X, XU L S. Meet Continuity Properties of Posets [J]. Theoretical Computer Science, 2009, 410: 4234-4240.
- [10] 李高林, 徐罗山. 拟连续 Domain 的拟基及其权 [J]. 模糊系统与数学, 2007, 21(6): 52-56.
- [11] 张文锋, 徐晓泉. 性质 M_F 与拟连续 Domain 中的 Scott 上紧集 [J]. 模糊系统与数学, 2012, 26(1): 137-140.
- [12] 吕振超, 寇辉. C-双有限 Domain 与 SM 性质 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2015, 52(1): 16-20.
- [13] GIERZ G, HOFMANN K H, KEIMAL K, et al. Continuous Lattices and Domains [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [14] 张月玲, 汪开云. 拟连续 Domain 的特征与浓度 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2010, 38(1): 19-22.
- [15] LI G L, XU L S. QFS-Domains and Their Lawson Compactness [J]. Order, 2013, 30(1): 233-248.
- [16] 陈秋燕, 寇辉. 拟连续 Domain 的网式刻画 [J]. 四川大学学报(自然科学版), 2014, 51(3): 433-435.

责任编辑 廖坤