DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.06.004

有限维 Leavitt 路代数的分次双代数结构[①]

蒋秋晴，　王正攀

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：基于 Leavitt 路代数的整数分次结构，给出了具有单位元且是代数同态的余单位定义的共性：只存在一个顶点，使得余单位在此处定义为 1，而在其余顶点处的定义均为 0. 特别地，对于有限维 Leavitt 路代数，满足前述共性的顶点是孤立点. 构造基元处的余乘定义，证明了：有限维 Leavitt 路代数具有整数分次双代数结构当且仅当其底图含有孤立点.

关 键 词：有向图；Leavitt 路代数；分次双代数

中图分类号：O156.2　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)06-0031-04

The Graded Bialgebras Structure of Finite Dimensional Leavitt Path Algebras

JIANG Qiuqing，　WANG Zhengpan

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: On the basis of the $\mathbb{Z}$-graded algebra structure on a Leavitt path algebra, this paper presents the common feature of the definition of a counit map that satisfies the identity element and is an algebra homomorphism: there exists only one vertex, such that the counit map is 1 under its definition, and the definition of the rest vertices is 0. In particular, for dimensional Leavitt path algebras, the vertices which satisfy the above commonality are isolated points. Then the definition of the comultiplication map is constructed at the primitive. It is proved that a finite dimensional Leavitt path algebra has a $\mathbb{Z}$-graded bialgebra structure if and only if the underlying graph has isolated vertices.

Key words: directed graph; Leavitt path algebras; graded bialgebras

Leavitt 代数是文献[1]给出的不满足基数不变性的一个典型例子，一般记作 $L_{\mathbb{K}}(1, n)$，其中 n 是正整数，$\mathbb{K}$ 是一个域. Leavitt 路代数是基于有向图定义的满足一定生成关系的一类代数，是 Leavitt 代数的自然推广，由文献[2-3]各自独立引入. Leavitt路代数与Bergman代数、图 C^*-代数、半群等若干类代数有着密切联系，近些年受到了广泛关注，有限维 Leavitt 路代数是一类半单代数[4-8].

Hopf 代数的分类，是代数学者长期关注的重要问题，近年来，Hopf 代数也在组合研究领域中崭露头角[9]. 有限维半单代数上有丰富的 Hopf 代数结构[10-11]，相关研究在 Hopf 代数的分类中举足轻重，有向图也是研究 Hopf 代数分类问题的手段之一[12-13]. 有限维 Leavitt 路代数作为半单代数自然也有 Hopf 代数结

① 收稿日期：2022-09-17
基金项目：国家自然科学基金项目(12271442).
作者简介：蒋秋晴，硕士研究生，主要从事代数组合学的研究.
通信作者：王正攀，教授.

构，但 Leavitt 路代数同时具有整数分次结构($\mathbb{Z}$-分次结构)[14]，其上是否具有 $\mathbb{Z}$-分次的 Hopf 代数结构尚不清楚，本文给出了有限维 Leavitt 路代数具有 $\mathbb{Z}$-分次双代数结构的充要条件.

我们首先引入一些基本概念和记号. 令 $\mathbb{K}$ 是代数闭域，B 是 $\mathbb{K}$-线性空间. 又令 I 是 B 上的单位映射，$m: B\otimes B \longrightarrow B$，$\mu: \mathbb{K}\longrightarrow B$，$\Delta: B\longrightarrow B\otimes B$，$\epsilon: B\longrightarrow \mathbb{K}$，$s_1: \mathbb{K}\otimes B\longrightarrow B$，$s_2: B\otimes \mathbb{K}\longrightarrow B$ 均是 $\mathbb{K}$-线性映射，其中对任意 $b\in B$，$k\in\mathbb{K}$，有 $s_1(k\otimes b)=kb=s_2(b\otimes k)$. 若 B 关于 m,μ,Δ,ϵ 满足下列条件：

(a) 结合性：$m(I\otimes m)=m(m\otimes I)$；

(b) 单位性：$m(I\otimes\mu)=s_2$，$m(\mu\otimes I)=s_1$；

(c) 余结合性：$(I\otimes\Delta)\Delta=(\Delta\otimes I)\Delta$；

(d) 余单位性：$s_2(I\otimes\epsilon)\Delta=I=s_1(\epsilon\otimes I)\Delta$；

(e) Δ,ϵ 均是代数同态.

则称 B 是一个 $\mathbb{K}$-双代数，记 $\mu(1_{\mathbb{K}})=\mathbf{1}$，则 $\mathbf{1}$ 是 B 的单位元[15]. 若 $B=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}B_n$ 是 $\mathbb{K}$-双代数，且满足：

(i) $B_iB_j\subseteq B_{i+j}(\forall i,j\in\mathbb{Z})$；

(ii) $\Delta B_n\subseteq\bigoplus_{i+j=n}B_i\otimes B_j(\forall n,i,j\in\mathbb{Z})$；

(iii) $\epsilon B_n=0(\forall n\in\mathbb{Z}-\{0\})$.

则称 B 是 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathbb{K}$-双代数.

四元组(Γ^0,Γ^1,s,r)称为一个有向图，记作 Γ，其中，Γ^0 为图 Γ 的顶点集，Γ^1 为图 Γ 的边集，$s:\Gamma^1\longrightarrow\Gamma^0$ 为图 Γ 的起点映射，$r:\Gamma^1\longrightarrow\Gamma^0$ 为图 Γ 的终点映射[4]. 若 $s^{-1}(v)=\varnothing=r^{-1}(v)$，则称 v 是一个孤立点. 若 $e_1,\cdots,e_n\in\Gamma^1$，对 $\forall i=1,\cdots,n-1$，有 $r(e_i)=s(e_{i+1})$，则称边的序列 $\rho=e_1e_2\cdots e_n$ 为图 Γ 中的一条路径，且 $s(\rho)=s(e_1)$，$r(\rho)=r(e_n)$，$n=\ell(\rho)$ 为 ρ 的长度. 对 $\forall v\in\Gamma^0$，有 $\ell(v)=0$. $\mathrm{Path}(\Gamma)$ 表示图 Γ 中所有路径构成的集合. 称四元组$(\Gamma^0,\Gamma^1\cup(\Gamma^1)^*,r',s')$为图 Γ 的扩展图，记作$\hat{\Gamma}$，其中$(\Gamma^1)^*=\{e^*: e\in\Gamma^1\}$. 对 $\forall e\in\Gamma^1$，有

$$r'(e)=r(e)\qquad r'(e^*)=s(e)\qquad s'(e)=s(e)\qquad s'(e^*)=r(e)$$

若 $\rho=e_1e_2\cdots e_n\in\mathrm{Path}(\Gamma)$，则 $\rho^*=e_n^*e_{n-1}^*\cdots e_1^*$. 由集合 $\Gamma^0\cup\Gamma^1\cup(\Gamma^1)^*$ 生成且满足以下生成关系的结合 $\mathbb{K}$-代数为 Γ 在 $\mathbb{K}$ 上的 Leavitt 路代数，记作 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$：

(V) $uv=\delta_{u,v}v(\forall u,v\in\Gamma^0)$；

(E1) $s(e)e=er(e)=e(\forall e\in\Gamma^1)$；

(E2) $r(e)e^*=e^*s(e)=e^*(\forall e\in\Gamma^1)$；

(CK1) $e^*e'=\delta_{e,e'}r(e)(\forall e,e'\in\Gamma^1)$；

(CK2) $v=\sum\limits_{e\in s^{-1}(v)}ee^*(\forall v\in\Gamma^0,\ s^{-1}(v)\neq\varnothing)$.

称 Γ 为 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 的底图. 对 $\forall v\in\Gamma^0$，$e\in\Gamma^1$，定义

$$\deg(v)=0\qquad \deg(e)=1\qquad \deg(e^*)=-1$$

则 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 形成 $\mathbb{Z}$-分次 $\mathbb{K}$-双代数.

一些简单的底图上的 Leavitt 路代数同构于我们熟知的若干代数. 例如，全矩阵代数 $M_n(K)$ 同构于 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma_1)$，其中 n 为正整数，Γ_1 为有向 n-线性图，即由 n 个顶点、$n-1$ 条首尾相连的边形成的有向图. 又如，劳伦多项式代数 $\mathbb{K}[x,x^{-1}]$ 同构于 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma_2)$，其中$(\Gamma_2)^0=\{v\}$，$(\Gamma_2)^1=\{e\}$，且 $s(e)=r(e)=v$. 再如，Leavitt 代数 $L_{\mathbb{K}}(1,n)$ 同构于 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma_3)$，其中 n 为大于 1 的正整数，且$(\Gamma_3)^0=\{v\}$，$(\Gamma_3)^1=\{e_1,\cdots,e_n\}$，对 $\forall i=1,\cdots,n$，有 $s(e_i)=r(e_i)=v$.

另外，有限维 Leavitt 路代数含有单位元，且同构于某一个分块矩阵代数[5,16].

引理 1 设 $\Gamma=(\Gamma^0,\Gamma^1,r,s)$ 是一个有向图. 则 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 有单位元当且仅当 Γ^0 有限，且 $\mathbf{1}=\sum\limits_{v\in\Gamma^0}v$.

引理 2 若 Leavitt 路代数 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 是有限维 $\mathbb{K}$-代数，则必存在 Γ' 是有限个有限线性图的并，使得 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)\simeq L_{\mathbb{K}}(\Gamma')$.

引理 3 若 Γ 是有限个有限线性图的并，则 $\mathfrak{B}=\{\rho,\rho^*:\rho\in\mathrm{Path}(\Gamma)\}$ 是 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 的一个 $\mathbb{K}$-基.

定理 1 有限维 Leavitt 路代数形成 $\mathbb{Z}$-分次双代数当且仅当其底图含有孤立点.

证　据引理 2、引理 3，假设 Γ 是有限个有限线性图的并，且 $\mathfrak{B}$ 是由 Γ 的路径形成的 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 的 $\mathbb{K}$-基.

必要性　已知 $L_{\mathbb{K}}(\Gamma)$ 具有 $\mathbb{Z}$-分次双代数结构. 因为 ϵ 是代数同态，所以

$$\epsilon\Big(\sum_{v\in\Gamma^0} v\Big)=\sum_{v\in\Gamma^0}\epsilon(v)=1$$

且对 $\forall v\in\Gamma^0$，有 $\epsilon(vv)=\epsilon(v)\epsilon(v)=\epsilon(v)$，即 $\epsilon(v)\in\{0,1\}$. 故存在唯一的 $u\in\Gamma^0$，使得对 $\forall v\in\Gamma^0$，有 $\epsilon(v)=\delta_{uv}$. 下证 u 是孤立点，否则，必存在 $e\in\Gamma^1$，使得 $s(e)=u$ 或 $r(e)=u$. 不妨假设 $s(e)=u$. 注意到 $u\neq r(e)$，有 $\epsilon(ee^*)=\epsilon(e)\epsilon(e^*)=\epsilon(u)=1$，即 $\epsilon(e)\neq 0$. 另一方面 $\epsilon(e)=\epsilon(er(e))=\epsilon(e)\epsilon(r(e))=0$，矛盾. 因此，$u$ 为孤立点.

充分性　若 Γ 含孤立点，令 $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1\uplus\mathfrak{B}_2$，其中 $\mathfrak{B}_1=\{v_1,\cdots,v_t\}$ 为 Γ 的孤立点集. 任取 $\beta\in\mathfrak{B}\backslash\{v_t\}$，定义

$$\epsilon(v_t)=1\qquad \epsilon(\beta)=0$$

任取 $x\in\mathbb{Z}$，记 $\bar{x}\in\{y\in\mathbb{Z}: y\equiv x(\mathrm{mod}\ t), 1\leqslant y\leqslant t\}$. 对 $\forall v_i\in\mathfrak{B}_1$，$\beta\in\mathfrak{B}_2$，定义

$$\Delta(v_i)=\sum_{j=1}^{t} v_j\otimes v_{\overline{i-j}}\qquad \Delta(\beta)=\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta$$

显然上述定义的 ϵ,Δ 满足 $\mathbb{Z}$-分次条件. 由上述余乘定义可得

$$\begin{aligned}\Delta\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)&=\sum_{i=1}^{t}\Delta(v_i)=\sum_{i=1}^{t}\Big(\sum_{j=1}^{t}v_j\otimes v_{\overline{i-j}}\Big)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(v_j\otimes v_{\overline{i-j}})=\\&\sum_{j=1}^{t}\Big(v_j\otimes\sum_{i=1}^{t}v_{\overline{i-j}}\Big)=\Big(\sum_{i'=1}^{t}v_{i'}\Big)\otimes\Big(\sum_{j'=1}^{t}v_{j'}\Big)=\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\end{aligned}\tag{1}$$

以下仅需分别验证双代数的定义中的(c),(d),(e)3 条.

(d)　任取 $v_i\in\mathfrak{B}_1$，有

$$\begin{cases}s_1(\epsilon\otimes I)\Delta(v_i)=s_1(\epsilon\otimes I)\Big(\sum_{j=1}^{t}v_j\otimes v_{\overline{i-j}}\Big)=s_1(1\otimes v_i)=v_i\\ s_2(I\otimes\epsilon)\Delta(v_i)=s_2(I\otimes\epsilon)\Big(\sum_{j=1}^{t}v_j\otimes v_{\overline{i-j}}\Big)=s_2(v_i\otimes 1)=v_i\end{cases}$$

任取 $\beta\in\mathfrak{B}_2$，有

$$\begin{cases}s_1(\epsilon\otimes I)\Delta(\beta)=s_1(\epsilon\otimes I)\Big(\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\Big)=s_1(1\otimes\beta)=\beta\\ s_2(I\otimes\epsilon)\Delta(\beta)=s_2(I\otimes\epsilon)\Big(\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\Big)=s_2(\beta\otimes 1)=\beta\end{cases}$$

即 $s_1(\epsilon\otimes I)\Delta=I=s_2(I\otimes\epsilon)\Delta$.

(c)　基于上述定义，对 $\forall x,y\in\{1,\cdots,t\}$，显然有 $\overline{x-y}=\overline{\bar{x}-\bar{y}}$. 任取 $v_i\in\mathfrak{B}_1$，有

$$\begin{aligned}(\Delta\otimes I)\Delta(v_i)&=(\Delta\otimes I)\Big(\sum_{j=1}^{t}v_j\otimes v_{\overline{i-j}}\Big)=\sum_{j=1}^{t}(\Delta(v_j)\otimes v_{\overline{i-j}})=\\&\sum_{j=1}^{t}\Big(\sum_{k=1}^{t}(v_k\otimes v_{\overline{j-k}})\otimes v_{\overline{i-j}}\Big)=\sum_{j=1}^{t}\sum_{k=1}^{t}(v_k\otimes v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{i-j}})=\\&\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{t}(v_k\otimes v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{i-j}})=\sum_{k=1}^{t}\Big(v_k\otimes\sum_{j=1}^{t}(v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{i-j}})\Big)=\\&\sum_{k=1}^{t}\Big(v_k\otimes\sum_{j=1}^{t}(v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{(i-k)-(j-k)}})\Big)=\sum_{k=1}^{t}\Big(v_k\otimes\sum_{j=1}^{t}(v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{\overline{i-k}-\overline{j-k}}})\Big)=\\&\sum_{k=1}^{t}\Big(v_k\otimes\sum_{\overline{j-k}=1}^{t}(v_{\overline{j-k}}\otimes v_{\overline{\overline{i-k}-\overline{j-k}}})\Big)=\sum_{k=1}^{t}(v_k\otimes\Delta(v_{\overline{i-k}}))=\\&\sum_{k=1}^{t}(I\otimes\Delta)(v_k\otimes v_{\overline{i-k}})=(I\otimes\Delta)\Big(\sum_{k=1}^{t}(v_k\otimes v_{\overline{i-k}})\Big)=(I\otimes\Delta)\Delta(v_i)\end{aligned}$$

任取 $\beta\in\mathfrak{B}_2$，基于(1)式可得

$$(I\otimes\Delta)\Delta(\beta)=(I\otimes\Delta)\Big(\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\Big)=$$

$$\beta\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta$$

$$(\Delta\otimes I)\Delta(\beta)=(\Delta\otimes I)\Big(\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\Big)=$$

$$\beta\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\beta$$

即$(\Delta\otimes I)\Delta=(I\otimes\Delta)\Delta$.

(e) ϵ 是代数同态. 任取 $\lambda,\gamma\in\mathfrak{V}$, 若 $\lambda=\gamma=v_t$, 则 $\epsilon(\lambda\gamma)=1=\epsilon(\lambda)\epsilon(\gamma)$. 若 λ,γ 不全为 v_t, 则 $\epsilon(\lambda\gamma)=0=\epsilon(\lambda)\epsilon(\gamma)$, 即 $\epsilon(\lambda\gamma)=\epsilon(\lambda)\epsilon(\gamma)$.

Δ 是代数同态. 任取 $\lambda,\gamma\in\mathfrak{V}$, 若 $\lambda,\gamma\in\mathfrak{V}_1$, 则

$$\Delta(\lambda\gamma)=\begin{cases}\Delta(\lambda) & \lambda=\gamma\\ 0 & \lambda\neq\gamma\end{cases}$$

即 $\Delta(\lambda\gamma)=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$. 若 $\lambda,\gamma\in\mathfrak{V}_2$, 当 $\lambda\gamma=0$ 时, 显然 $\Delta(\lambda\gamma)=0=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$; 当 $\lambda\gamma\neq0$ 时, 则存在 $\kappa\in\mathfrak{V}_2$ 使得 $\kappa=\lambda\gamma$, 且

$$\Delta(\kappa)=\kappa\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\kappa=\lambda\gamma\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\lambda\gamma=$$

$$\Big(\lambda\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\lambda\Big)\Big(\gamma\otimes\mathbf{1}+\Big(\sum_{i=1}^{t}v_i\Big)\otimes\gamma\Big)=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$$

即 $\Delta(\lambda\gamma)=\Delta(\kappa)=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$. 当 λ,γ 不同时在 $\mathfrak{V}_1$ 或 $\mathfrak{V}_2$ 时, 显然 $\Delta(\lambda\gamma)=0=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$. 总之, 对 $\forall\lambda,\gamma\in\mathfrak{V}$, $\Delta(\lambda\gamma)=\Delta(\lambda)\Delta(\gamma)$.

综上所述, $(L_{\mathbb{K}}(\Gamma), m, \mu, \Delta, \epsilon)$ 可形成 $\mathbb{Z}$-分次双代数.

参考文献:

[1] LEAVITT W G. The Module Type of a Ring [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1962, 103(1): 113-130.

[2] ABRAMS G, ARANDA P G. The Leavitt Path Algebra of a Graph [J]. Journal of Algebra, 2005, 293(2): 319-334.

[3] ARA P, MORENO M A, PARDO E. Nonstable *K*-Theory for Graph Algebras [J]. Algebras and Representation Theory, 2007, 10(2): 157-178.

[4] ABRAMS G, ARA P, SILES M M. Leavitt Path Algebras [M]. London: Springer, 2017.

[5] ABRAMS G, ARANDA P G, SILES M M. Finite-Dimensional Leavitt Path Algebras [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 209(3): 753-762.

[6] ABRAMS G, ANH P N, LOULY A, et al. The Classification Question for Leavitt Path Algebras [J] Journal of Algebra, 2008, 320(5): 1983-2026.

[7] 袁月, 赵平. 半群 $H_{(n,m)}$ 的独立子半群 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(6): 74-81.

[8] 罗天红, 罗永乐, 王正攀. 一类图逆半群的同余格的性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(4): 73-78.

[9] 许达, 喻厚义. 非交换拟洗牌 Hopf 代数的对极 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2022, 47(4): 25-29.

[10] LARSON R G, RADFORD D E. Semisimple Hopf Algebras [J]. Journal of Algebra, 1995, 171(1): 5-35.

[11] NATALE S. On Semisimple Hopf Algebras of Dimension pq^2 [J]. Journal of Algebra, 1999, 221(2): 242-278.

[12] GREEN E L, SOLBERG Ø. Basic Hopf Algebras and Quantum Groups [J]. Mathematische Zeitschrift, 1998, 229(1): 45-76.

[13] CIBILS C, ROSSO M. Algèbres Des Chemins Quantiques [J]. Advances in Mathematics, 1997, 125(2): 171-199.

[14] ABRAMS G, ARANDA P G. The Leavitt Path Algebra of a Graph [J]. Journal of Algebra, 2005, 293(2): 319-334.

[15] CIBILS C, ROSSO M. Hopf Quivers [J]. Journal of Algebra, 2002, 254(2): 241-251.

[16] ALAHMADI A, ALSULAMI H, JAIN S K, et al. Leavitt Path Algebras of Finite Gelfand-Kirillov Dimension [J]. Journal of Algebra and Its Applications, 2012, 11(6): 1250225.

责任编辑 廖坤