

一类柱面与 Möbius 带的匹配多项式^①

马海成, 攸晓杰

青海民族大学 数学与统计学院, 西宁 810007

摘要: 给两条 n 个点的路, 其顶点从左向右分别标记为 $1, 2, \dots, n$ 和 $1', 2', \dots, n'$. 将这两条路上的点 i 和 i' ($i=1, 2, \dots, n$) 分别用一条边连接, 得到的图记为 $L_{n,n}$, 称为梯子. 将图 $L_{n,n}$ 的顶点 1 和 n , $1'$ 和 n' 分别用一条边连接得到的图记为 $Z_{n,n}$, 称为柱面. 将图 $L_{n,n}$ 的顶点 1 和 n' , $1'$ 和 n 分别用一条边连接得到的图记为 $M_{n,n}$, 称为 Möbius 带. 即 $L_{n,n}=P_n \times P_2$, $Z_{n,n}=C_n \times P_2$ 分别表示梯子与柱面图. 本文利用递推关系和生成函数的方法分别给出了 $L_{n,n}$, $M_{n,n}$ 和 $Z_{n,n}$ 的匹配多项式及完美匹配数目的计算公式.

关键词: 柱面; Möbius 带; 匹配多项式; 完美匹配数

中图分类号: O157.5

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)06-0035-08

Matching Polynomials of a Class of Cylinders and Möbius Strip

MA Haicheng, YOU Xiaojie

School of Mathematics and Statistics, Qinghai Nationalities University, Xining 810007, China

Abstract: Given two paths with n vertices, their vertices are marked as $1, 2, \dots, n$ and $1', 2', \dots, n'$ from left to right respectively. The ladder $L_{n,n}$ is obtained by connecting the vertices i and i' on these two paths with one edge for $i=1, 2, \dots, n$, respectively. The cylinder $Z_{n,n}$ is obtained by connecting the vertices 1 and n , and the vertices $1'$ and n' with one edge on the ladder $L_{n,n}$, respectively. The Möbius strip $M_{n,n}$ is obtained by connecting the the vertices 1 and n' , and the vertices $1'$ and n with one edge respectively on the ladder $L_{n,n}$. That is, $L_{n,n}=P_n \times P_2$, $Z_{n,n}=C_n \times P_2$. In this paper, the matching polynomials of ladders, cylinder and Möbius strip are calculated by using recursive relationships and generation functions. In addition, the number of perfect matching on these graphs are also calculated.

Key words: cylinders; Möbius strip; matching polynomial; perfect matching

本文仅考虑有限无向的简单图. 设 G 是有 n 个点的图. 若 G 的一个生成子图的每个分支是一个孤立点或者一条边, 则称此生成子图为 G 的一个匹配. 恰有 k 条边的匹配称为 k -匹配. 饱和了 G 的所有顶点的匹配称为 G 的完美匹配, 图 G 的完美匹配的个数记为 $pm(G)$. 文献[1]定义了图 G 的匹配多项式为

$$M(G, W) = \sum_{k \geq 0} p(G, k) x^{n-2k} y^k \quad (1)$$

① 收稿日期: 2022-10-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(11561056, 11661066); 青海省自然科学基金项目(2022-ZJ-924).

作者简介: 马海成, 教授, 主要从事代数图论的研究.

这里 $W=(x, y)$, x 和 y 分别是点和边的权重, $p(G, k)$ 是 G 的所有 k -匹配的数目, 且约定 $p(G, 0)=1$. 假如令 $y=-1$, 我们便得到文献[2]中定义的匹配多项式

$$\mu(G, x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k p(G, k) x^{n-2k} \quad (2)$$

(1), (2) 式互相确定, 本文使用(2)式为图 G 的匹配多项式, 并将 $\mu(G, x)$ 简记为 $\mu(G)$. 匹配多项式在数学、统计物理和化学中都有很重要的应用. 在统计物理领域, 匹配多项式是描述一种物理系统的数学模型, 首先由文献[3]引入. 在理论化学领域, 匹配多项式的根的绝对值之和称为该图的匹配能量, 与这个图所表示的芳香烃的活性有关[4]. 匹配多项式的所有系数的绝对值之和(即所有匹配的总数)就是这个图表示的碳氢化合物的 Hosoya 指标, 与这个化合物的沸点有关[5]. 匹配多项式是一种组合计数多项式, 它与图的特征多项式、色多项式和其他多项式有许多联系[6-9]. 对于给定的图, 计算这个图的匹配多项式是一个困难的问题, 文献[10-13]计算了许多图的匹配多项式. 关于 Hosoya 指标的研究可参见文献[14], 关于匹配多项式对图的刻画的研究可参见文献[15-19]. 截至目前, 还有许多基本图的匹配多项式仍然未知, 如本文所涉及的柱面和 Möbius 带, 这是两个较为基本的图, 但其匹配多项式未知. 作为对匹配多项式研究的补充, 本文给出了这两个图的匹配多项式, 并计算了这些图上的完美匹配的个数.

设 $G=(V(G), E(G))$ 是一个简单图, $V(G)$ 是其顶点集, $E(G)$ 是其边集, 其中 $E(G)$ 的每一个元素是 $V(G)$ 上的无序对, 称为一条边. 如果 $e \in E(G)$, 以 $G \setminus e$ 表示从图 G 中删除边 e 后得到的图. 如果 $v \in V(G)$, 以 $G \setminus v$ 表示删去点 v 以及与之相关联的所有边后得到的图. 以 P_n, C_n 分别表示 n 个点的路、圈. 给两条 n 个点的路, 其顶点从左向右分别标记为 $1, 2, \dots, n$ 和 $1', 2', \dots, n'$, 将这两条路上的点 i 和 i' ($i=1, 2, \dots, r$) 分别用一条边连接, 得到的图记为 $L_{n,r}$ (见图 1). 把 $L_{n,n}$ 称为梯子, 简记为 L_n . 将图 $L_{n,r}$ 的顶点 1 和 $n, 1'$ 和 n' 分别用一条边连接得到的图记为 $Z_{n,r}$, $Z_{n,n}$ 称为柱面, 简记为 Z_n . 将图 $L_{n,r}$ 的顶点 1 和 $n', 1'$ 和 n 分别用一条边连接得到的图记为 $M_{n,r}$, $M_{n,n}$ 称为 Möbius 带, 记为 M_n (见图 2). 从梯子 L_n 中删去点 n 后得到的图记为 S_n (见图 3). 设 G 和 H 是两个点不交的图, 定义图 G 和 H 的乘积图为 $G \times H$, 其顶点集为 $V(G) \times V(H)$, 两个点 $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V(G \times H)$ 在图 $G \times H$ 中邻接当且仅当 $u_1 = u_2, v_1$ 与 v_2 在图 H 中邻接, 或 u_1 与 u_2 在 G 中邻接, $v_1 = v_2$. 于是, 梯子 $L_{n,n} = P_n \times P_2$, 柱面图 $Z_{n,n} = C_n \times P_2$.

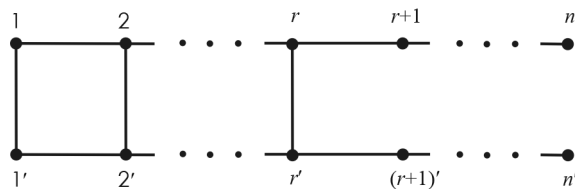
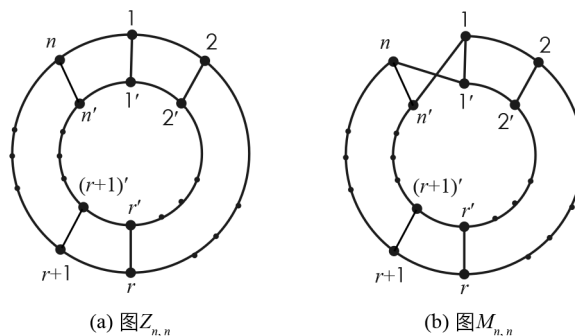


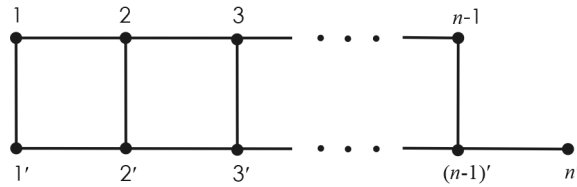
图 1 图 $L_{n,r}$



(a) 图 $Z_{n,n}$

(b) 图 $M_{n,n}$

图 2 图 $Z_{n,n}$ 和 $M_{n,n}$

图 3 图 S_n

1 柱面和 Möbius 带的匹配多项式

引理 1^[9] 设图 G 有 k 个连通分支: $G_1, G_2, \dots, G_k$, 则

$$\mu(G, x) = \mu(G_1, x) \mu(G_2, x) \cdots \mu(G_k, x)$$

引理 2^[9] 设 G 是一个图, $u \in V(G)$, $e = uv \in E(G)$, 则:

$$(i) \mu(G, x) = x \mu(G \setminus u, x) - \sum_{i \sim u} \mu(G \setminus \{u, i\}, x);$$

$$(ii) \mu(G, x) = \mu(G \setminus e, x) - \mu(G \setminus \{u, v\}, x).$$

引理 3^[9]

$$\mu(P_n, x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

$$\mu(C_n, x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-2k} \binom{n-1-k}{k} x^{n-2k} = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} x^{n-2k}$$

引理 4^[14] 设 G 是有 n 个点的图, 则

$$Z(G) = \frac{\mu(G, i)}{i^n}$$

其中 i 是复数单位, $i^2 = -1$.

定理 1

$$\begin{aligned} \mu(L_n) = & \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n} \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} (-1)^{k_2} (x^2-2)^{k_1} x^{2k_2} + \\ & \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-1} \frac{(k_1+k_2+k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} (-1)^{k_2} (x^2-2)^{k_1} x^{2k_2} \end{aligned}$$

证 对 L_n 的边 $e = (n-1, n)$ 、 S_n 的边 $e' = ((n-1)', n')$ 使用引理 2, 便得到(3)式的前两个式子. 为了使(3)式的系数矩阵是一个方阵, 我们填上第 3 个式子.

$$\begin{cases} \mu(L_n) = \mu(P_2) \mu(L_{n-1}) - 2\mu(P_1) \mu(S_{n-1}) + \mu(L_{n-2}) \\ \mu(S_n) = \mu(P_1) \mu(L_{n-1}) - \mu(S_{n-1}) \\ \mu(L_{n-1}) = \mu(L_{n-1}) \end{cases} \quad (3)$$

令(3)式的系数矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mu(P_2) & -2\mu(P_1) & 1 \\ \mu(P_1) & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

设矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为

$$f(\lambda) = \lambda^3 - d_1 \lambda^2 + d_2 \lambda - d_3 \quad (4)$$

其中 $d_1 = \mu(P_2) - 1 = x^2 - 2$, $d_2 = -\mu(P_2) + 2\mu(P_1)^2 - 1 = x^2$, $d_3 = 1$.

$\mu(L_n)$ 满足递推关系式

$$\mu(L_n) = d_1 \mu(L_{n-1}) - d_2 \mu(L_{n-2}) + d_3 \mu(L_{n-3}) \quad (5)$$

初始条件为

$$\mu(L_0) = 1 \quad \mu(L_1) = \mu(P_2) = x^2 - 1 \quad \mu(L_2) = \mu(C_4) = x^4 - 4x^2 + 2 \quad (6)$$

因为(5)式的变量为 t 的生成函数

$$H(t) = (1 - d_1 t + d_2 t^2 - d_3 t^3)^{-1} [\mu(L_0) + (\mu(L_1) - d_1 \mu(L_0))t + (\mu(L_2) - d_1 \mu(L_1) + d_2 \mu(L_0))t^2] = \\ (1 - d_1 t + d_2 t^2 - d_3 t^3)^{-1} (1 + t)$$

且

$$(1 - d_1 t + d_2 t^2 - d_3 t^3)^{-1} = \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{k_1 + 2k_2 + 3k_3 = k} \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} (-1)^{k_2} d_1^{k_1} d_2^{k_2} d_3^{k_3} \right] t^k = \\ \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{k_1 + 2k_2 + 3k_3 = k} \frac{(k_1 + k_2 + k_3)!}{k_1! k_2! k_3!} (-1)^{k_2} (x^2 - 2)^{k_1} x^{2k_2} \right] t^k$$

由生成函数的定义, 定理 1 得证.

定理 2

$$\mu(L_{n,r}) = (\mu(P_n))^2 - \sum_{i=0}^{r-1} (\mu(P_{n-i-1}))^2 \mu(L_{i,i})$$

其中 $\mu(L_{0,0}) = 1$.

证 对 $L_{n,r}$ 的边 $e_r = (r, r')$, $e_{r-1} = (r-1, (r-1)'), \dots, e_1 = (1, 1')$ 依次使用引理 2(ii), 便得到下列式子:

$$\begin{aligned} \mu(L_{n,r}) &= \mu(L_{n,r-1}) - \mu(L_{r-1,r-1}) (\mu(P_{n-r}))^2 \\ \mu(L_{n,r-1}) &= \mu(L_{n,r-2}) - \mu(L_{r-2,r-2}) (\mu(P_{n-r+1}))^2 \\ &\dots \\ \mu(L_{n,1}) &= \mu(P_{2n}) = (\mu(P_n))^2 - (\mu(P_{n-1}))^2 \end{aligned}$$

将以上各式相加, 得到

$$\begin{aligned} \mu(L_{n,r}) &= (\mu(P_n))^2 - (\mu(P_{n-1}))^2 - \sum_{i=1}^{r-1} \mu(L_{i,i}) (\mu(P_{n-i-1}))^2 = \\ &(\mu(P_n))^2 - \sum_{i=0}^{r-1} (\mu(P_{n-i-1}))^2 \mu(L_{i,i}) \end{aligned}$$

定理 3

$$\mu(Z_{n,n}) = \mu(C_n)^2 - \sum_{j=0}^{n-1} \mu(L_{n-1,j})$$

其中 $L_{n-1,0} = 2P_{n-1}$.

证 对 $Z_{n,n}$ 的边 $e_n = (n, n')$, $e_{n-1} = (n-1, (n-1)'), \dots, e_1 = (1, 1')$ 依次使用引理 2(ii), 便得到下列式子:

$$\begin{aligned} \mu(Z_{n,n}) &= \mu(Z_{n,n-1}) - \mu(L_{n-1,n-1}) \\ \mu(Z_{n,n-1}) &= \mu(Z_{n,n-2}) - \mu(L_{n-1,n-2}) \\ &\dots \\ \mu(Z_{n,1}) &= \mu(C_n)^2 - \mu(P_{n-1})^2 \end{aligned}$$

相加上面各式, 定理 3 得证.

定理 4

$$\mu(M_{n,n}) = \mu(C_{2n}) - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j})$$

其中 $L_{n-1,0} = 2P_{n-1}$.

证 对 $M_{n,n}$ 的边 $e_n = (n, n')$, $e_{n-1} = (n-1, (n-1)'), \dots, e_1 = (1, 1')$ 依次使用引理 2(ii), 便得到下列式子:

$$\mu(M_{n,n}) = \mu(M_{n,n-1}) - \mu(L_{n-1,n-1})$$

$$\mu(M_{n,n-1}) = \mu(M_{n,n-2}) - \mu(L_{n-1,n-2})$$

...

$$\mu(M_{n,1}) = \mu(C_{2n}) - \mu(P_{n-1})^2$$

相加上面各式, 定理 4 得证.

推论 1 (i) $\mu(M_{n,n}) - \mu(Z_{n,n}) = \mu(C_{2n}) - \mu(C_n)^2$;

(ii)

$$pm(M_{n,n}) - pm(Z_{n,n}) = \begin{cases} 2 & n \text{ 为奇数} \\ -2 & n \text{ 为偶数} \end{cases}$$

(iii) $Z(M_{n,n}) - Z(Z_{n,n}) = Z(C_{2n}) - Z(C_n)^2$.

证 由定理 3 和定理 4, (i) 显然.

(ii) 由匹配多项式的定义知

$$pm(G) = (-1)^{\frac{n}{2}} (\mu(G, 0))$$

由 (i) 和引理 3 知

$$pm(Z_{n,n}) - pm(M_{n,n}) = (-1)^n (\mu(Z_{n,n}, 0) - \mu(M_{n,n}, 0)) = (-1)^n (\mu(C_{2n}, 0) - \mu(C_n, 0)^2)$$

当 n 为奇数时, $(-1)^n (\mu(C_{2n}, 0) - \mu(C_n, 0)^2) = (-1)^n ((-1)^n \times 2 - 0) = 2$.

当 n 为偶数时, $(-1)^n (\mu(C_{2n}, 0) - \mu(C_n, 0)^2) = (-1)^n ((-1)^n \times 2 - ((-1)^{\frac{n}{2}} \times 2)^2) = -2$.

(iii) 由引理 4 和 (i) 知

$$Z(M_{n,n}) - Z(Z_{n,n}) = \frac{\mu(M_{n,n}, i)}{i^{2n}} - \frac{\mu(Z_{n,n}, i)}{i^{2n}} = \frac{\mu(C_{2n}, i)}{i^{2n}} - \frac{\mu(C_n, i)^2}{i^{2n}} = Z(C_{2n}) - Z(C_n)^2$$

推论 1 得证.

2 梯子、柱面和 Möbius 带的完美匹配数

推论 2

$$pm(L_n) = (-1)^{n-1} \sum_{k_1+3k_3=n} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

证 在定理 1 中令 $k_2 = 0, x = 0$, 便得该表达式的常数项为

$$\begin{aligned} \mu(L_n, 0) &= \sum_{k_1+3k_3=n} \frac{(k_1+k_3)!}{k_1! k_3!} (-2)^{k_1} + \sum_{k_1+3k_3=n-1} \frac{(k_1+k_3)!}{k_1! k_3!} (-2)^{k_1} = \\ &= \sum_{k_1+3k_3=n} \frac{(k_1+k_3)!}{k_1! k_3!} (-2)^{k_1} + \sum_{k_1+3k_3=n} \frac{(k_1+k_3-1)!}{(k_1-1)! k_3!} (-2)^{k_1-1} = \\ &= \sum_{k_1+3k_3=n} \left[\frac{(k_1+k_3)!}{k_1! k_3!} (-2)^{k_1} + \frac{(k_1+k_3-1)!}{(k_1-1)! k_3!} (-2)^{k_1-1} \right] = \\ &= \sum_{k_1+3k_3=n} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \end{aligned}$$

由于 L_n 的完美匹配数 $pm(L_n)$ 等于多项式 $\mu(L_n, x)$ 的常数项乘 $(-1)^n$, 于是

$$pm(L_n) = (-1)^{n-1} \sum_{k_1+3k_3=n} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

注 1 很容易计算 L_n 的完美匹配数就是著名的斐波那契数, 其前几项的值 L_1, L_2, L_3, L_4 的完美匹配数分别为 1, 2, 3, 5, 与推论 2 计算的值是吻合的. 推论 2 给出了斐波那契数的另外一种表示法.

推论 3 (i) 当 n 为偶数时,

$$pm(L_{n,r}) = (-1)^n \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} + 1 \right)$$

(ii) 当 n 为奇数时,

$$pm(L_{n,r}) = (-1)^n \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} - 1 \right)$$

证 众所周知, 当 $n=4m$ 或 $n=4m+2$ 时, 路 P_n 的匹配多项式的常数项为 1 或 -1 ; 当 n 为奇数时, 路 P_n 的匹配多项式的常数项均为 0. 令 $x=0$, 使得:

当 n 为偶数时, 定理 2 中表达式的常数项为

$$\mu(L_{n,r}, 0) = \mu(P_n, 0)^2 - \mu(P_{n-1}, 0)^2 - \sum_{i=1}^{r-1} (\mu(P_{n-i-1}, 0))^2 \mu(L_{i,i}, 0) =$$

$$1 - \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \mu(L_{2s-1, 2s-1}, 0) =$$

$$1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

于是

$$pm(L_{n,r}) = (-1)^n \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} + 1 \right)$$

当 n 为奇数时, 定理 2 中表达式的常数项为

$$\mu(L_{n,n}, 0) = \mu(P_n, 0)^2 - \mu(P_{n-1}, 0)^2 - \sum_{i=1}^{r-1} (\mu(P_{n-i-1}, 0))^2 \mu(L_{i,i}, 0) =$$

$$-1 - \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \mu(L_{2s, 2s}, 0) = -1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{r-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

推论 4 (i) 当 n 为偶数时,

$$pm(Z_{n,n}) = (-1)^n \left(3 + n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)$$

(ii) 当 n 为奇数时,

$$pm(Z_{n,n}) = (-1)^{n-1} \left(n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)$$

证 众所周知, 当 $n=4m$ 或 $n=4m+2$ 时, 圈 C_n 的匹配多项式的常数项为 2 或 -2 ; 当 n 为奇数时, 圈 C_n 的匹配多项式的常数项均为 0, 令 $x=0$, 使得:

当 n 为偶数时, 由推论 3 知, 定理 3 中表达式的常数项为

$$\mu(Z_{n,n}, 0) = (\mu(C_n, 0))^2 - (\mu(P_{n-1}, 0))^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$4 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$4 - \sum_{j=1}^{n-1} \left(-1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right) =$$

$$3 + n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

当 n 为奇数时, 定理 3 中表达式的常数项为

$$\mu(Z_{n,n}, 0) = (\mu(C_n, 0))^2 - (\mu(P_{n-1}, 0))^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$-1 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$-1 - \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right) =$$

$$-n - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)$$

注 2 容易验证图 Z_3 和 Z_4 的完美匹配数分别为 4 和 9, 与推论 4 计算的值是吻合的.

推论 5 (i) 当 n 为偶数时,

$$pm(M_{n,n}) = (-1)^n \left(1 + n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)$$

(ii) 当 n 为奇数时,

$$pm(M_{n,n}) = (-1)^{n-1} \left(2 + n + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)$$

证 令 $x=0$, 使得:

当 n 为偶数时, 由推论 3 知, 定理 4 中表达式的常数项为

$$\mu(M_{n,n}, 0) = \mu(C_{2n}, 0) - \mu(P_{n-1}, 0)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$2 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$- \sum_{j=1}^{n-1} \left(-1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right) =$$

$$1 + n - \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j-1}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1}$$

当 n 为奇数时, 定理 4 中表达式的常数项为

$$\mu(M_{n,n}, 0) = \mu(C_{2n}, 0) - \mu(P_{n-1}, 0)^2 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$-2 - 1 - \sum_{j=1}^{n-1} \mu(L_{n-1,j}, 0) =$$

$$\begin{aligned}
& -3 - \sum_{j=1}^{n-1} \left(1 + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right) = \\
& -2 - n - \sum_{j=1}^{n-1} \left(\sum_{s=1}^{\lfloor \frac{j}{2} \rfloor} \sum_{k_1+3k_3=2s-1} \binom{k_1+k_3}{k_1} \frac{k_1+2k_3}{k_1+k_3} (-2)^{k_1-1} \right)
\end{aligned}$$

注 3 容易验证图 M_3 和 M_4 的完美匹配数分别为 6 和 7, 与推论 5 计算的值是吻合的.

参考文献:

- [1] FARRELL E J. An Introduction to Matching Polynomial [J]. Journal of Combinatorial Theory(Series B), 1979, 27(1): 75-86.
- [2] GODSIL C D, GUTMAN I. On the Theory of the Matching Polynomials [J]. Journal of Graph Theory, 1981, 5(2): 137-144.
- [3] HEILMANN O J, LIEB E H. Theory of Monomer-Dimer Systems [J]. Communications in Mathematical Physics, 1972, 25: 190-232.
- [4] GUTMAN I, WAGNER S. The Matching Energy of a Graph [J]. Discrete Applied Mathematics, 2012, 160: 2177-2187.
- [5] HOSOYA H. Topological Index, A Newly Proposed Quantity Characterizing the Topological Nature of Structural Isomers of Saturated Hydrocarbons [J]. Bulletin of the Chemical Society of Japan, 1971, 44(9): 2332-2339.
- [6] GUTMAN I. A Note on Analogies Between the Characteristic and the Matching Polynomial of a Graph [J]. Publications DE L'institut Mathématique, 1982, 31: 27-31.
- [7] GODSIL C D. Hermite Polynomials and a Duality Relation for Matchings Polynomials [J]. Combinatorica, 1981, 1(3): 257-262.
- [8] FARRELL E J, WHITEHEAD E G. Connections Between the Matching and Chromatic Polynomials [J]. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 1992, 15(4): 757-766.
- [9] GODSIL C D. Algebraic Combinatorics [M]. New York: Chapman & Hall, 1993.
- [10] ZHANG F J, ZHENG M L. Matching Polynomial of Special Graphs [J]. 新疆大学学报, 1989, 6(1): 1-4.
- [11] ZHANG F J, ZHOU M K. Matching Polynomials of Two Classes of Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 1998, 20(3): 253-260.
- [12] YAN W G, YEH Y N, ZHANG F J. On the Matching Polynomials of Graphs with Small Number of Cycles of Even Length [J]. International Journal of Quantum Chemistry, 2005, 105(2): 124-130.
- [13] YAN W G, YEH Y N. On the Matching Polynomial of Subdivision Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(1): 195-200.
- [14] 马海成, 李生刚. 图的多项式与 Hosoya 指标 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2013, 45(4): 41-44.
- [15] 马海成. 匹配最大根小于 2 的图的匹配等价类 [J]. 系统科学与数学, 2003, 23(3): 337-342.
- [16] 马海成. 匹配最大根小于等于 2 的图的匹配等价 [J]. 数学学报, 2006, 49(6): 1355-1360.
- [17] 马海成. 路并的匹配等价图数 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2007, 32(3): 6-9.
- [18] 高尚, 马海成. $2K_1 \cup I_n$ 的匹配等价图类 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(2): 82-88.
- [19] 李丹阳, 马海成. 一个点并路的补图的色等价图类 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2022, 44(4): 110-116.

责任编辑 廖坤