第 48 卷 第 6 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 6 月
Vol. 48 No. 6　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jun. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.06.006

τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集模型及其性质①

吴凡，　孔祥智

江南大学 理学院，江苏 无锡 214122

摘要：粗糙集理论的核心思想是在保持聚类分析的前提下，通过属性约简，导出问题的决策或分类规则. 新时代下数据具有大容量、多样性、时效性、价值性和真实性的特征. 为了利用更精准的模糊决策方法进行模糊寻优，基于模糊信息系统，结合模糊 β-邻域和模糊互补 β-邻域的概念，构建了一种 τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集模型，其主要思想是将互补近似算子推广到模糊信息系统中，并结合一致性、兼容性以及属性约简的知识研究新模型的性质.

关　键　词：模糊 β-覆盖；模糊 β-邻域；模糊粗糙集；模糊信息系统

中图分类号：O159　　**文献标志码：A**　　**文章编号：**1000-5471(2023)06-0043-06

The τ-Type Fuzzy β-Covering Rough Set Model and Its Properties

WU Fan，　KONG Xiangzhi

School of Science, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China

Abstract: The core idea of rough set theory is to derive the decision or classification rules of the question by attribute reduction under the premise of maintaining cluster analysis. With the characteristics of large capacity, diversity, timeliness, value and authenticity of data in the new era, in order to use more accurate fuzzy decision-making method for fuzzy optimization, a τ-type fuzzy β-covering rough set model was constructed based on the fuzzy information system, combined with the concept of fuzzy β-neighborhood and fuzzy complementary β-neighborhood. The main idea is to extend the complementary approximation operator to the fuzzy information system and study the properties of the new model by combining the knowledge of consistency, compatibility and attribute reduction.

Key words: fuzzy β-covering; fuzzy β-neighborhood; fuzzy rough set; fuzzy information system

互联网时代中大规模复杂信息的涌现，带来处理(计算)复杂性的难度增加. 大数据作为继云计算、物联网之后 IT 产业又一次重要的技术变革，正在驱动管理领域的新变革. 粒计算[1]是由美国控制论专家 Zadeh提出的智能研究领域中解决复杂问题的新方法和有效工具，在大数据处理中，对降低数据规模具有重要研究意义. 信息系统[2](也称为知识表示系统)是粒计算研究中重要的数学模型之一，它具有属性集和对象集两个维度，能够描述数据对象的某些属性特征. 模糊信息系统[3]综合了信息系统、模糊集[4]与粗糙集[5]，逐渐受到人们的关注，成为一个研究热点. 自文献[6]首次结合模糊集理论和粗糙集理论提出模糊粗糙集概念后，模糊粗糙集理论由此得到较多研究[7-11]. 文献[12]引入了模糊 β-覆盖的概念，用参数 β 替换 1，实

① 收稿日期：2022-08-12
作者简介：吴凡，硕士研究生，主要从事模糊数学与代数学的研究.
通信作者：孔祥智，教授.

现了由特殊到一般的转化.

本文基于模糊粗糙集理论，借助模糊等价关系、模糊上下近似算子以及互补近似算子的概念，找出了模糊信息系统的一个约简，达到了去除模糊信息系统的冗余属性的效果. 文献[13]和文献[14]先后定义了两种模糊 β-覆盖粗糙集模型，并用矩阵来表示上、下近似算子，这使得计算机处理大型复杂数据成为可能. 相较早期的模型，本文提出一种 τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集模型，综合邻域和互补邻域两方面进行分析和解决实际问题，避免了数据采集、存储以及约简等过程中产生的误差，从而进行更完备的信息决策.

1 预备知识

定义 1[15] 设 U 是一个论域，模糊集 A 或者 U 的一个模糊子集 A 是论域 U 到 $[0,1]$ 的一个映射，即 $A: U \longrightarrow [0,1]$，$x \longmapsto A(x)$，$A(x)$ 称为模糊集 A 的隶属函数(或称为 x 对模糊集 A 的隶属度). 将论域 U 上的所有模糊子集构成的集合称为 U 的模糊幂集，记作 $F(U)$.

对 $\forall A, B \in F(U)$，若对 $\forall x \in U$ 都有 $A(x) \leqslant B(x)$，则称 $A \subseteq B$. $A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

对一族 $\{\alpha_i\} \subset [0,1]$，$i \in I$，$I \subseteq \mathbb{N}_+$，记 $\vee_{i \in I} \alpha_i$ 或者 $\vee \{\alpha_i: i \in I\}$ 为 $\{\alpha_i: i \in I\}$ 的上确界，记 $\wedge_{i \in I} \alpha_i$ 或者 $\wedge \{\alpha_i: i \in I\}$ 为 $\{\alpha_i: i \in I\}$ 的下确界. 给出 $A, B \in F(U)$，对 $\forall x \in U$，称 $(A \cup B)(x) = A(x) \vee B(x)$ 为 A 和 B 的并，记作 $A \cup B$. 称 $(A \cap B)(x) = A(x) \wedge B(x)$ 为 A 和 B 的交，记作 $A \cap B$. 称 $A^c(x) = 1 - A(x)$ 为 A 的补，记作 A^c.

定义 2[11] 设 U 是一个非空有限集合，$\mathscr{C}$ 是 U 的子集组成的集族. 若 $\varnothing \notin \mathscr{C}$ 且 $\bigcup_{C \in \mathscr{C}} C = U$ 均成立，则 $\mathscr{C}$ 称为 U 的一个覆盖，二元组 $(U, \mathscr{C})$ 为一个覆盖近似空间.

定义 3[16] 设 $(U, \mathscr{C})$ 是一个覆盖近似空间，若 $(U, \mathscr{C})$ 中 X^c 记作 $U - X$，则对 $\forall x \in U$，x 的邻域 N_x 和互补邻域 M_x 分别定义为

$$N_x = \bigcap \{C \in \mathscr{C}: x \in C\}$$

$$M_x = \bigcap \{C^c: (C \in \mathscr{C}) \wedge (x \notin C)\}$$

定义 4[12] 设 U 是一个论域，$\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\} \subseteq F(U)$，且 $\beta \in (0,1]$. 若对 $\forall x \in U$，都有 $(\bigcup_{i=1}^m C_i)(x) \geqslant \beta$，则称 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$ 是 U 上的一个模糊 β-覆盖，称 $(U, \mathscr{C})$ 为一个模糊 β-覆盖近似空间.

定义 5[14] 设 $(U, \mathscr{C})$ 是一个模糊 β-覆盖近似空间，$\beta \in (0,1]$，其中 $\mathscr{C} = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$. 对 $\forall x \in U$，x 的模糊 β-邻域和模糊互补 β-邻域分别定义为

$$N_x^\beta = \bigcap \{C_i \in \mathscr{C}: C_i \geqslant \beta\}$$

$$M_x^\beta = -\bigcup \{C_i: C_i(x) < \beta, C_i \in \mathscr{C}\} = \bigcap \{C_i^c: C_i(x) < \beta, C_i \in \mathscr{C}\}$$

定义 6[11] 设 $(U, \mathscr{C})$ 是一个模糊 β-覆盖近似空间，$\beta \in (0,1]$，且 $C \in \mathscr{C}$. 若下列两个条件之一成立:

(a) 对 $\forall x \in U$，有 $C(x) < \beta$;

(b) 对 $x \in U$，若 $C(x) \geqslant \beta$，则存在 $C' \in \mathscr{C} - \{C\}$ 使得 $C' \subseteq C$ 且 $C'(x) \geqslant \beta$.

则称 C 是 $\mathscr{C}$ 的一个 β-可约元. 否则，称 C 是 $\mathscr{C}$ 的一个 β-不可约元. 若 $D \subseteq \mathscr{C}$，$\mathscr{C} - D$ 是 $\mathscr{C}$ 的所有 β-可约元组成的集合，则称 D 是 $\mathscr{C}$ 的约简，记作 $\Gamma(\mathscr{C})$.

定义 7[11] 设 $(U, \mathscr{C})$ 是一个模糊 β-覆盖近似空间，$\beta \in (0,1]$. 称 $\Theta^\beta(\mathscr{C}) = \{N_x^\beta: x \in U\}$ 是由模糊 β-覆盖 $\mathscr{C}$ 导出的模糊 β-邻域族. 称 $\widetilde{\Theta}^\beta(\mathscr{C}) = \{M_x^\beta: x \in U\}$ 是由模糊 β-覆盖 $\mathscr{C}$ 导出的模糊互补 β-邻域族.

定义 8[11] 设 $\mathscr{C}_1$，$\mathscr{C}_2$ 是 U 上的两个模糊 β-覆盖，$\beta \in (0,1]$. $\Theta^\beta(\mathscr{C}_1) = \Theta^\beta(\mathscr{C}_2)$ 当且仅当 $\Gamma(\mathscr{C}_1) = \Gamma(\mathscr{C}_2)$.

定义 9[17] 设 U 和 V 是两个论域，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的映射，且 $A_1, A_2 \in F(U)$. 若 $[x]_f = \{y \in U: f(y) = f(x)\}$，则 $\{[x]_f: x \in U\}$ 是 U 上的一个划分. 对 $\forall x \in U$，若下列条件之一是成立的:

(a) 对 $\forall u \in [x]_f$，有 $A_1(u) \leqslant A_2(u)$;

(b) 对 $\forall u \in [x]_f$，有 $A_1(u) \geqslant A_2(u)$.

则称 f 对于 A_1 和 A_2 是一致的. 对 $\forall x \in U$，若对 $\forall u, v \in [x]_f$，都有 $A_1(u) = A_1(v)$，则称 f 对 A_1 是相容的.

2　τ 型的模糊β-覆盖粗糙集模型及其性质

对于一个模糊信息系统 FIS＝(U, AT)，对 $\forall x \in U$，若 $\wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)] \neq 0$，则称 AT 是 U 的一个模糊 β-覆盖. 下面结合模糊 β-邻域和模糊互补 β-邻域，在模糊信息系统上定义一种 τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集模型，并结合相关的理论知识探讨新模型的性质.

定义 10　设 FIS＝(U, AT) 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且 $\beta \in (0, \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 对 $\forall X \in F(U)$，集合 $\tau^-(X)$ 和 $\tau^+(X)$ 分别被称为 τ 型的模糊 β-覆盖下近似和 τ 型的模糊 β-覆盖上近似，简称为 τ-FβCLA，τ-FβCUA，其中

$$\tau^-(X)(y)=\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[((1-N_x^{\beta}(x)) \wedge (1-M_x^{\beta}(x))) \vee X(x)] \qquad \forall y \in V$$

$$\tau^+(X)(y)=\vee_{x\in f^{-1}(y)}[(N_x^{\beta}(x) \vee M_x^{\beta}(x)) \wedge X(x)] \qquad \forall y \in V$$

若 $\tau^-(X) \neq \tau^+(X)$，则称 X 是 τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集，该模型简称为 τ-FβRC.

例 1　设 FIS＝(U, AT) 是一个模糊信息系统，其中 $U=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ 且 $AT=\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$，

$$A_1=\frac{0.3}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.2}{x_3}+\frac{0.4}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.1}{x_6} \qquad A_2=\frac{0.2}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.2}{x_4}+\frac{0.1}{x_5}+\frac{0.5}{x_6}$$

$$A_3=\frac{0.7}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.3}{x_4}+\frac{0.9}{x_5}+\frac{0.4}{x_6} \qquad A_4=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.1}{x_2}+\frac{0.8}{x_3}+\frac{0.5}{x_4}+\frac{0.3}{x_5}+\frac{0.3}{x_6}$$

$$A_5=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}+\frac{0.7}{x_4}+\frac{0.6}{x_5}+\frac{0.8}{x_6}$$

当 $\beta \in (0, 0.6]$ 时，可知 AT 是 U 上的一个模糊 β-覆盖. 令 $\beta=0.5$，$V=\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$，$f: U \longrightarrow V$ 是 U 到 V 的一个映射，

$$f(x)=\begin{cases} y_1 & x=x_1 \\ y_2 & x \in \{x_2, x_5\} \\ y_3 & x \in \{x_3, x_6\} \\ y_4 & x=x_4 \end{cases}$$

令

$$X=\frac{0.4}{x_1}+\frac{0.5}{x_2}+\frac{0.1}{x_3}+\frac{0.2}{x_4}+\frac{0.7}{x_5}+\frac{0.3}{x_6}$$

根据定义 5，计算得出 $x_i (i=1,2,3,4,5,6)$ 的模糊 β-邻域 $N_{x_i}^{0.5}$ 和模糊互补 β-邻域 $M_{x_i}^{0.5}$. 很容易得出

$$N_{x_1}^{0.5}=A_3 \cap A_5 \qquad N_{x_2}^{0.5}=A_1 \cap A_3 \qquad N_{x_3}^{0.5}=A_4 \cap A_5$$

$$N_{x_4}^{0.5}=A_4 \cap A_5 \qquad N_{x_5}^{0.5}=A_1 \cap A_3 \cap A_5 \qquad N_{x_6}^{0.5}=A_2 \cap A_5$$

$$M_{x_1}^{0.5}=A_1^c \cap A_2^c \cap A_4^c \qquad M_{x_2}^{0.5}=A_2^c \cap A_4^c \cap A_5^c \qquad M_{x_3}^{0.5}=A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$$

$$M_{x_4}^{0.5}=A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \qquad M_{x_5}^{0.5}=A_2^c \cap A_4^c \qquad M_{x_6}^{0.5}=A_1^c \cap A_3^c \cap A_4^c$$

因此，我们可以计算出 X 的 τ 型的模糊 β-覆盖的上下近似值为

$$\tau^-(X)=\frac{0.4}{y_1}+\frac{0.5}{y_2}+\frac{0.4}{y_3}+\frac{0.4}{y_4}$$

$$\tau^+(X)=\frac{0.4}{y_1}+\frac{0.7}{y_2}+\frac{0.3}{y_3}+\frac{0.2}{y_4}$$

定理 1　设 FIS＝(U, AT) 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且 $\beta \in (0, \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 对 $\forall X, Y \in F(U)$，下列结论是成立的：

(i) $\tau^-(X^c)=(\tau^+(X))^c$，$\tau^+(X^c)=(\tau^-(X))^c$；

(ii) $\tau^+(\varnothing)=\varnothing$，$\tau^-(U)=V$；

(iii) $\tau^-(X \cap Y)=\tau^-(X) \cap \tau^-(Y)$，$\tau^+(X \cup Y)=\tau^+(X) \cup \tau^+(Y)$；

(iv) $\tau^-(X \cup Y) \supseteq \tau^-(X) \cup \tau^-(Y)$，$\tau^+(X \cap Y) \subseteq \tau^+(X) \cap \tau^+(Y)$；

(v) 若 $X \subseteq Y$，则 $\tau^{-}(X) \subseteq \tau^{-}(Y)$，$\tau^{+}(X) \subseteq \tau^{+}(Y)$；

(vi) 若 $\forall x \in U$，有 $1 - N_x^\beta(x) \leqslant X(x) \leqslant N_x^\beta(x)$，$1 - M_x^\beta(x) \leqslant X(x) \leqslant M_x^\beta(x)$，则 $\tau^{-}(X) \subseteq X \subseteq \tau^{+}(X)$.

证 类似于文献[14]中命题 3.1 的证明.

为了进一步研究 $\tau^{-}(X)$ 和 $\tau^{+}(X)$ 的性质，先看如下的一个例子：

例 2 在例 1 中，取

$$A = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.3}{x_4} + \frac{0.5}{x_5} + \frac{0.7}{x_6}$$

$$B = \frac{0.7}{x_1} + \frac{0.8}{x_2} + \frac{0.3}{x_3} + \frac{0.2}{x_4} + \frac{0.1}{x_5} + \frac{0.5}{x_6}$$

则有

$$\tau^{-}(A) = \frac{0.4}{y_1} + \frac{0.4}{y_2} + \frac{0.6}{y_3} + \frac{0.4}{y_4} \qquad \tau^{+}(A) = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.5}{y_2} + \frac{0.6}{y_3} + \frac{0.3}{y_4}$$

$$\tau^{-}(B) = \frac{0.7}{y_1} + \frac{0.3}{y_2} + \frac{0.5}{y_3} + \frac{0.4}{y_4} \qquad \tau^{+}(B) = \frac{0.6}{y_1} + \frac{0.6}{y_2} + \frac{0.5}{y_3} + \frac{0.2}{y_4}$$

$$\tau^{-}(A \cup B) = \frac{0.7}{y_1} + \frac{0.5}{y_2} + \frac{0.6}{y_3} + \frac{0.4}{y_4} \qquad \tau^{+}(A \cap B) = \frac{0.2}{y_1} + \frac{0.4}{y_2} + \frac{0.5}{y_3} + \frac{0.2}{y_4}$$

不难看出，

$$\tau^{-}(A) \cup \tau^{-}(B) \neq \tau^{-}(A \cup B)$$

$$\tau^{+}(A) \cap \tau^{+}(B) \neq \tau^{+}(A \cap B)$$

然而，定理 1(iv) 可以在一定条件下成立. 下面结合定义 9 中映射的一致性与兼容性给出定理 1(iv) 成立的充分条件：

定理 2 设 FIS$=(U, AT)$ 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且 $\beta \in (0, \wedge_{x \in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 对 $\forall X, Y \in F(U)$，若 f 对 X 和 Y 是一致的，则

$$\tau^{-}(X \cup Y) = \tau^{-}(X) \cup \tau^{-}(Y)$$

$$\tau^{+}(X \cap Y) = \tau^{+}(X) \cap \tau^{+}(Y)$$

证 根据定理 1，有 $\tau^{-}(X \cup Y) \supseteq \tau^{-}(X) \cup \tau^{-}(Y)$ 和 $\tau^{+}(X \cap Y) \subseteq \tau^{+}(X) \cap \tau^{+}(Y)$ 成立，下面仅需要证明 $\tau^{-}(X \cup Y) \subseteq \tau^{-}(X) \cup \tau^{-}(Y)$ 和 $\tau^{+}(X \cap Y) \supseteq \tau^{+}(X) \cap \tau^{+}(Y)$.

对 $\forall y \in V$，若 f 对 X 和 Y 是一致的，根据定义 9 可知以下条件之一必成立：

(a) 对 $\forall x \in f^{-1}(y)$，有 $X(x) \leqslant Y(x)$；

(b) 对 $\forall x \in f^{-1}(y)$，有 $X(x) \geqslant Y(x)$.

则有

$$\begin{aligned}\tau^{-}(X \cup Y)(y) = & \wedge_{x \in f^{-1}(y)}[((1 - N_x^\beta(x)) \wedge (1 - M_x^\beta(x))) \vee (X \cup Y)(x)] = \\ & \wedge_{x \in f^{-1}(y)}[((1 - N_x^\beta(x)) \wedge (1 - M_x^\beta(x))) \vee Y(x)] = \tau^{-}(Y)(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^{-}(X \cup Y)(y) = & \wedge_{x \in f^{-1}(y)}[((1 - N_x^\beta(x)) \wedge (1 - M_x^\beta(x))) \vee (X \cup Y)(x)] = \\ & \wedge_{x \in f^{-1}(y)}[((1 - N_x^\beta(x)) \wedge (1 - M_x^\beta(x))) \vee X(x)] = \tau^{-}(X)(y)\end{aligned}$$

因此 $\tau^{-}(X \cup Y) \subseteq \tau^{-}(X) \cup \tau^{-}(Y)$ 成立.

同样地，

$$\begin{aligned}\tau^{+}(X \cap Y)(y) = & \vee_{x \in f^{-1}(y)}[(N_x^\beta(x) \vee M_x^\beta(x)) \wedge (X \cap Y)(x)] = \\ & \vee_{x \in f^{-1}(y)}[(N_x^\beta(x) \vee M_x^\beta(x)) \wedge X(x)] = \tau^{+}(X)(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau^{+}(X \cap Y)(y) = & \vee_{x \in f^{-1}(y)}[(N_x^\beta(x) \vee M_x^\beta(x)) \wedge (X \cap Y)(x)] = \\ & \vee_{x \in f^{-1}(y)}[(N_x^\beta(x) \vee M_x^\beta(x)) \wedge Y(x)] = \tau^{+}(Y)(y)\end{aligned}$$

因此 $\tau^{+}(X \cap Y) \supseteq \tau^{+}(X) \cap \tau^{+}(Y)$ 成立. 故定理 2 成立.

下面将特殊推广到一般情况，得到以下推论：

推论 1 设 FIS$=(U, AT)$ 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT =$

$\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且$\beta \in (0, \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 对 $\forall X_1, X_2, \cdots, X_n \in F(U)$，若 f 对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中任意两个模糊子集都是一致的，则 $\tau^-(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \tau^-(X_i)$ 和 $\tau^+(\bigcap_{i=1}^{n} X_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \tau^+(X_i)$ 均成立.

推论 2　设 FIS$=(U, AT)$ 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且 $\beta \in (0, \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 则以下结论成立：

(i) 对 $\forall X, Y \in F(U)$，若 f 对 X 和 Y 是一致的，则 $\tau^-(X \cup Y) = \tau^-(X) \cup \tau^-(Y)$ 和 $\tau^+(X \cap Y) = \tau^+(X) \cap \tau^+(Y)$ 成立；

(ii) 对 $\forall X_1, X_2, \cdots, X_n \in F(U)$，若 f 对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 中任意一个模糊子集都是相容的，则 $\tau^-(\bigcup_{i=1}^{n} X_i) = \bigcup_{i=1}^{n} \tau^-(X_i)$ 和 $\tau^+(\bigcap_{i=1}^{n} X_i) = \bigcap_{i=1}^{n} \tau^+(X_i)$ 均成立.

综合定义 7、定义 8 以及新模型，并结合可约性与属性约简相关的定理，得到以下定理：

定理 3　设 $\mathrm{FIS}_1 = (U, AT_1)$ 和 $\mathrm{FIS}_2 = (U, AT_2)$ 是两个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，$AT_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$AT_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$，且 $\beta \in (0, \min\{\wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{n} A_i(x)], \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} B_i(x)]\}]$. 对 $\forall X \in F(U)$，若 $\Gamma(AT_1) = \Gamma(AT_2)$，则 $\mathrm{FIS}_1, \mathrm{FIS}_2$ 对模糊子集 X 产生相同的τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集下近似集.

证　根据定义 7 和定义 8，有 $\Gamma(AT_1) = \Gamma(AT_2)$ 当且当 $\Theta^\beta(AT_1) = \Theta^\beta(AT_2)$，$\Theta^\beta(AT_1) = \Theta^\beta(AT_2)$，当且当 $\{N_{1x}^\beta: x \in U\} = \{N_{2x}^\beta: x \in U\}$，$\{M_{1x}^\beta: x \in U\} = \{M_{2x}^\beta: x \in U\}$. 则

$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - N_{1x}^\beta(x)) = \wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - N_{2x}^\beta(x))$$
$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - M_{1x}^\beta(x)) = \wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - M_{2x}^\beta(x))$$

从而

$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[(1 - N_{1x}^\beta(x)) \wedge (1 - M_{1x}^\beta(x))] = \wedge_{x\in f^{-1}(y)}[(1 - N_{2x}^\beta(x)) \wedge (1 - M_{2x}^\beta(x))]$$

则

$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[(1 - N_{1x}^\beta(x)) \wedge (1 - M_{1x}^\beta(x))] \vee X(x) =$$
$$[\wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - N_{2x}^\beta(x))] \vee [\wedge_{x\in f^{-1}(y)}(1 - M_{2x}^\beta(x))] \vee X(x)$$

可得

$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[(1 - N_{1x}^\beta(x)) \wedge (1 - M_{1x}^\beta(x))] \vee [\wedge X(x)] =$$
$$\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[(1 - N_{2x}^\beta(x)) \wedge (1 - M_{2x}^\beta(x))] \vee [\wedge X(x)]$$

从而

$$\tau_1^-(X)(y) = \tau_2^-(X)(y) \qquad y \in V$$

定理 4　设 $\mathrm{FIS}_1 = (U, AT_1)$ 和 $\mathrm{FIS}_2 = (U, AT_2)$ 是两个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，$AT_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$AT_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$，且 $\beta \in (0, \min\{\wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{n} A_i(x)], \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} B_i(x)]\}]$. 对 $\forall X \in F(U)$，若 $\Gamma(AT_1) = \Gamma(AT_2)$，则 $\mathrm{FIS}_1, \mathrm{FIS}_2$ 对模糊子集 X 产生相同的τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集下近似集.

定理 5　设 $\mathrm{FIS}_1 = (U, AT_1)$ 和 $\mathrm{FIS}_2 = (U, AT_2)$ 是两个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，$AT_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$，$AT_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$，且 $\beta \in (0, \min\{\wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{n} A_i(x)], \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} B_i(x)]\}]$. 对 $\forall X \in F(U)$，$X^c(x) = 1 - X(x)$，则 $\mathrm{FIS}_1, \mathrm{FIS}_2$ 对模糊子集 X 产生相同的τ 型的模糊 β-覆盖粗糙集下近似集当且仅当 $\mathrm{FIS}_1, \mathrm{FIS}_2$ 对模糊子集 X^c 产生相同的τ 型的模糊β-覆盖粗糙集上近似集.

证　(充分性)　$\forall X \in F(U)$，有 $\tau_{AT_1}^+(X) = \tau_{AT_2}^+(X)$. 由定理 1，有 $\tau_{AT_1}^+(X) = (\tau_{AT_1}^-(X^c))^c$，$\tau_{AT_2}^+(X) = (\tau_{AT_2}^-(X^c))^c$. 因此 $\tau_{AT_1}^-(X^c) = \tau_{AT_2}^-(X^c)$ 成立.

(必要性)　对 $\forall X^c \in F(U)$，有 $\tau_{AT_1}^-(X^c) = \tau_{AT_2}^-(X^c)$. 由定理 1，有 $\tau_{AT_1}^-(X^c) = (\tau_{AT_1}^+(X))^c$，$\tau_{AT_2}^-(X^c) = (\tau_{AT_2}^+(X))^c$. 因此 $\tau_{AT_1}^+(X) = \tau_{AT_2}^+(X)$.

定义 11　设 FIS$=(U, AT)$ 是一个模糊信息系统，$f: U \longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射，其中 $AT = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，且 $\beta \in (0, \wedge_{x\in U}[\vee_{i=1}^{m} A_i(x)]]$. 称二元组$\underline{\mathrm{FIS}}_\tau = (V, \tau^-(AT))$ 是 FIS 基于 τ 型的模糊 β-覆盖粗糙下近似算子导出的模糊信息系统，$\overline{\mathrm{FIS}}_\tau = (V, \tau^+(AT))$ 是 FIS 基于 τ 型的模糊β-覆盖粗糙上近似算子导出的模糊信息系统，其中

$$\tau^-(AT)=\{\tau^-(A_1),\tau^-(A_2),\cdots,\tau^-(A_m)\}$$
$$\tau^+(AT)=\{\tau^+(A_1),\tau^+(A_2),\cdots,\tau^+(A_m)\}$$

定理6 设 $X=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 U 的一个模糊 β-覆盖，$f:U\longrightarrow V$ 是一个 U 到 V 上的满射. 以下结论成立:

(i) 若对 $\forall x\in U$，有 $N_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$，$M_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$，则 $\tau^+(X)=\{\tau^+(A_1),\tau^+(A_2),\cdots,\tau^+(A_m)\}$ 是 V 的一个模糊 β-覆盖;

(ii) 若对 $\forall x\in U$，$1-N_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$，$1-M_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$，则 $\tau^-(X)=\{\tau^-(A_1),\tau^-(A_2),\cdots,\tau^-(A_m)\}$ 是 V 的一个模糊 β-覆盖.

证 (i) 由 $X=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是 U 的一个模糊 β-覆盖，对 $\forall x\in U$，有 $\vee_{i=1}^m A_i(x)\geqslant\beta$. 对 $\forall y\in V$，$\forall x\in U$，若 $N_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$，$M_x^\beta(x)\geqslant A_i(x)$ 成立，则

$$\vee_{i=1}^m[\tau^+(A_i)(y)]=\vee_{i=1}^m\{\vee_{x\in f^{-1}(y)}[(N_{1x}^\beta(x)\vee M_{1x}^\beta(x))\wedge A_i(x)]\}=$$
$$\vee_{i=1}^m[\vee_{x\in f^{-1}(y)}A_i(x)]\geqslant\vee_{i=1}^m A_i(x)\geqslant\beta$$

因此 $\tau^+(X)=\{\tau^+(A_1),\tau^+(A_2),\cdots,\tau^+(A_m)\}$ 是 V 的一个模糊 β-覆盖.

(ii) 同样地，

$$\vee_{i=1}^m[\tau^-(A_i)(y)]=\vee_{i=1}^m\{\wedge_{x\in f^{-1}(y)}[((1-N_{1x}^\beta(x))\wedge(1-M_{1x}^\beta(x)))\vee A_i(x)]\}=$$
$$\vee_{i=1}^m[\wedge_{x\in f^{-1}(y)}((1-N_{1x}^\beta(x))\wedge(1-M_{1x}^\beta(x)))]\geqslant\vee_{i=1}^m A_i(x)\geqslant\beta$$

因此 $\tau^-(X)=\{\tau^-(A_1),\tau^-(A_2),\cdots,\tau^-(A_m)\}$ 是 V 的一个模糊 β-覆盖.

参考文献:

[1] ZADEH L A. Toward a Theory of Fuzzy Information Granulation and Its Centrality in Human Reasoning and Fuzzy Logic [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1997, 90(2): 111-127.

[2] WANG C, CHEN D, HU Q. Fuzzy Information Systems and Their Homomorphisms [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 249: 128-138.

[3] DICK S, SCHENKER A, PEDRYCZ W, et al. Regranulation: A Granular Algorithm Enabling Communication Between Granular Worlds [J]. Information Sciences, 2007, 177(2): 408-435.

[4] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information & Control, 1965, 8(3): 338-353.

[5] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. Information Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[6] DUBOIS D, PRADE H. Rough Fuzzy Sets and Fuzzy Rough Sets [J]. International Journal of General Systems, 1990, 17(2/3): 191-209.

[7] 吴德垠. 闭模糊拟阵中模糊秩的计算 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(12): 5-12.

[8] 彭祖明. 基于模糊否定与生成子的模糊蕴涵及性质 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2020, 42(2): 41-47.

[9] 谢德华, 刘财辉, 凌敏. 局部多粒度覆盖粗糙集 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2021, 43(10): 1-9.

[10] ZHANG K, ZHAN J M, YAO Y Y. TOPSIS Method Based on a Fuzzy Covering Approximation Space: An Application to Biological Nano-Materials Selection [J]. Information Sciences, 2019, 502: 297-329.

[11] 杨斌. 模糊覆盖粗糙集及其扩展模型研究 [D]. 武汉: 武汉大学出版社, 2018.

[12] MA L W. Two Fuzzy Covering Rough Set Models and Their Generalizations Over Fuzzy Lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2016, 294: 1-17.

[13] MA L W, On Some Types of Neighborhood-Related Covering Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2012, 53(6): 901-911.

[14] NIU X L, SUN Z D, KONG X Z. A New Type of Dyad Fuzzy β-Covering Rough Set Models Base on Fuzzy Information System and Its Practical Application [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2022, 142: 13-30.

[15] YANG B, HU B Q. Communication Between Fuzzy Information Systems Using Fuzzy Covering-Based Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2018, 103: 414-436.

[16] MA L W. Some Twin Approximation Operators on Covering Approximation Spaces [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2015, 56: 59-70.

[17] WANG C Z, CHEN D G, HU Q H. Fuzzy Information Systems and Their Homomorphisms [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2014, 249: 128-138.

责任编辑 廖坤