第 48 卷 第 6 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 6 月
Vol. 48 No. 6 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jun. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.06.007

基于阿基米德 Copula 的极尾相依 Copula 的渐近展开①

廖娟， 彭作祥

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：基于 Juri 等提出的一阶正规变换条件下极尾相依 Copula 及其收敛定理，讨论在二阶正规变换的条件下，基于阿基米德 Copula 的极尾相依 Copula 的渐近展开.

关 键 词：二阶正规变换；极尾相依 Copula；阿基米德 Copula；渐近展开

中图分类号：O211.4 **文献标志码**：A **文章编号**：1000-5471(2023)06-0049-05

The Asymptotic Expansion of Extreme Tail Dependence Copula Based on Archimedean Copula

LIAO Juan, PENG Zuoxiang

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Based on the extreme tail dependence copula and its convergence theorems under the condition of first-order regular variation proposed by Juri et al, this paper proposes the extreme tail dependence copula's asymptotic expansion under the condition of second-order regular variation.

Key words: second-order regular variation; extreme tail dependence copula; Archimedean copula; asymptotic expansion

连接函数 Copula[1] 可以将多个边缘分布函数结合成一个联合分布函数，其中边缘分布是随机变量的分布，因此可以借助连接函数来刻画变量之间的相依关系. 关于 Copula 函数的性质及其应用的更多研究，见文献[2-4].

Copula 函数族中有种类众多的 Copula 函数，包括阿基米德 Copula、椭圆 Copula、极值 Copula 等. 阿基米德 Copula 是一种性质优良的 Copula 函数，具有构造简单、计算容易且便于应用的优点.

设 ψ：$[0, 1] \to [0, \infty]$ 为连续的、严格单调递减的凸函数，满足 $\psi(1)=0$. 且

$$\psi^{[-1]}(s) := \begin{cases} \psi^{-1}(s), & 0 \leqslant s < \psi(0) \\ 0, & \psi(0) \leqslant s \leqslant \infty \end{cases} \tag{1}$$

则称 Copula

① 收稿日期：2022-09-06
作者简介：廖娟，硕士研究生，主要从事数理统计方向研究.
通信作者：彭作祥，教授.

$$C(x, y) := \psi^{[-1]}(\psi(x) + \psi(y)) \tag{2}$$

为阿基米德 Copula 且函数 ψ 是 C 的生成元. 当 $\psi(0)=\infty$ 时，则称生成元 ψ 和其对应的阿基米德 Copula 是严格的[5].

当阿基米德 Copula 的生成元为 $\psi(t)=\dfrac{1}{\alpha}(t^{-\alpha}-1)$，$\alpha>0$ 时，由 $\psi(t)$ 生成的 Copula 为 Clayton Copula[6]，其表达形式为

$$C^{Cl,\alpha}(x, y) := (x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)^{-\frac{1}{\alpha}} \tag{3}$$

利用 Copula 可以解决许多重要问题，其中就有极值问题. 极值理论需要估计比以往所观测到的现象更极端的事件的发生概率，因此引发了对条件随机向量相依结构的研究. 文献[7] 提出了 Copula C 在水平 u 的极尾相依 Copula 的概念.

对于一个 Copula C 并且 $u\in(0, 1)$ 使得 $C(u, u)>0$，令

$$F_u(x) := \frac{C(x\wedge u, u)}{C(u, u)},\ 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{4}$$

关于 C 在水平 u 的极尾相依 Copula 为

$$C_u(x, y) := \frac{C(F_u^{-1}(x), F_u^{-1}(y))}{C(u, u)} \tag{5}$$

F_u 是连续的分布函数，$F_u(x)=\mathrm{P}[X\leqslant x \mid X\leqslant u, Y\leqslant u]$，并且由(5) 式可得 $C_u(x, y)=P[X\leqslant F_u^{-1}(x), Y\leqslant F_u^{-1}(y) \mid X\leqslant u, Y\leqslant u]$，即对于较小的 u 值，C_u 用 Copula C 描述了两个随机变量尾部的条件依赖结构，关于极尾相依 Copula 的研究见文献[8] 和文献[9].

文献[8] 讨论了当阿基米德 Copula 的生成元 $\psi\in RV_{-\alpha}(0^+)$，$\alpha>0$，即生成元 ψ 在一阶正规变换的条件下，$u\to 0^+$ 时，极尾相依 Copula C_u 收敛到 Clayton Copula.

文献[10-13] 讨论了正规变换函数和二阶正规变换函数，用以研究某个估计量的收敛速度，本文讨论生成元 ψ 在原点处满足二阶正规变换的条件下，即 $\psi\in 2RV_{-\alpha,\beta}(0^+)$，其中

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\dfrac{\psi(tx)}{\psi(t)}-x^{-\alpha}}{A(t)} = x^{-\alpha}\int_1^x u^{\beta-1}\mathrm{d}u,\ x>0 \tag{6}$$

辅助函数 $A(t)$ 是定号的(见文献[14])，得到极尾相依 Copula C_u 的渐近展开.

1 渐近展开式

定理 1 假设 Copula C 是严格的阿基米德 Copula，其生成元 ψ 可微并满足(6) 式，即 $\psi\in 2RV_{-\alpha,\beta}(0^+)$，其中 $0<\alpha<\infty$，$\beta>0$，辅助函数为 $A(t)$，则对任意 $0\leqslant x, y\leqslant 1$，$u\to 0^+$ 时，有

$$C_u(x, y) = C^{Cl,\alpha}(x, y)(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u))))(1+B(u)(1+o(1))) \tag{7}$$

其中 $B(u)\sim\dfrac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))$.

证 对于生成元为 ψ 的阿基米德 Copula C，由文献[7] 命题 3.2 知

$$\psi(F_u^{-1}(y)) = \psi(y\psi^{-1}(2\psi(u)))-\psi(u),\ 0\leqslant y\leqslant 1 \tag{8}$$

且根据(2),(5) 和(8) 式，有

$$\begin{aligned} C_u(x, y) &= \frac{C(F_u^{-1}(x), F_u^{-1}(y))}{C(u, u)} = \\ &\frac{\psi^{-1}(\psi(F_u^{-1}(x))+\psi(F_u^{-1}(y)))}{\psi^{-1}(2\psi(u))} = \\ &\frac{\psi^{-1}(\psi(x\psi^{-1}(2\psi(u)))+\psi(y\psi^{-1}(2\psi(u)))-2\psi(u))}{\psi^{-1}(2\psi(u))} \end{aligned}$$

令 $k=\psi^{-1}(2\psi(u))$，那么

$$C_u(x,y)=\frac{\psi^{-1}(\psi(kx)+\psi(ky)-\psi(k))}{k}=\frac{\psi^{-1}(\psi(kx)+\psi(ky)-\psi(k))}{\psi^{-1}(\psi(k))} \tag{9}$$

由 $\psi\in 2RV_{-\alpha,\beta}(0^+)$，$0<\alpha<\infty$，$\beta>0$，辅助函数为 $A(t)$ 可得

$$\psi(t)=ct^{-\alpha}\left(1+\frac{1}{\beta}A(t)+o(A(t))\right),\ t\to 0^+ \tag{10}$$

由文献[14]命题 2.7(i)得，逆函数 $\psi^{-1}\in 2RV_{-\frac{1}{\alpha},-\frac{\beta}{\alpha}}$，且辅助函数为 $B(t)=-\alpha^{-2}A\circ\psi^{-1}(t)$，即 $\psi^{-1}(t)$ 有下列展开式

$$\psi^{-1}(t)=ct^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}A\circ\psi^{-1}(t)+o(-\alpha^{-2}A\circ\psi^{-1}(t))\right) \tag{11}$$

成立，其中 $c\neq 0$(见文献[15]引理 2.2). 当 $u\to 0^+$ 时，$k\to 0^+$，$\psi(k)\to\infty$，由(11)式知，

$$\psi^{-1}(\psi(k))=c(\psi(k))^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}A(k)+o(-\alpha^{-2}A(k))\right) \tag{12}$$

由(10)式得，当 $k\to 0^+$ 时，$L_{x,y,\alpha}=\dfrac{\psi(kx)}{\psi(k)}+\dfrac{\psi(ky)}{\psi(k)}-1=(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)(1+o(A(k)))$，则由(11)式得

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(\psi(kx)+\psi(ky)-\psi(k))=&\ \psi^{-1}((x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(k)(1+o(A(k))))=\\&c((x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(k)(1+o(A(k))))^{-\frac{1}{\alpha}}\times\\&\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha})+o(-\alpha^{-2}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha}))\right)\end{aligned} \tag{13}$$

将(12)和(13)式代入(9)式得，当 $u\to 0^+$，$k=\psi^{-1}(2\psi(u))\to 0^+$ 时，

$$\begin{aligned}C_u(x,y)=&\frac{\psi^{-1}((x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(k)(1+o(A(k))))}{\psi^{-1}(\psi(k))}=\\&\frac{c((x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(k)(1+o(A(k))))^{-\frac{1}{\alpha}}(1+\frac{1}{\alpha\beta}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha})+o(-\alpha^{-2}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha})))}{c(\psi(k))^{-\frac{1}{\alpha}}\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}A(k)+o(-\alpha^{-2}A(k))\right)}=\\&(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)^{-\frac{1}{\alpha}}(1+o(A(k))\frac{1+\frac{1}{\alpha\beta}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha})+o(-\alpha^{-2}A\circ\psi^{-1}(\psi(k)\cdot L_{x,y,\alpha}))}{1+\frac{1}{\alpha\beta}A(k)+o(-\alpha^{-2}A(k))}=\\&C^{Cl,\alpha}(x,y)(1+o(A(k))\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}((x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(k)(1+o(A(k))))-A(k))(1+o(1))\right)=\\&C^{Cl,\alpha}(x,y)(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u))))\times\\&\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))(1+o(1))\right)\end{aligned}$$

其中，令

$$B(u)=\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))$$

则有

$$C_u(x,y)=C^{Cl,\alpha}(x,y)(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u))))(1+B(u)(1+o(1)))$$

当 $u\to 0^+$ 时

$$B(u)\sim\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))$$

定理证毕.

2　实例

例 1　给定阿基米德 Copula C 的生成元 $\psi(t)=(t^{-\frac{1}{\theta}}-1)^{\theta}$，$\alpha=1$，$\beta=\dfrac{1}{\theta}$，可以得到 $\psi\in 2RV_{-1,\frac{1}{\theta}}(0^+)$，

辅助函数 $A(t)=\dfrac{t^{\frac{1}{\theta}}}{t^{\frac{1}{\theta}}-1}$，$\psi^{-1}(t)=(t^{\frac{1}{\theta}}+1)^{-\theta}$.

$$C_u(x,y)=\frac{\psi^{-1}(\psi(x\psi^{-1}(2\psi(u)))+\psi(y\psi^{-1}(2\psi(u)))-2\psi(u))}{\psi^{-1}(2\psi(u))} \tag{14}$$

将 ψ 和 ψ^{-1} 的具体表达式代入(14)式，令

$$D_u(x,y)=((x^{-\frac{1}{\theta}}(2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})+u^{\frac{1}{\theta}})-u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}+(y^{-\frac{1}{\theta}}(2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})+u^{\frac{1}{\theta}})-u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}-2(1-u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}$$

则有

$$C_u(x,y)=\frac{(2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})+u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}}{(D_u(x,y)+u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}}=\frac{2(1-u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}}{D_u(x,y)^{\theta}}\left(1+\frac{\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})}-\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}{1+\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}\right)^{\theta}$$

当 $u\to 0^+$ 时，由泰勒展开式得

$$C_u(x,y)=\frac{2(1-u^{\frac{1}{\theta}})^{\theta}}{D_u(x,y)^{\theta}}\left(1+\theta\left(\frac{\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})}-\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}{1+\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}\right)+o(u^{\frac{1}{\theta}})\right)$$

并且

$$\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))=\theta\left(-\frac{u^{\frac{1}{\theta}}}{2^{\frac{1}{\theta}}(x^{-1}+y^{-1}-1)^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})}+\frac{u^{\frac{1}{\theta}}}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})}\right)$$

令 $B(u)=\theta\left(\dfrac{\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u^{\frac{1}{\theta}})}-\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}{1+\dfrac{u^{\frac{1}{\theta}}}{D_u(x,y)}}\right)$，当 $u\to 0^+$ 时，$D_u(x,y)\to 2^{\frac{1}{\theta}}(x^{-1}+y^{-1}-1)^{\frac{1}{\theta}}$，则有

$$B(u)\sim\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))$$

且

$$C_u(x,y)=C^{Cl,\alpha}(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u))))(1+B(u)(1+o(1)))$$

与定理的结论一致.

例 2 给定阿基米德 Copula C 的生成元 $\psi(t)=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^{\theta}$，$\alpha=\theta$，$\beta=1$，可以得到 $\psi\in 2RV_{-\theta,1}(0^+)$，辅助函数 $A(t)=\dfrac{\theta t}{t-1}$，$\psi^{-1}(t)=(t^{\frac{1}{\theta}}+1)^{-1}$.

$$C_u(x,y)=\frac{\psi^{-1}(\psi(x\psi^{-1}(2\psi(u)))+\psi(y\psi^{-1}(2\psi(u)))-2\psi(u))}{\psi^{-1}(2\psi(u))} \tag{15}$$

令

$$D(u)=((x^{-1}(2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)+u)-u)^{\theta}+(y^{-1}(2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)+u)-u)^{\theta}-2(1-u)^{\theta})^{\frac{1}{\theta}}$$

将 ψ 和 ψ^{-1} 的具体表达式代入(15)式得

$$C_u(x,y)=\frac{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)+u}{D(u)+u}=\frac{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)\left(1+\dfrac{u}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}\right)}{D(u)\left(1+\dfrac{u}{D(u)}\right)}$$

当 $u\to 0^+$ 时，由泰勒展开式得，

$$C_u(x,y)=\frac{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}{D(u)}\left(1+\frac{u}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}-\frac{u}{D(u)}+o(u)\right)$$

并且，

$$\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))=\frac{u}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}-\frac{u}{2^{\frac{1}{\theta}}(x^{-\theta}+y^{-\theta}-1)^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}$$

令

$$B(u)=\frac{u}{2^{\frac{1}{\theta}}(1-u)}-\frac{u}{D(u)}$$

当 $u\to 0^+$ 时，$D(u)\to 2^{\frac{1}{\theta}}(x^{-\theta}+y^{-\theta}-1)^{\frac{1}{\theta}}$，则有

$$B(u)\sim\frac{1}{\alpha\beta}(A\circ\psi^{-1}(2(x^{-\alpha}+y^{-\alpha}-1)\psi(u))-A\circ\psi^{-1}(2\psi(u)))$$

且

$$C_u(x,y)=C^{Cl,\alpha}(1+o(A\circ\psi^{-1}(2\psi(u))))(1+B(u)(1+o(1)))$$

与定理的结论一致.

参考文献：

[1] SKLAR A A. Function de Repartition an Dimensions et Leurs Marges，Vol 8 [M]. Paris：Publications del'Institute Statistique de I' Universite Paris，1959.
[2] FREES E W，VALDEZ E A. Understanding Relationships Using Copulas [J]. North American Actuarial Journal，1998，2(1)：1-25.
[3] CHARPENTIER A，SEGERS J. Tails of Multivariate Archimedean Copulas [J]. Journal of Multivariate Analysis，2009，100(7)：1521-1537.
[4] JAWORSKI P，DURANTE F，HAERDLE W K，et al. Copula Theory and Its Applications [M]. New York：Springer，2010.
[5] NELSEN R B. An Introduction to Copulas [M]. New York：Springer，1999.
[6] JOE H. Multivariate Models and Multivariate Dependence Concepts [M]. Florida：CRC press，1997.
[7] JURI A，WÜTHRICH M V. Copula Convergence Theorems for Tail Events [J]. Insurance：Mathematics and Economics，2002，30(3)：405-420.
[8] JURI A，WÜTHRICH M V. Tail Dependence from a Distributional Point of View [J]. Extremes，2003，6(3)：213-246.
[9] JOE H. Parametric Families of Multivariate Distributions with Given Margins [J]. Journal of Multivariate Analysis，1993，46(2)：262-282.
[10] HAAN L，FERREIRA A. Extreme Value Theory：An Introduction [M]. New York：Springer，2006.
[11] RESNICK S I. Extreme Values，Regular Variation，and Point Processes [M]. New York：Springer，1987.
[12] RESNICK S，DE HAAN L. Second-Order Regular Variation and Rates of Convergence in Extreme-Value Theory [J]. The Annals of Probability，1996，24(1)：97-124.
[13] BINGHAM N H，GOLDIE C M，TEUGELS J L. Regular variation [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1987.
[14] LV W H，MAO T T，HU T Z. Properties of Second-Order Regular Variation and Expansions for Risk Concentration [J]. Probability in the Engineering and Informational Sciences，2012，26(4)：535-559.
[15] PAN X Q，LENG X，HU T Z. The Second-Order Version of Karamata's Theorem with Applications [J]. Statistics & Probability Letters，2013，83(5)：1397-1403.

责任编辑　张枸