DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.07.005

同阶子群个数之集为$\{1, 3, p+1\}$的有限群①

龙雯， 晏燕雄

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 设 G 是有限群，$n(G)$表示同阶子群个数组成的集合. 本文刻画了 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$时有限群 G 的结构，其中 p 为奇素数.

关 键 词： 有限群；子群的个数；Sylow 子群；群结构

中图分类号： O152.1 **文献标志码：** A **文章编号：** 1000-5471(2023)07-0036-03

Finite Groups Whose Set of Numbers of Subgroups of Possible Order is $\{1,3,p+1\}$

LONG Wen, YAN Yanxiong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: Let G be a finite group, and $n(G)$ denotes the set of the number of subgroups of possible order of G. In this paper, authors characterize the structure of finite groups with $n(G)=\{1, 3, p+1\}$, where p is an odd prime.

Key words: finite group; the number of subgroups; Sylow subgroup; the structure of finite groups

本文所涉及的群都是有限群. 设 G 是有限群，$n(G)$ 表示同阶子群个数组成的集合，$\pi(G)$ 为 $|G|$ 的素因子的集合，n_p 为 G 的 Sylow p-子群的个数，其中 $p \in \pi(G)$. 众所周知，有限群的数量性质与群结构的关系一直是群论研究领域的热点，许多群论学者从事过相关研究并取得了较好的研究成果. 例如，文献[1]得到了同阶子群个数小于或等于3的有限群的结构，并证明了不存在同阶子群个数之集为$\{1, 2\}$的有限群；文献[2]给出了同阶交换子群个数之集为$\{1, 3\}$的有限群的结构；文献[3-4]研究了同阶子群个数之集恰好包含 2 个元素的情形；文献[5]讨论了 $n(G)=\{1, 3, 4\}$ 的有限群 G 的结构. 对于任意给定的 $n(G)$，目前尚未有一般性方法对群 G 给出完整刻画. 本文继续该问题的研究，并研究同阶子群个数之集包含 3 个元素的情形，主要结论如下：

定理 1 设 G 是有限群，$n(G)=\{1, 3, p+1\}$，且 $|G|=2^{\alpha}p^{\beta}q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$，其中 p 为奇素数，$q_i \in \pi(G)$，$q_i \neq 2,p$，这里α,β为非负整数，α_i,n 均为正整数，$i=1,2,\cdots,n$. 令 $P_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，

① 收稿日期：2023-01-05
基金项目：国家自然科学基金项目(11971391；12071376)；重庆市自然科学基金项目(cstc2021jcyj-msxmX0426)；中央高校基本业务费项目(XDJK2019B030).
作者简介：龙雯，硕士研究生，主要从事有限群的研究.
通信作者：晏燕雄，副教授.

则 P_2，P 在 G 中不同时正规，其中 $\alpha>0$，$\beta>0$，并且满足如下性质：

(i) G 的 Sylow q_i -子群 Q_i 循环且 $Q_i \trianglelefteq G$，$i=1,2,\cdots,n$；

(ii) 当 P 循环时，$n_p=p+1$；

(iii) 当 P 不循环时，$P \trianglelefteq G$ 且 P 同构于 $C_{p^{\beta-1}} \times C_p(\beta \geqslant 2)$ 或 $\langle a, b \mid a^{p^{\beta-1}}=b^p=1, b^{-1}ab=a^{1+p^{\beta-2}}\rangle(\beta \geqslant 3)$；

(iv) 当 P_2 循环时，$n_2=3$；

(v) 当 P_2 不循环时，$P_2 \trianglelefteq G$ 且 P_2 同构于下述群之一：$C_{2^{\alpha-1}} \times C_2(\alpha \geqslant 2)$，$\langle a, b \mid a^{2^{\alpha-1}}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{\alpha-2}}\rangle(\alpha \geqslant 4)$，$Q_8$.

为证明定理 1，需用到如下引理：

引理 1[6]　设 G 是 p -群且 $|G|=p^n$，$S_k(G)$ 是 G 的 p^k 阶子群的个数$(0 \leqslant k \leqslant n)$，则 $S_k(G) \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

引理 2[7]　设 G 是 p -群，则：

(i) $G/\Phi(G)$ 是初等交换群；

(ii) 如果 $|G/\Phi(G)|=p^n$，则存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n \in G$，使得 $G=\langle x_1,x_2,\cdots,x_n\rangle$.

引理 3[8]　设 G 是 p -群且 $n(G)=\{1, p+1\}$，则 G 同构于下述群之一：

(i) Q_8；

(ii) $C_{p^{n-1}} \times C_p$，其中 $n \geqslant 2$；

(iii) $\langle a, b \mid a^{p^{n-1}}=b^p=1, b^{-1}ab=a^{1+p^{n-2}}\rangle$，其中 $p \neq 2$，$n \geqslant 3$；

(iv) $\langle a, b \mid a^{2^{n-1}}=b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{n-2}}\rangle$，其中 $n \geqslant 4$.

定理 1 的证明

令 $P_2 \in \mathrm{Syl}_2(G)$，$P \in \mathrm{Syl}_p(G)$，以下将分 4 种情形给出证明：

情形 1　若 $\alpha>0$，$\beta>0$，则 $|G|=2^\alpha p^\beta q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_n^{\alpha_n}$. 下面再分 4 步讨论：

步骤 1.1　G 的 Sylow q_i -子群 Q_i 循环且 $Q_i \trianglelefteq G$，其中 $q_i \neq 2,p$，p 为奇素数.

由 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$ 及 Sylow 定理知 G 有唯一的 Sylow q_i -子群，即 $Q_i \trianglelefteq G$. 若 Q_i 非循环，因为 $Q_i/\Phi(Q_i)$ 含有(q_i, q_i) -型初等交换群，则 Q_i 至少含有 q_i+1 个极大子群. 由引理 1 知，这类子群的个数至少有 $1+kq_i$ 个，其中 $k \geqslant 1$. 显然，$1+kq_i \neq p+1$，矛盾. 从而 Q_i 循环且正规于 G.

步骤 1.2　P 循环或 P 同构于 $C_{p^{\beta-1}} \times C_p(\beta \geqslant 2)$ 或 $\langle a, b \mid a^{p^{\beta-1}}=1, b^p=1, b^{-1}ab=a^{1+p^{\beta-2}}\rangle(\beta \geqslant 3)$.

若 P 循环，则 P 的各阶子群只有 1 个，因而 $n_p=1,p+1$.

若 P 不循环，则 $P \trianglelefteq G$. 否则，$P/\Phi(P)$ 含有(p, p) -型初等交换群，即 P 至少含有 $p+1$ 个极大子群，由 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$ 及引理 1 知 P 恰含有 $p+1$ 个极大子群，而 $n_p=p+1$，于是所有 Sylow p -子群有多于 $p+1$ 个不同的极大子群，矛盾. 故 $P \trianglelefteq G$. 由于 $S_k(P) \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$，知 $n(P)=\{1, p+1\}$. 于是由引理 3 得 P 同构于 $C_{p^{\beta-1}} \times C_p(\beta \geqslant 2)$ 或 $\langle a, b \mid a^{p^{\beta-1}}=1, b^p=1, b^{-1}ab=a^{1+p^{\beta-2}}\rangle(\beta \geqslant 3)$.

步骤 1.3　P_2 循环或 P_2 同构于下述群之一：$C_{2^{\alpha-1}} \times C_2(\alpha \geqslant 2)$，$\langle a, b \mid a^{2^{\alpha-1}}=1, b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{\alpha-2}}\rangle(\alpha \geqslant 4)$，$Q_8$.

若 P_2 循环，则 P_2 的各阶子群只有 1 个，因而 $n_3=1,3$.

若 P_2 不循环，则 $P_2 \trianglelefteq G$. 否则，$P_2/\Phi(P_2)$ 含有$(2, 2)$ -型初等交换群，即 P_2 至少含有 3 个极大子群，由 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$ 及引理 1 知 P_2 恰含有 3 个极大子群，而 $n_3=3$，于是所有 Sylow 2 -子群至少含有 6 个不同的极大子群. 由引理 1 知，这类子群个数为 $1+2t \geqslant 6$ 且为奇数，矛盾. 故 $P_2 \trianglelefteq G$. 由 $S_k(P_2) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)$，知 $n(P_2)=\{1, 3\}$. 于是由引理 3 得 P_2 同构于 $C_{2^{\alpha-1}} \times C_2(\alpha \geqslant 2)$，$\langle a, b \mid a^{2^{\alpha-1}}=1, b^2=1, b^{-1}ab=a^{1+2^{\alpha-2}}\rangle(\alpha \geqslant 4)$ 或 Q_8.

步骤 1.4　P_2，P 在 G 中不可能全都正规.

易知，当 $q \neq 2,p$ 时，G 的所有 Sylow q -子群都循环且正规. 故只需讨论 G 的 Sylow 2 -子群 P_2 与

Sylow p -子群 P，再分 3 种情形讨论：

若 P_2,P 都循环且正规，则 G 循环，$n(G)=\{1\}$，矛盾.

若 P_2,P 有且只有一个循环但都正规. 当 P_2 循环且正规时，由步骤 1.2 推知，$n(G)=\{1, p+1\}$，矛盾于 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$；当 P 循环且正规时，由步骤 1.3 推知，$n(G)=\{1, 3\}$，这与$n(G)=\{1, 3, p+1\}$ 矛盾.

若 P_2,P 都不循环. 由步骤1.2与步骤1.3知，$P_2 \trianglelefteq G$，$P \trianglelefteq G$. 则 $P_2P = P_2 \times P \leqslant G = P_2 \times P \times Q_1 \times \cdots \times Q_n$. 若 $P_2 \ncong Q_8$，因为 G 中含有 2 阶子群与 p 阶子群，所以 G 中必含有 $2p$ 阶子群，且 $2p$ 阶子群个数为$3(p+1)$，矛盾于 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$；若 $P_2 \cong Q_8$，因为 Q_8 有 1 个 2 阶子群，3 个 4 阶子群，所以 G 中含有 4 阶子群与 p 阶子群. 故 G 中必含有 $4p$ 阶子群，且 $4p$ 阶子群个数为 $3(p+1)$，这与 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$ 矛盾. 于是 P_2,P 在 G 中不能全部正规.

情形 2　若 $\alpha>0$，$\beta=0$，则 $|G|=2^{\alpha}q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$. 由步骤 1.1 与步骤 1.3 知，$n(G)=\{1, 3\}$，矛盾于 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$.

情形 3　若 $\alpha=0$，$\beta>0$，则 $|G|=p^{\beta}q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$. 由步骤 1.1 与步骤 1.2 知，$n(G)=\{1, p+1\}$，矛盾于 $n(G)=\{1, 3, p+1\}$.

情形 4　若 $\alpha=0$，$\beta=0$，则 $|G|=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}\cdots q_n^{\alpha_n}$. 由步骤 1.1 知，$G$ 循环，矛盾.

由此可知 $\alpha>0$，$\beta>0$. 证毕.

推论 1　设 G 是有限群，若 G 满足定理 1 的条件，则 G 非幂零.

这是因为若 G 幂零，则 G 的所有 Sylow -子群都正规，显然矛盾. 于是推论 1 成立.

参考文献：

[1] CHEN Y H, JIANG Y Y, JIA S F. Finite Groups in which the Number of Subgroups of Possible Order is Less Than or Equal 3 [J]. International Journal of Algebra, 2011, 5(24): 1207-1212.

[2] 钱焱，陈贵云. 同阶交换子群个数之集为{1，3}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(10)：100-104.

[3] CHEN Y H, CHEN G Y. Finite Groups with the Set of the Number of Subgroups of Possible Order Containing Exactly Two Elements [J]. Proceedings-Mathematical Sciences, 2013, 123(4): 491-498.

[4] SHAO C G, JIANG Q H. Finite Groups Whose Set of Numbers of Subgroups of Possible Order has Exactly 2 Elements [J]. Czechoslovak Mathematical Journal, 2014, 64(3): 827-831.

[5] 李春艳，陈贵云. 同阶子群个数之集为{1，3，4}的有限群 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2017，39(6)：54-59.

[6] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京：科学出版社，1987：157.

[7] HUPPERT B. 有限群论 [M]. 姜豪，俞曙霞，译. 福州：福建人民出版社，1992.

[8] 陈彦恒，贾松芳. 同阶子群个数的集合为{1，$p+1$}的有限群的完全分类 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2010，35(3)：1-3.

责任编辑　廖坤