DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.07.006

一类非线性二阶半正周期问题正解的存在性[①]

王晶璇

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要: 本文研究了非线性二阶半正周期问题

$$\begin{cases} -u''(t)+a(t)u(t)=\lambda g(t)(f(u)+\omega(t)) & t\in(0,1) \\ u(0)=u(1) \\ u'(0)=u'(1) \end{cases}$$

正解的存在性，其中 λ 为正参数，$a:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$，$g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ 均为连续函数，ω 是$[0,1]$上的连续函数且 $|\omega(t)|\leqslant k$，$f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 为连续函数且满足 $f_0=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=0$，$f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$. 运用锥上不动点定理证明了：存在常数 $\lambda_*>0$，使得对于 $\lambda\in(0,\lambda_*)$，该问题至少有一个正解.

关 键 词: 正解；半正问题；周期边界条件；锥上不动点定理

中图分类号: O175.8；O175.14　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1000-5471(2023)07-0039-07

Existence of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Second-Order Semi-Positive Periodic Problems

WANG Jingxuan

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China

Abstract: In this paper, we investigate the existence of positive solutions of the nonlinear second-order semi-positive periodic problems

$$\begin{cases} -u''(t)+a(t)u(t)=\lambda g(t)(f(u)+\omega(t)) & t\in(0,1) \\ u(0)=u(1) \\ u'(0)=u'(1) \end{cases}$$

where λ is a positive parameter, $a:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ and $g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ are continuous functions, ω is a continuous function defined on $[0,1]$ with $|\omega(t)|\leqslant k$, $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ is a continuous function and satisfies $f_0=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=0$, $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$. By using the fixed point theorem in cones, we show that there exists a constant $\lambda_*>0$, such that the problem has at least one positive solution for $\lambda\in(0,\lambda_*)$.

Key words: positive solution; semi-positive problem; periodic boundary conditions; fixed point theorem in cones

---

① 收稿日期：2023-01-12
基金项目：国家自然科学基金项目(12061064).
作者简介：王晶璇，硕士研究生，主要从事常微分方程边值问题的研究.

近年来，二阶微分方程边值问题受到许多学者的关注[1-14]. 特别地，自然界中存在着大量的周期现象且这些周期现象可以通过二阶微分方程周期边值问题[3-14] 来刻画. 比如文献[5] 研究了二阶周期边值问题

$$\begin{cases} y''(t)-a^2y+\lambda g(t)f(y)=0 & t\in[0,2\pi] \\ y(0)=y(2\pi) \\ y'(0)=y'(2\pi) \end{cases} \tag{1}$$

正解的存在性，其中 $a>0$，λ 是一个正参数，并且满足条件：

(A1) $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 是连续函数，且满足当 $u>0$ 时，$f(u)>0$；

(A2) $g:[0,2\pi]\longrightarrow[0,\infty)$ 是连续函数，且满足 $\int_0^{2\pi}g(t)\mathrm{d}t>0$.

文献[5] 运用锥上不动点定理，得到了：

引理 1[5] 假定条件(A1)-(A2)成立，且 $f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$，则存在 $\lambda_0>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_0$ 时，问题(1)有一个正解.

值得注意的是，文献[5] 研究了非线性项 f 非负的情况下问题(1)正解的存在性，且 a 为常数. 受上述文献启发，本文考虑比问题(1)更广泛的问题. 具体地，本文研究二阶周期半正问题

$$\begin{cases} -u''(t)+a(t)u(t)=\lambda g(t)(f(u)+\omega(t)) & t\in(0,1) \\ u(0)=u(1) \\ u'(0)=u'(1) \end{cases} \tag{2}$$

正解的存在性，其中 λ 是一个正参数. 我们得到如下结论：

定理 1 假定以下条件成立：

(H1) $f:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 是一个连续函数，且 $f_0=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=0$，$f_\infty=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$；

(H2) $g:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ 是一个连续函数，且满足 $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t>0$；

(H3) $a:[0,1]\longrightarrow[0,\infty)$ 是一个连续函数；

(H4) ω 是 $[0,1]$ 上的连续函数，且 $|\omega(t)|\leqslant k$.

则存在常数 $\lambda_*>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，问题(2)至少存在一个正解 u_λ.

注 1 当 $\omega=0$ 时，定理 1 就退化为引理 1 的结果. 然而，我们所要研究的是允许 $|\omega|\neq 0$ 的情形，允许非线性项取负值的情况下正解的存在性结果. 因此，我们所得的结果是对引理 1 的推广.

1 预备知识

令空间 $E=C[0,1]$，其在范数 $\|u\|=\max\limits_{t\in[0,1]}|u|$ 下构成 Banach 空间. 定义线性算子 $L:D(L)\subset E\longrightarrow E$ 为

$$Lu=-u''+a(t)u \qquad u\in D(L)$$

其中

$$D(L)=\{u\in C^2[0,1]:u(0)=u(1),\ u'(0)=u'(1)\}$$

引理 2[15-16](锥拉伸与压缩不动点定理) 设 E 是一个 Banach 空间，且 K 是 E 中的一个锥. 假设 Ω_1，Ω_2 是 E 的有界开子集，且有 $0\in\Omega_1$，$\overline{\Omega_1}\subset\Omega_2$. 令

$$A:K\cap(\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)\longrightarrow K$$

是全连续算子，且满足

(i) $\|Au\|\leqslant\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\geqslant\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_2$；

或

(ii) $\|Au\|\geqslant\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_1$ 且 $\|Au\|\leqslant\|u\|$，$u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则 A 在 $K \cap (\overline{\Omega_2} \backslash \Omega_1)$ 中有一个不动点.

定义 $u(x)$,$v(x)$ 是齐次方程

$$-y'' + a(t)y = 0 \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

满足初值条件

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 0$$

的解. 且定义

$$D = u(1) + v'(1) - 2$$

根据文献[6]中的定理 2.5，下述引理成立：

引理 3 假设条件(H3)成立且 h 为非负连续函数，则线性问题

$$\begin{cases} -u''(t) + a(t)u(t) = h(t) & t \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

存在唯一解

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)\mathrm{d}s$$

其中

$$G(t, s) = \frac{v(1)}{D}u(t)u(s) - \frac{u'(1)}{D}v(t)v(s) + \begin{cases} \dfrac{v'(1)-1}{D}u(t)v(s) - \dfrac{u(1)-1}{D}u(s)v(t) & 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \dfrac{v'(1)-1}{D}u(s)v(t) - \dfrac{u(1)-1}{D}u(t)v(s) & 0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

且 $G(t, s) > 0$，$\forall t, s \in [0, 1]$.

令

$$m = \min_{0 \leqslant t \leqslant 1} G(t, s) \qquad M = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} G(t, s)$$

则 $m > 0$，$M > 0$.

由于 $g(t)$ 是$[0, 1]$上的连续函数，则 $g(t)$ 在$[0, 1]$上有上界，记为 T，即 $0 < g(t) \leqslant T$.

引理 4 令 w 是

$$\begin{cases} -u''(t) + a(t)u(t) = h(t) & t \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) \\ u'(0) = u'(1) \end{cases}$$

的唯一解，则 $w(t) \geqslant \dfrac{m}{M} \| w \|$.

证 由引理 3 知

$$w(t) = \int_0^1 G(t, s)h(s)\mathrm{d}s$$

则

$$w(t) \geqslant m\int_0^1 h(s)\mathrm{d}s = m\int_0^1 \frac{G(t, s)}{G(t, s)}h(s)\mathrm{d}s \geqslant \frac{m}{M}\int_0^1 G(t, s)h(s)\mathrm{d}s = \frac{m}{M}w(t)$$

从而 $w(t) \geqslant \frac{m}{M}\|w\|$.

引理 5 令 $u \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$，满足

$$\begin{cases}-u''(t)+a(t)u(t) \geqslant -kT & t \in (0,1)\\ u(0)=u(1)\\ u'(0)=u'(1)\end{cases}$$

假设 $\|u\| > \frac{M(m+M)}{m}kT$，则 $u \geqslant 0$，且

$$u(t) \geqslant \frac{m}{M}\left(\|u\| - \frac{M(m+M)}{m}kT\right)$$

证 令 $v_0(t)$ 是微分方程

$$\begin{cases}-u''(t)+a(t)u(t) = -kT & t \in (0,1)\\ u(0)=u(1)\\ u'(0)=u'(1)\end{cases}$$

的唯一解，则

$$-v_0(t)=\int_0^1 G(t,s)kT\mathrm{d}s \leqslant MkT$$

即 $-v_0(t) \leqslant MkT$，则 $v_0(t) \geqslant -MkT$.

令 $y(t)=u(t)-v_0(t)$，则

$$\begin{cases}-y''(t)+a(t)y \geqslant 0 & t \in (0,1)\\ y(0) \geqslant y(1)\\ y'(0) \geqslant y'(1)\end{cases}$$

由引理 4 可知 $y(t) \geqslant \frac{m}{M}\|y\|$，则有

$$\begin{aligned} u(t)=y(t)+v_0(t) \geqslant &\\ &\frac{m}{M}\|y\| - MkT = \\ &\frac{m}{M}\|u-v_0\| - MkT \geqslant \\ &\frac{m}{M}(\|u\| - \|-v_0\|) - MkT \geqslant \\ &\frac{m}{M}(\|u\| - MkT) - MkT = \\ &\frac{m}{M}\left(\|u\| - MkT - \frac{M^2}{m}kT\right) = \\ &\frac{m}{M}\left(\|u\| - \left(M+\frac{M^2}{m}\right)kT\right) = \\ &\frac{m}{M}\left(\|u\| - \frac{M(m+M)}{m}kT\right)\end{aligned}$$

2 主要结果的证明

定理 1 的证明 问题(2) 的等价积分形式为

$$u(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)[f(u(s))+\omega(s)]\mathrm{d}s=Au \tag{3}$$

定义 E 中的集合

$$K=\left\{u\in E:u(t)\geqslant 0,\ u(t)\geqslant\frac{m}{M}\left(\|u\|-\lambda\frac{M(m+M)}{m}kT\right),\ t\in(0,1)\right\}$$

其中

$$\|u\|\geqslant\lambda\frac{M(m+M)}{m}kT$$

则 K 为 E 中的一个正锥.

若 $u\in K$，结合引理 5 和(3) 式可知

$$\begin{aligned}Au(t)=&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s)+k)\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 Mg(s)(f(u(s))+\omega(s)+k)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Au(t)=&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s))\mathrm{d}s=\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s)+k-k)\mathrm{d}s=\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s)+k)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)k\,\mathrm{d}s\geqslant\\&\lambda m\int_0^1 g(s)(f(u(s))+\omega(s)+k)\mathrm{d}s-\lambda\int_0^1(m+M)Tk\,\mathrm{d}s=\\&\lambda\frac{m}{M}\int_0^1 Mg(s)(f(u(s))+\omega(s)+k)\mathrm{d}s-\lambda\frac{m}{M}\frac{M(m+M)}{m}Tk\geqslant\\&\frac{m}{M}\left(\|Au\|-\lambda\frac{M(m+M)}{m}kT\right)\qquad t\in[0,1]\end{aligned}$$

因此 $A(K)\subset K$. 此外，由 Arzèla-Ascoli 定理可得，$A:K\longrightarrow K$ 是全连续的.

令 $a>1$，有

$$f(z)+\omega(t)>0\qquad z\geqslant a,\ t\in(0,1)$$

因为 $f_0=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(u)}{u}=0$，则对 $\forall\eta>0$，存在 $H_1>0$，使得当 $a<u\leqslant H_1$ 时，有 $f(u)\leqslant\eta u$，且满足

$$\lambda(\eta+k)\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\leqslant 1\tag{4}$$

即

$$\lambda\leqslant\left[(\eta+k)\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\right]^{-1}=\lambda_*$$

因此，如果 $u\in K$ 且 $\|u\|=H_1$，则由(3)，(4) 式得

$$\begin{aligned}Au(t)=&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s))\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(\eta u+k)\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(\eta u+ku)\mathrm{d}s\leqslant\\&\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(\eta\|u\|+k\|u\|)\mathrm{d}s=\\&\lambda(\eta+k)\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s\,\|u\|\leqslant\|u\|\end{aligned}$$

令

$$\Omega_1=\{u\in E:\|u\|<H_1\}$$

则有

$$\| Au \| \leqslant \| u \| \qquad u \in K \cap \partial\Omega_1 \tag{5}$$

因为 $f_{\infty}=\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{f(u)}{u}=\infty$，则 $\forall \mu>0$，存在 $\hat{H}_2>0$，使得当 $u \geqslant \hat{H}_2$ 时，有 $\mu u \leqslant f(u)+\omega(t)$，且满足

$$\lambda\mu \frac{m}{M}\int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s \geqslant 1 \tag{6}$$

令

$$H_2=\max\left\{2H_1,\ \frac{M\hat{H}_2}{m}\right\}$$

$$\Omega_2=\{u \in E:\ \| u \| < H_2\}$$

则有 $u \in K$ 且 $\| u \| = H_2$，则

$$u(t) \geqslant \frac{m}{M}\| u \| \geqslant \hat{H}_2 \tag{7}$$

因此，由(6)式和(7)式得

$$Au(t)=\lambda\int_0^1 G(t,s)g(s)(f(u(s))+\omega(s))\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\lambda\mu\int_0^1 G(t,s)g(s)u\mathrm{d}s \geqslant$$

$$\lambda\mu\frac{m}{M}\| u \| \int_0^1 G(t,s)g(s)\mathrm{d}s \geqslant \| u \|$$

因此

$$\| Au \| \geqslant \| u \| \qquad u \in K \cap \partial\Omega_2 \tag{8}$$

从而，由(5)，(8)式和引理 2 可知，A 在 $K \cap (\overline{\Omega_2}\backslash\Omega_1)$ 中有一个不动点，使得 $H_1 \leqslant \| u \| \leqslant H_2$. 因此，当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，问题(2)有一个正解 u_λ.

3 应用

例 1 考虑问题

$$\begin{cases} -u''(t)+(t+1)u(t)=\lambda t(u^2+\sin 2\pi t) & t \in (0,1) \\ u(0)=u(1) \\ u'(0)=u'(1) \end{cases} \tag{9}$$

解的存在性，其中 $\lambda>0$.

解 这里取

$$a(t)=t+1 \qquad g(t)=t \qquad f(u)=u^2 \qquad \omega(t)=\sin 2\pi t$$

对于问题(9)而言，显然 f 是连续的非负函数，且有

$$f_0=\lim_{u\to 0}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{u^2}{u}=\lim_{u\to 0}u=0$$

$$f_{\infty}=\lim_{u\to\infty}\frac{f(u)}{u}=\lim_{u\to\infty}\frac{u^2}{u}=\lim_{u\to\infty}u=\infty$$

则 f 满足条件(H1). 又因 $g(t)=t$ 连续，且 $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}>0$，则条件(H2)成立. 因为 $a(t)=t+1$ 为 $[0,1]$ 上的非负函数，则条件(H3)成立. 因为 $\omega(t)=\sin 2\pi t$，则 $|\omega(t)| \leqslant 1$，从而条件(H4)成立.

根据定理 1 可得，存在常数 $\lambda_*>0$，使得当 $0<\lambda<\lambda_*$ 时，问题(9)至少存在一个正解 u_λ.

参考文献：

[1] 李朝倩. 一类格林函数变号的二阶 Neuman 问题正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(12)：43-47.

[2] 杨晓梅，路艳琼. 一类变系数二阶离散 Neumann 边值问题正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(11)：18-26.

[3] 祝岩. 一类带有变号权函数的二阶系统周期边值问题正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2019，44(8)：39-44.

[4] 马满堂. 一类非线性二阶常微分方程周期问题正解的存在性 [J]. 四川大学学报(自然科学版)，2018，55(4)：693-697.

[5] GRAEF J R，KONG L J，WANG H Y. Existence，Multiplicity，and Dependence on a Parameter for a Periodic Boundary Value Problem [J]. Journal of Differential Equations，2008，245(5)：1185-1197.

[6] GRAEF J R，KONG L J，WANG H Y. A Periodic Boundary Value Problem with Vanishing Green's Function [J]. Applied Mathematics Letters，2008，21(2)：176-180.

[7] ATICI F M，GUSEINOV G S. On The Existence of Positive Solutions for Nonlinear Differential Equations with Periodic Boundary Conditions [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics，2001，132(2)：341-356.

[8] XU J，MA R Y. Bifurcation from Interval and Positive Solutions for Second Order Periodic Boundary Value Oroblems [J]. Applied Mathematics and Computation，2010，216(8)：2463-2471.

[9] 马如云，高承华. 二阶常微分方程周期解的全局分歧 [J]. 数学物理学报，2009，29(5)：1223-1232.

[10] MA R Y，XU J，HAN X L. Global Structure of Positive Solutions for Superlinear Second-Order Periodic Boundary Value Problems [J]. Applied Mathematics and Computation，2012，218(10)：5982-5988.

[11] MA R Y，GAO C H，CHEN R P. Existence of Positive Solutions of Nonlinear Second-Order Periodic Boundary Value Problems [J]. Boundary Value Problems，2010，2010(1)：1-18.

[12] WANG H Y. On the Number of Positive Solutions of Nonlinear Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis Applications，2003，281(1)：287-306.

[13] ZHANG Z X，WANG J Y. On Existence and Multiplicity of Positive Solutions To Periodic Boundary Value Problems for Singular Nonlinear Second-Order Differential Equations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2003，281(1)：99-107.

[14] JIANG D Q，CHU J F，ZHANG M R. Multiplicity of Positive Periodic Solutions to Superlinear Repulsive Singular Equations [J]. Journal of Differential Equations，2005，211(2)：282-302.

[15] DEIMLING K. Nonlinear Functional Analysis [M]. Berlin：Springer，1985.

[16] 郭大钧. 非线性泛函分析 [M]. 3 版. 北京：高等教育出版社，2015.

责任编辑　廖坤