DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.07.008

随机 Zakharov 格点方程的后向紧随机吸引子①

张琳，　李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要： 在对外力后向缓增的假设条件下，通过对解的估计，首先证明了具有乘法噪音的随机 Zakharov 格点方程在空间 $E=l^2\times l^2\times \ell^2$ 上存在后向紧一致吸收集，再证明了由该方程生成的随机动力系统在吸收集上是后向渐进紧的. 最后利用后向紧吸引子的存在性定理，证明了该随机 Zakharov 格点方程在空间 $E=l^2\times l^2\times \ell^2$ 上存在后向紧随机吸引子.

关　键　词： Zakharov 格点方程；乘性噪音；后向紧随机吸引子

中图分类号： O193　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 1000－5471(2023)07－0053－07

Backward Compact Random Attractors for Stochastic Zakharov Lattice Equation

ZHANG Lin，　LI Yangrong

School of Mathematics and Statistics，Southwest University，Chongqing 400715，China

Abstract: When the external force is backward tempered, by estimating the solution, it is first proved that the random Zakharov lattice equation with multiplicative noise has backward compact uniformly absorbing set on the space $E=l^2\times l^2\times \ell^2$, then it is proved that the random dynamical system generated by this equation is backward asymptotically compact on the absorbing set. Finally, by the Existence theorem of backward compact attractors, it is proved that there exists a backward compact random attractor for the stochastic Zakharov lattice equation in the space $E=l^2\times l^2\times \ell^2$.

Key words: Zakharov lattice equations; multiplicative noise; backward compact random attractors

若随机吸引子的后向并是预紧的，则称该吸引子为后向紧随机吸引子. 文献[1-6]研究了吸引子的存在性以及吸引子的后向紧性，并建立了相对完善的理论体系. 文献[7-11]对随机 Zakharov 格点方程的吸引子进行了研究. 本文将在文献[10]的基础上，研究带有乘法噪音的随机 Zakharov 格点方程的后向紧吸引子的存在性.

---

① 收稿日期：2022－11－25

基金项目：国家自然科学基金项目(12271444).

作者简介：张琳，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授.

1 非自治随机动力系统

本文将在 $l^2 \times \ell^2$ 空间上讨论如下带有乘法噪音的非自治随机 Zakharov 格点方程:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{d}\dot{u}_k + \alpha \mathrm{d}u_k + (A(u + |\tilde{v}|^2))_k \mathrm{d}t + \beta u_k \mathrm{d}t = g_k(t)\mathrm{d}t + a u_k \circ \mathrm{d}W_1(t) \\ \mathrm{i}\mathrm{d}\tilde{v}_k - ((A\tilde{v})_k + u_k \tilde{v}_k - \mathrm{i}\gamma \tilde{v}_k)\mathrm{d}t = h_k(t)\mathrm{d}t + b\tilde{v}_k \circ \mathrm{d}W_2(t) \\ u_k(\tau) = u_{0,k},\ \dot{u}_k(\tau) = u_{1,k},\ \tilde{v}_k(\tau) = \tilde{v}_{0,k} \qquad \tau \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\end{cases} \tag{1}$$

其中 $\alpha, \lambda, \beta, \gamma > 0$, $\mathbb{Z}$ 是整数集

$$u_k = u_k(t) \in \mathbb{R} \qquad \tilde{v}_k = \tilde{v}_k(t) \in \mathbb{C} \qquad u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}} \qquad |\tilde{v}|^2 = (|\tilde{v}_k|^2)_{k \in \mathbb{Z}}$$

(W_1, W_2) 是定义在度量动力系统$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, \{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}})$上相互独立的双边实值维纳过程,其中

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}): \omega_1(0) = \omega_2 = 0\}$$

$\mathscr{F}$ 是 Ω 上由紧开拓扑生成的 Borel σ -代数,$\mathbb{P}$ 是$(\Omega, \mathscr{F})$上的维纳测度. 在 Ω 上定义映射族

$$\{\theta_t\}_{t \in \mathbb{R}}: \theta_t \omega(\cdot) = \omega(\cdot + t) - \omega(t) \qquad (\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

$\circ$ 表示 Stratonovich 积分意义下的乘法噪声. 对于外力项

$$g(t) = (g_k(t))_{k \in \mathbb{Z}} \qquad h(t) = (h_k(t))_{k \in \mathbb{Z}}$$

有如下假设:

(F1) $g \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, l^2)$ 是后向缓增的,满足

$$\sup_{s \leqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\eta(r-s)} \|g(r)\|^2 \mathrm{d}r < \infty \qquad \forall \eta > 0,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{2}$$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{s \leqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\eta(r-s)} \sum_{|k| \geqslant n} |g_k(r)|^2 \mathrm{d}r = 0 \qquad \forall s, \tau \in \mathbb{R} \tag{3}$$

(F2) $h \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, \ell^2)$ 是后向缓增的,满足

$$\sup_{s \leqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\eta(r-s)} \|h(r)\|^2 \mathrm{d}r < \infty \qquad \forall \eta > 0,\ \tau \in \mathbb{R} \tag{4}$$

$$\lim_{k \to \infty} \sup_{s \leqslant \tau} \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\eta(r-s)} \sum_{|k| \geqslant n} |h_k(r)|^2 \mathrm{d}r = 0 \qquad \forall s, \tau \in \mathbb{R} \tag{5}$$

(F3) $2\mu > \dfrac{4a\lambda}{\sqrt{\pi}} + \dfrac{a(\lambda + 2\lambda\varepsilon - \alpha\lambda^2)}{\sqrt{\lambda\beta\pi}} + \dfrac{a^2\lambda^2}{2\sqrt{\lambda\beta}} + \dfrac{2b}{\sqrt{\pi}}$,其中

$$\mu = \min\left\{\sigma, \frac{3}{4}\gamma\right\} \qquad \sigma = \frac{\lambda\alpha\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2\lambda^2 + 4\lambda\beta + \alpha^2\lambda + 4\beta}} < \varepsilon$$

令

$$l^2 = \{b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}: b_k \in \mathbb{R}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^2 < \infty\}$$

$$\ell^2 = \{b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}: b_k \in \mathbb{C}, \sum_{k \in \mathbb{Z}} b_k^2 < \infty\}$$

空间 l^2 或 ℓ^2 上的有界线性算子 A 的定义为

$$(Ab)_k = 2b_k - b_{k+1} - b_{k-1}$$

$$(Bb)_k = u_{k+1} - u_k \qquad (B^* b)_k = b_{k-1} - b_k \qquad b = (b_k)_{k \in \mathbb{Z}}$$

则 $A = B^* B = BB^*$,并且满足 $\|Bb\|^2 \leqslant 4\|b\|^2$.

对任意 $u = (u_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $v = (v_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2, \ell^2$,定义空间 l^2 和 ℓ^2 上的内积和范数分别为

$$(u, v) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_k \bar{v}_k$$

$$\|u\|^2 = (x, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |u_k|^2$$

$$(u, v)_{\lambda\beta} = \lambda(Bu, Bv) + \lambda\beta(u, v)$$

$$\| u \|_{\lambda\beta}^2 = (u, u)_{\lambda\beta} = \lambda \| Bu \|^2 + \lambda \beta \| u \|^2$$

$$(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\varphi}_2) = (u_1, u_2)_{\lambda\beta} + (y_1, y_2) + (v_1, v_2)$$

$$\| \boldsymbol{\varphi} \|_E^2 = \| u \|_{\lambda\beta}^2 + \| y \|^2 + \| v \|^2$$

其中 $\bar{v}$ 与 v 共轭，$E = l_{\lambda\beta}^2 \times l^2 \times \ell^2$，并且 $\| \cdot \|_{\lambda\beta}$ 与 $\| \cdot \|$ 等价.

令

$$y = u_t + \varepsilon u - a\lambda u z_1(\theta_t\omega_1) \qquad v = \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz_2(\theta_t\omega_2)}\tilde{v}$$

其中 $z_1(\theta) = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s \theta_t\omega_1(s)\mathrm{d}s$ 是方程 $\mathrm{d}X + X\mathrm{d}t = \mathrm{d}W_1(t)$ 的解，$z_2(\theta) = -\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^s \theta_t\omega_2(s)\mathrm{d}s$ 是方程 $\mathrm{d}Y + Y\mathrm{d}t = \mathrm{d}W_2(t)$ 的解，$\varepsilon = \dfrac{\alpha\beta\lambda}{\lambda\alpha^2 + 4\beta}$，易得 $|v| = |\hat{v}|$，并且由文献[10]可得，$z_1(\theta_t\omega_1)$，$z_2(\theta_t\omega_2)$ 关于 t 连续，且

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{|z_1(\theta_t\omega_1)|}{|t|} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{|z_1(\theta_t\omega_1)|}{|t|} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\int_0^t z_1(\theta_t\omega_1)\mathrm{d}s}{|t|} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\int_0^t z_2(\theta_t\omega_2)\mathrm{d}s}{|t|} = 0 \tag{6}$$

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{\int_0^t |z_1(\theta_t\omega_1)|\mathrm{d}s}{|t|} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\int_0^t |z_2(\theta_t\omega_2)|\mathrm{d}s}{|t|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \qquad \lim_{t\to\pm\infty} \frac{\int_0^t |z_1(\theta_t\omega_1)|^2\mathrm{d}s}{|t|} = \frac{1}{2} \tag{7}$$

则方程(1)可以转化为以下等价形式：

$$\begin{cases} u_t + \varepsilon u - y = a\lambda u z_1(\theta_t\omega_1) \\ y_t + (\alpha\lambda - \varepsilon)y + (\varepsilon^2 - \alpha\lambda\varepsilon + \lambda\beta)u + \lambda Au = \lambda g - \lambda A|v|^2 - a^2\lambda^2 u z_1^2(\theta_t\omega_1) + \\ (2a\lambda\varepsilon u - a\alpha\lambda^2 u + a\lambda u - a\lambda y)z_1(\theta_t\omega_1) \\ v_t + \mathrm{i}Az + \gamma v = -\mathrm{i}uv - \mathrm{i}h\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz_2(\theta_t\omega_2)} - \mathrm{i}bvz_2(\theta_t\omega_2) \\ u(\tau) = u_0,\ y(\tau) = y_0 = u_1 + \varepsilon u_0 - \alpha\lambda u_0 z_1(\theta_\tau\omega_1),\ v(\tau) = v_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}bz_2(\theta_\tau\omega_2)}\tilde{v}_0 \end{cases} \tag{8}$$

令

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ y \\ v \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} \varepsilon I & -I & 0 \\ (\varepsilon^2 - \alpha\lambda\varepsilon + \lambda\beta)I + \lambda A & (\alpha\lambda - \varepsilon)I & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i}A + \gamma I \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{F}(\theta_t\omega, \boldsymbol{\varphi}) = \begin{pmatrix} a\lambda u z_1(\theta_t\omega_1) \\ \lambda g - \lambda A|v|^2 - a^2\lambda^2 u z_1^2(\theta_t\omega_1) + (2a\lambda\varepsilon u - a\alpha\lambda^2 u + a\lambda u - a\lambda y)z_1(\theta_t\omega_1) \\ -\mathrm{i}uv - \mathrm{i}h\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz_2(\theta_t\omega_2)} - \mathrm{i}bvz_2(\theta_t\omega_2) \end{pmatrix}$$

令 $\boldsymbol{\varphi}_0 = (u_0, y_0, v_0)^{\mathrm{T}}$，则方程(8)可以改写为如下简单矩阵形式：

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}} + \boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{F}(\theta_t\omega, \boldsymbol{\varphi}) \tag{9}$$

由文献[8,10]可知，若假设(F1)－(F3)成立，对 $\forall T > 0$，$\boldsymbol{\varphi}_0 \in E$，方程(8)存在唯一的解 $\boldsymbol{\varphi}(\cdot, \tau, \omega, \boldsymbol{\varphi}_0) \in C([\tau, +\infty), E)$，且依赖于初值 $\boldsymbol{\varphi}_0$ 连续. 因此方程(8)在$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}, \{\theta_t\}_{t\in\mathbb{R}})$上能生成一个连续的随机动力系统$\{\Phi(t)\}$，对 $\boldsymbol{\varphi}_0 \in E$，$t \geqslant 0$，$\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，有

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \tau, \omega, \boldsymbol{\varphi}_0) = \boldsymbol{\varphi}(t + \tau, \tau, \theta_{-\tau}\omega, \boldsymbol{\varphi}_0)$$

可以验证 $\boldsymbol{\Phi}$ 是一个非自治的随机动力系统，即满足

$$\boldsymbol{\Phi}(0, \tau, \omega, \cdot) = \mathrm{id} \qquad \boldsymbol{\Phi}(t + s, \tau, \omega, \cdot) = \boldsymbol{\Phi}(t, \tau + s, \theta_s\omega, \cdot) \circ \boldsymbol{\Phi}(s, \tau, \omega, \cdot)$$

在下文中，设 $\mathscr{D}$ 是 X 中所有后向缓增集构成的集合，若集合 $D \in \mathscr{D}$ 当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\upsilon t} \sup_{s\leqslant\tau} \| D(s-t, \theta_{-t}\omega) \|_X^2 = 0 \qquad \forall \upsilon > 0, \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega \tag{10}$$

则可以证明 $\mathscr{D}$ 是包含封闭的，即若 $A \subset \widetilde{A}$ 且 $\widetilde{A} \in \mathscr{D}$，有 $A \in \mathscr{D}$ 成立.

2 解的估计

引理 1 若假设(F1)-(F3)成立，则对任意后向缓增集 $D \in \mathscr{D}$，$\forall \tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，存在 $T = T(D, \tau, \omega) \geqslant 1$，使得当 $\boldsymbol{\varphi}_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-s}\omega)$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant\tau} \sup_{t\geqslant T} \| \boldsymbol{\varphi}(s, s-t, \theta_{-s}\omega, \boldsymbol{\varphi}_{s-t}) \|_E^2 \leqslant 1 + R(\tau, \omega) \tag{11}$$

其中

$$R(\tau, \omega) = \sup_{s\leqslant\tau} R_0(s, \omega) < +\infty \qquad R_0(s, \omega) = \int_{-t}^0 e^{2\mu r + \int_r^0 G(\theta_\xi\omega)d\xi} f_1(r+s)dr \tag{12}$$

$$f_1(r+s) = \frac{2\lambda}{\alpha} \| g(r+s) \|^2 + \frac{2}{\gamma} \| h(r+s) \|^2 + \frac{64\lambda}{\alpha\gamma^2} \| h(r+s) \|^4$$

证 对任意固定的 $\tau \in \mathbb{R}$，$\omega \in \Omega$，$\boldsymbol{\varphi}_{s-t} \in D(s-t, \theta_{-t}\omega)$，令

$$\boldsymbol{\varphi}(r) = \boldsymbol{\varphi}(r, s-t, \theta_{-s}\omega, \boldsymbol{\varphi}_{s-t})$$

其中 $s \leqslant \tau$. $\boldsymbol{\varphi}(r)$ 与方程(9)作内积，可得

$$\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{\varphi}}(r), \boldsymbol{\varphi}(r))_E + \mathrm{Re}(\boldsymbol{L\varphi}, \boldsymbol{\varphi})_E = \mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\theta_r\omega, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \tag{13}$$

对于(13)式中的每一项，利用 Hölder 不等式以及 Young 不等式，可得

$$\| v(r) \|^2 \leqslant e^{-\frac{3}{2}\gamma r} \| v_{s-t} \|^2 + \frac{2}{\gamma^2} \| h \|^2$$

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{L\varphi}, \boldsymbol{\varphi})_E \geqslant \mu \| \boldsymbol{\varphi} \|^2 + \frac{\alpha\lambda}{2} \| y \|^2 + \frac{\gamma}{4} \| v \|^2 \tag{14}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\theta_r\omega, \boldsymbol{\varphi}), \boldsymbol{\varphi})_E \leqslant & \Big(2a\lambda \mid z_1(\theta_{r-s}\omega_1) \mid + \frac{a \mid \lambda - \alpha\lambda^2 + 2\lambda\varepsilon \mid}{2\sqrt{\lambda\beta}} \mid z_1(\theta_{r-s}\omega_1) \mid + \frac{a^2\lambda^2}{2\sqrt{\lambda\beta}} z_1^2(\theta_{r-s}\omega_1) + \\ & b \mid z_2(\theta_{r-s}\omega_2) \mid \Big) \| \boldsymbol{\varphi} \|_E^2 + \frac{\alpha\lambda}{2} \| y \|^2 + \frac{\lambda}{\alpha} \| g \|^2 + \frac{32\lambda}{\alpha\gamma^4} \| h \|^4 + \\ & \frac{16\lambda}{\alpha} \| v_{s-t} \| e^{-3\gamma r} + \frac{48\lambda}{\alpha\gamma^2} \| v_{s-t} \|^2 \| h \|^2 e^{-\frac{3}{2}\gamma r}\end{aligned} \tag{15}$$

令

$$G(\theta_{r-s}\omega) = 4a\lambda \mid z_1(\theta_{r-s}\omega_1) \mid + \frac{a \mid \lambda - \alpha\lambda^2 + 2\lambda\varepsilon \mid}{\sqrt{\lambda\beta}} \mid z_1(\theta_{r-s}\omega_1) \mid + \frac{a^2\lambda^2}{\sqrt{\lambda\beta}} z_1^2(\theta_{r-s}\omega_1) + 2b \mid z_2(\theta_{r-s}\omega_2) \mid$$

$$f_1 = \frac{\alpha\lambda}{2} \| g \|^2 + \frac{2}{\gamma} \| h \|^2 + \frac{64\lambda}{\alpha\gamma^2} \| h \|^4$$

$$f_2 = \frac{32\lambda}{\alpha} \| v_{s-t} \|^4 + \frac{96\lambda}{\alpha\gamma^2} \| v_{s-t} \|^2 \| h \|^2$$

则由(13)-(15)式可得

$$\frac{d}{dr} \| \boldsymbol{\varphi} \|_E^2 + (2\mu - G(\theta_{r-s}\omega)) \| \boldsymbol{\varphi} \|_E^2 \leqslant f_1 + f_2 e^{-\frac{3}{2}\gamma r} \tag{16}$$

对(16)式利用 Gronwall 不等式，可得

$$\begin{aligned}\| \boldsymbol{\varphi} \|_E^2 \leqslant & e^{-2\mu t + \int_{-t}^0 G(\theta_\xi\omega)d\xi} \| \boldsymbol{\varphi}_{s-t} \|_E^2 + e^{-\frac{3}{2}\gamma t} \int_{-t}^0 e^{2\mu r + \int_r^0 G(\theta_\xi\omega)d\xi} f_2 e^{-\frac{3}{2}\gamma r} dr + \\ & \int_{-t}^0 e^{2\mu r + \int_r^0 G(\theta_\xi\omega)d\xi} f_1(r+s)dr =\end{aligned}$$

$$e^{-2\mu t+\int_{-t}^{0}G(\theta_{\xi}\omega)\mathrm{d}\xi}\|\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\|_E^2+e^{-\frac{3}{2}\gamma t}\int_{-t}^{0}e^{2\mu r+\int_{r}^{0}G(\theta_{\xi}\omega)\mathrm{d}\xi}f_2 e^{-\frac{3}{2}\gamma r}\mathrm{d}r+R_0(s,\omega) \tag{17}$$

由假设(F3)可得

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-\frac{3}{2}\gamma t}\int_{-t}^{0}e^{2\mu r+\int_{r}^{0}G(\theta_{\xi}\omega)\mathrm{d}\xi}f_2 e^{-\frac{3}{2}\gamma r}\mathrm{d}r=0$$

对(17)式关于 $s\in(-\infty,\tau]$ 取上确界，结合(10)式可知，存在 $T(D,s,\omega)\geqslant 1$，使得当 $t\geqslant T$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant\tau}e^{-2\mu t+\int_{-t}^{0}G(\theta_{\xi}\omega)\mathrm{d}\xi}\|\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\|_E^2\leqslant\sup_{s\leqslant\tau}e^{-\mu t}\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2\leqslant 1$$

因此(11)式得证，即

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sup_{t\geqslant T}\|\boldsymbol{\varphi}(s)\|_E^2\leqslant 1+\sup_{s\leqslant\tau}R_0(s,\tau)=1+R(\tau,\omega)$$

引理 2　若假设(F1)－(F3)成立，则对 $\forall\eta>0$，$(\tau,\omega,D)\in(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathscr{D})$，$\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\in D(s-t,\theta_{-s}\omega)$，存在 $T(\eta,\tau,\omega,D)>0$，$k(\eta,\tau,\omega,D)\geqslant 1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|k|>n}\|\boldsymbol{\varphi}_k(s,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{\varphi}_{s-t})\|_E^2<\eta\qquad\forall t>T$$

证　构造一个光滑函数 $\rho(s)\in C^1([0,\infty),[0,1])$，满足：当 $|s|\leqslant 1$ 时，$\rho(s)=0$；当 $|s|\geqslant 2$ 时，$\rho(s)=1$；当 $1\leqslant s\leqslant 2$ 时，$0\leqslant\rho(s)\leqslant 1$；且 $|\rho'(s)|<\rho_0$，$\rho_0>0$. 令

$$\hat{\boldsymbol{\varphi}}=(\hat{u},\hat{y},\hat{v})^{\mathrm{T}}=((\hat{u})_k,(\hat{y})_k,(\hat{v})_k)_{k\in\mathbb{Z}}^{\mathrm{T}}\qquad\rho_{k,n}=\rho\left(\frac{|k|}{n}\right)$$

其中

$$(\hat{u})_k=\rho\left(\frac{|k|}{n}\right)u_k\qquad(\hat{y})_k=\rho\left(\frac{|k|}{n}\right)y_k\qquad(\hat{v})_k=\rho\left(\frac{|k|}{n}\right)v_n$$

$\hat{\boldsymbol{\varphi}}(r)$ 与(9)式作内积 $(\cdot,\cdot)_E$，并取其实部，可得

$$\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\boldsymbol{\varphi}})_E+\mathrm{Re}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{\varphi}})_E=\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\theta_r\omega,\boldsymbol{\varphi}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})_E \tag{18}$$

易证

$$\lambda\left|\sum_k(\rho_{k+1,n}-\rho_{k,n})(\dot{u}_{k+1}-\dot{u}_k)u_{k+1}\right|\leqslant\frac{c_1}{n}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega_1)|)\|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2$$

$$\sum_k\rho_{k,n}|v_k(r)|^2\leqslant e^{-\frac{7}{4}\gamma r}\|v_{s-t}\|^2+\frac{7}{\gamma^2}\sum_k|h_k(r)|^2+\frac{c_2}{n}$$

则有

$$\mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{\varphi}},\hat{\boldsymbol{\varphi}})_E\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_k\rho_{k,n}\|\boldsymbol{\varphi}_k\|^2-\frac{c_1}{n}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega_1)|)\|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2 \tag{19}$$

$$\mathrm{Re}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\varphi},\hat{\boldsymbol{\varphi}})_E\geqslant\sum_k\rho_{k,n}\left(\mu\|\boldsymbol{\varphi}\|^2+\frac{\alpha\lambda}{2}y_k^2+\frac{\gamma}{4}|v_k|^2\right)-\frac{c_3}{k}\|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2 \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\boldsymbol{F}(\theta_r\omega,\boldsymbol{\varphi}),\hat{\boldsymbol{\varphi}})\leqslant{}&\frac{1}{2}G(\theta_{r-s}\omega)\sum_k\rho_{k,n}\|\boldsymbol{\varphi}\|^2+\frac{\alpha}{\lambda}\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}g_k^2+\frac{\alpha\lambda}{2}y_k^2+c_4\|v_{s-t}\|^2e^{-3\gamma r}+\\&\frac{c_5}{k}+\frac{c_6}{k^2}+c_7\Big(\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}|h_k|^2\Big)^2+c_8\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}|h_k|^2\end{aligned} \tag{21}$$

将(19)－(21)式代入(18)式，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_k\rho_{k,n}\|\boldsymbol{\varphi}_k\|_E^2+(2\mu-G(\theta_{r-s}\omega))\sum_k\rho_{k,n}\|\boldsymbol{\varphi}_k\|_E^2\leqslant\\&\frac{2c_1}{n}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega_1)|)\|\boldsymbol{\varphi}\|_E^2+\\&2c_4\|v_{s-t}\|^2e^{-3\gamma r}+\frac{2c_5}{n}+\frac{2c_6}{n^2}+c_9\Big(\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}g_k^2+\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}|h_k|^2+\Big(\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}|h_k|^2\Big)^2\Big)\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $c_1, c_2, \cdots, c_9$ 为常数，对(22)式利用 Gronwall 引理，可得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_k \rho_{k,n}\|\boldsymbol{\varphi}_k\|_E^2 \leqslant \sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-2\mu t+\int_{-t}^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\|\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\|_E^2+\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\left(\frac{2c_5}{n}+\frac{2c_6}{n^2}\right)\mathrm{d}r+$$
$$\frac{2c_1}{n}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{s-t}^s \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^s G(\theta_{\xi-s}\omega)\mathrm{d}\xi}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega_1)|)\|\boldsymbol{\varphi}(r)\|_E^2\mathrm{d}r+$$
$$\sup_{s\leqslant\tau}c_9\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\Big[\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}(g_k^2+|h_k|^2)+\Big(\sum_{|k|\geqslant n}\rho_{k,n}|h_k|^2\Big)^2\Big]\mathrm{d}r+$$
$$\sup_{s\leqslant\tau}2c_4\mathrm{e}^{-3\gamma t}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\|v_{s-t}\|^2\mathrm{e}^{-3\gamma r}\mathrm{d}r \tag{23}$$

因为 $\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)(s\leqslant\tau)$，结合(10)式可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-2\mu t+\int_{-t}^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\|\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\|_E^2\leqslant\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{-\mu t}\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2=0 \tag{24}$$

由引理1和假设(F1)-(F3)可得，存在 $T>0$，当 $t>T$ 时，有

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\left(\frac{2c_5}{k}+\frac{2c_6}{k^2}\right)\mathrm{d}r\leqslant\lim_{k\to+\infty}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{\mu r}\left(\frac{2c_5}{k}+\frac{2c_6}{k^2}\right)\mathrm{d}r=0 \tag{25}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\frac{c_8}{k}\int_{s-t}^s \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^s G(\theta_{\xi-s}\omega)\mathrm{d}\xi}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega)|)\|\boldsymbol{\varphi}(r)\|_E^2\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\frac{2c_1}{k}\int_{s-t}^s \mathrm{e}^{2\mu r}(1+a\lambda|z_1(\theta_{r-s}\omega_1)|)\|\boldsymbol{\varphi}(r)\|_E^2\mathrm{d}r=0 \tag{26}$$

$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}c_9\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\Big[\sum_{|i|\geqslant k}\rho_{i,k}(g_i^2+|h_i|^2)+(\sum_{|i|\geqslant k}\rho_{i,k}|h_i|^2)^2\Big]\mathrm{d}r\leqslant$$
$$\lim_{k\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}c_9\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r}\Big[\sum_{|i|\geqslant k}(g_i^2+|h_i|^2)+(\sum_{|i|\geqslant k}|h_i|^2)^2\Big]\mathrm{d}r=0 \tag{27}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau}2c_4\mathrm{e}^{-3\gamma t}\int_{-t}^0 \mathrm{e}^{2\mu r+\int_r^0 G(\theta_\xi\omega)\mathrm{d}\xi}\|v_{s-t}\|^2\mathrm{e}^{-3\gamma r}\mathrm{d}r=0 \tag{28}$$

因此，由(25)-(28)式可得，对 $\forall\eta>0$，$(\tau,\omega,D)\in(\mathbb{R}\times\Omega\times\mathscr{D})$，$\boldsymbol{\varphi}_{s-t}\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)$，存在 $T(\varepsilon,\tau,\omega,D)>0$，$k(\varepsilon,\tau,\omega,D)\geqslant 1$，使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sup_{|k|>n}\|\boldsymbol{\varphi}_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{\varphi}_{s-t})\|_E^2<\eta \qquad \forall t>T$$

3 后向紧随机吸引子

定理1 若假设(F1)-(F3)成立，则方程(1)所生成的动力系统存在后向紧随机吸引子.

证 因为 $\{\boldsymbol{\Phi}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 满足文献[12](定理3.9)中的拉回吸引子的两个存在性条件：

(i) 非自治随机动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在 D-拉回随机吸收集 $K\in D$，其中

$$K(\tau,\omega)=\{w\in E:\|w\|^2\leqslant 1+R_0(\tau,\omega)\} \qquad \forall\tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega$$

(ii) 非自治随机动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在 $\mathscr{D}$-拉回后向一致吸收集 $\mathscr{K}\in\mathscr{D}$，其中

$$\mathscr{K}(\tau,\omega)=\{w\in E:\|w\|^2\leqslant 1+R(\tau,\omega)\}=\overline{\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{K}_0(s,\omega)} \qquad \forall\tau\in\mathbb{R},\ \omega\in\Omega$$

由文献[4]可得，非自治动力系统 $\{\boldsymbol{\Phi}(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在吸收集 $K\in\mathscr{D}$ 上是后向紧的. 因此方程(8)生成的非自治随机动力系统 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$ 和唯一的可测 D-拉回吸引子 $A\in D$. 再由文献[13]中的定理6.1知 $\mathscr{A}=A$，故吸引子 $\mathscr{A}$ 也是随机的，即 $\boldsymbol{\Phi}(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$. 再由文献[14-15]可知方程(1)与(8)生成的随机动力系统共轭，进而可得方程(1)存在后向紧随机吸引子.

参考文献：

[1] WANG J H，GU A H. Existence of Backwards-Compact Pullback Attractors for Non-Autonomous Lattice Dynamical Systems [J]. Journal of Difference Equations and Applications，2016，22(12)：1906-1911.

[2] YIN J Y，LI Y R，GU A H. Backwards Compact Attractors and Periodic Attractors for Non-Autonomous Damped Wave Equations on an Unbounded Domain [J]. Computers & Mathematics with Applications，2017，74(4)：744-758.

[3] LI Y R，YANG S. Backward Compact and Periodic Random Attractors for Non-Autonomous Sine-Gordon Equations with Multiplicative Noise [J]. Communications on Pure and Applied Analysis，2019，18(3)：1155-1175.

[4] 宋立，李扬荣. 非自治随机 p-Laplacian 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(4)：92-99.

[5] 乔闪闪，李扬荣. 随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(8)：48-53.

[6] 张子怡，李扬荣. 随机波动格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(10)：19-25.

[7] ZHOU S F，HUANG J W，HAN X Y. Compact Kernel Sections for Dissipative Non-autonomous Zakharov Equation on Infinite Lattices [J]. Communications on Pure and Applied Analysis，2010，9(1)：193-210.

[8] BAI Y，ZHOU S F. Random Attractor of Stochastic Zakharov Lattice System [J]. Journal of Applied Analysis and Computation，2011，1(2)：155-171.

[9] YIN F Q，ZHOU S F，OUYANG Z G，et al. Attractor for Lattice System of Dissipative Zakharov Equation [J]. Acta Mathematica Sinica(English Series)，2009，25(2)：321-342.

[10] ZHOU S F，BAI Y. Random Attractor and Upper Semi-Continuity for Zakharov Lattice System with Multiplicative White Noise [J]. Journal of Difference Equations and Applications，2014，20(2)：312-338.

[11] TANG L，ZHOU S F，HAN Z F. Random Exponential Attractor for a Non-autonomous Zakharov Lattice System with Multiplicative White Noise [J]. Journal of Difference Equations and Applications，2021，27(6)：902-921.

[12] WANG S L，LI Y R. Longtime Robustness of Pullback Random Attractors for Stochastic Magneto-Hydrodynamics Equations [J]. Physica D：Nonlinear Phenomena，2018，382：46-57.

[13] DAMASCELLI L. Comparison Theorems for Some Quasilinear Degenerate Elliptic Operators and Applications to Symmetry and Monotonicity Results [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré C，Analyse Non Linéaire，1998，15(4)：493-516.

[14] CARABALLO T，LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems with a Multiplicative Noise [J]. Frontiers of Mathematics in China，2008，3(3)：317-335.

[15] DUAN J Q，LU K N，SCHMALFUSS B. Invariant Manifolds for Stochastic Partial Differential Equations [J]. The Annals of Probability，2003，31(4)：2109-2135.

责任编辑　廖坤