第 48 卷 第 7 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 7 月
Vol. 48 No. 7　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Jul. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.07.009

随机格板方程的后向紧随机吸引子①

韩凯利，　李扬荣

西南大学 数学与统计学院，重庆 400715

摘要：当外力是后向缓增时，通过对解的估计，证明了格板方程在 $l^2\times l^2$ 存在后向紧一致吸收集，且方程在吸收集上是后向渐进紧的，再通过吸引子的存在性定理，证明了非自治随机格板方程在空间 $l^2\times l^2$ 存在后向紧随机吸引子.

关　键　词：随机动力系统；格板方程；后向紧随机吸引子

中图分类号：O193　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)07－0060－07

Backward Compact Random Attractors for Stochastic Lattice Plate Equation

HAN Kaili，　LI Yangrong

School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China

Abstract: When the external force is backward tempered, by estimating the solution, it is proved that lattice plate equation exists a backward compact uniformly absorbing set on the space $l^2\times l^2$, and the equation is backward asymptotically compact on the absorbing set. Then by the existence theorem of attractors, it is proved that the non-autonomous random lattice plate equation exists a backward compact random attractor on the space $l^2\times l^2$.

Key words: random dynamical system; lattice plate equation; backward compact random attractors

文献[1-3]对随机格系统做了深入的研究，文献[4-6]对吸引子的存在性和后向紧性做了研究并建立了相对完善的理论体系，文献[7-9]对格点方程的后向紧随机吸引子进行了研究，文献[10-11]对板方程吸引子的存在性和连续性做了研究，文献[12]对带有非线性噪音的格板方程做了研究，本文将在文献[10,12]的基础上，研究带有乘法噪音的非自治随机格板方程的后向紧随机吸引子.

1　随机格板方程

本文将在空间 l^2 上讨论带有乘法噪音的非自治随机格板方程

① 收稿日期：2022－11－25

基金项目：国家自然科学基金项目(12271444).

作者简介：韩凯利，硕士研究生，主要从事无穷维随机动力系统与随机分析的研究.

通信作者：李扬荣，博士生导师，教授.

$$\begin{cases} \mathrm{d}\dot{u}_i(t)+\varphi_i(\dot{u}_i(t))\mathrm{d}t+\lambda u_i(t)\mathrm{d}t+(u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2})\mathrm{d}t+f_i(u_i(t))\mathrm{d}t= \\ g_i(t)\mathrm{d}t+\alpha u_i(t)\circ\mathrm{d}W \\ u_i(\tau)=u_{\tau,i},\ \dot{u}_i(\tau)=\dot{u}_{\tau,i} \qquad i\in\mathbb{Z} \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\mathbb{Z}$ 表示整数集，$\tau\in\mathbb{R}$，$t>\tau$，$\lambda>0$，$\alpha\in\mathbb{R}$，$\dot{u}_i(t)$ 是 u_i 关于时间 t 的第一阶导数，$g=(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 是依赖时间 t 的随机序列，$f_i:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是具有任意阶多项式增长的非线性漂移函数，φ_i 是非线性阻尼函数，W 是定义在完备概率空间$(\Omega,\mathscr{F},\{\mathscr{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}},\mathbb{P})$ 上的双边实值 Wiener 过程，其中$(\Omega,\mathscr{F},\mathbb{P})$ 是一个概率空间，$\Omega=\{\omega\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}):\omega(0)=0\}$，$\mathscr{F}=\mathscr{B}(\Omega)$ 是 Ω 上的 Borel σ -代数，$\mathbb{P}$ 是在$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的 Wiener 测度.

接下来做一些假设：

（Ⅰ） $f_i\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ 且对所有的 $s\in\mathbb{R}$，$i\in\mathbb{Z}$ 满足：

$$|f_i(s)|\leqslant\gamma_1|s|^{p-1}+\phi_{1,i} \qquad \phi_1=\{\phi_{1,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}\in l^2 \tag{2}$$

$$f_i(s)s\geqslant\gamma_2F_i(s)+\phi_{2,i} \qquad \phi_2=\{\phi_{2,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}\in l^1 \tag{3}$$

$$F_i(s)\geqslant\gamma_3|s|^p-\phi_{3,i} \qquad \phi_3=\{\phi_{3,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}\in l^1 \tag{4}$$

$$|f'_i(s)|\leqslant\gamma_4|s|^{p-2}+\phi_{4,i} \qquad \phi_4=\{\phi_{4,i}\}_{i\in\mathbb{Z}}\in l^\infty \tag{5}$$

其中 $p\geqslant 2$，常数 $\gamma_i>0(i=1,2,3,4)$，$F_i(s)=\int_0^s f_i(r)\mathrm{d}r$，由(2)－(3) 式可知，存在常数 $c=c(\gamma_1,\gamma_2)$ 使得

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i)\leqslant c(\|u\|_p^p+\|u\|^2+\|\phi_1\|^2+\|\phi_2\|_1) \qquad \forall u\in l^2 \tag{6}$$

（Ⅱ） $\varphi_i\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$，存在正数 α_1 和 α_2，使得

$$\varphi_i(0)=0 \qquad \alpha_1\leqslant\varphi'_i(s)\leqslant\alpha_2 \qquad \forall s\in\mathbb{R},\ i\in\mathbb{Z}$$

（Ⅲ） $g=(g_i)_{i\in\mathbb{Z}}$，$g\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},l^2)$ 满足

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\gamma(r-s)}\|g(\cdot,r)\|\mathrm{d}r<\infty \qquad \forall\gamma>0,\ \tau\in\mathbb{R} \tag{7}$$

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^s \mathrm{e}^{\gamma(r-s)}\sum_{|i|\geqslant k}|g_i(\cdot,r)|^2\mathrm{d}r=0 \qquad \forall s,\tau\in\mathbb{R} \tag{8}$$

为了将方程(1) 化简，定义从 l^2 到 l^2 上的算子如下：

$$\begin{cases} (Au)_i=-u_{i-1}+2u_i-u_{i+1} \\ (A^2u)_i=u_{i+2}-4u_{i+1}+6u_i-4u_{i-1}+u_{i-2} \qquad \forall u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in l^2 \end{cases} \tag{9}$$

且对于 $u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in l^2$ 和 $v=(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}\in l^2$，有

$$\|A^2u\|\leqslant 16\|u\| \qquad (A^2u,v)=(Au,Av) \tag{10}$$

为了证明随机方程(1) 产生一个随机动力系统，我们将其转化为 $l^2\times l^2$ 上的一个随机微分方程，令

$$\theta_t\omega(\cdot)=w(\cdot+t)-w(t)$$

则

$$z(t,\omega)=z(\theta_t\omega)=-k\int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^{ks}\theta_t\omega(s)\mathrm{d}s$$

是方程 $\mathrm{d}z+kz\mathrm{d}t=\mathrm{d}W(t)$ 的一个路径解.

从文献[13] 可知，随机变量 $|z(\omega)|$ 是缓增的，且满足

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{-t}^0|z(\theta_r\omega)|\mathrm{d}r=\frac{1}{\sqrt{\pi k}} \qquad \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_{-t}^0|z(\theta_r\omega)|^2\mathrm{d}r=\frac{1}{2k} \tag{11}$$

此外存在一个 θ_t -不变集 $\tilde{\Omega}\subset\Omega$，使得对 $\forall\omega\in\tilde{\Omega}$，$t\longmapsto z(\theta_t\omega)$ 关于 t 是连续的，为了方便起见，后续仍用 Ω 代替 $\tilde{\Omega}$. 为了简化方程(1)，令

$$v(x,t)=\dot{u}(t)+ku(t)-\alpha u(x,t)z(\theta_t\omega)$$

则方程(1)可以重新改写成具有随机系数但没有乘法噪音的等价方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=v-ku+\alpha uz(\theta_t\omega)\\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-\varphi(v+\alpha uz(\theta_t\omega)-ku)+kv-(k^2+\lambda)u-A^2u-f(u)+g(t)-\alpha z(v-3ku+\alpha uz(\theta_t\omega))\\ u(\tau)=u_\tau=(u_{\tau,i})_{i\in\mathbb{Z}},\ v(\tau)=v_\tau=(v_{\tau,i})_{i\in\mathbb{Z}},\ v_\tau(x)=\dot{u}_\tau(x)+ku_\tau(x)-\alpha u_\tau(x)z(\theta_\tau\omega)\end{cases} \tag{12}$$

令 $E=l^2\times l^2$,且有范数

$$\|\boldsymbol{Y}\|_{l^2\times l^2}=(\|u\|^2+\|v\|^2)^{\frac{1}{2}}\qquad \boldsymbol{Y}=(u,v)^{\mathrm{T}}\in E$$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 l^2 范数,为了后续计算,当 $\lambda+k^2-\alpha_2k>0$ 时,定义一个新的范数 $\|\cdot\|_E$:

$$\|\boldsymbol{Y}\|_E=(\|v\|^2+(\lambda+k^2-\alpha_2k)\|u\|^2)^{\frac{1}{2}}\qquad \boldsymbol{Y}=(u,v)^{\mathrm{T}}\in E$$

容易验证范数 $\|\cdot\|_E$ 与范数 $\|\cdot\|_{l^2\times l^2}$ 是等价的,且方程(1)的解产生的动力系统与通过方程(12)获得的是一样的,因此我们只需要考虑方程(12)的解产生的动力系统.通过文献[14]中关于解的存在性和唯一性的经典理论方法可以得到,在假设(Ⅰ)下,方程(12)在 E 上存在唯一的连续依赖于初始值的解

$$(u(t,\omega,u_\tau),v(t,\omega,v_\tau))^{\mathrm{T}}\in C([\tau,+\infty),E)$$

则对于所有的 $t>\tau$,$\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,$(u_\tau,v_\tau)\in E$,可以获得一个协循环 Φ:$\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}\times\omega\times E\longrightarrow E$,

$$\Phi(t,\tau,\omega,(u_\tau,v_\tau))=(u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau),v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,v_\tau))$$

在下文中,$\mathscr{D}$ 是 E 中所有后向缓增集构成的集族,集合 $D=\{\mathscr{D}(\tau,\omega)\}\in\mathscr{D}$ 当且仅当

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sup_{s\leqslant\tau}\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|_E^2=0\qquad \forall\gamma>0,\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega$$

2 解的估计

引理1 若假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)成立,则对任意后向缓增集 $D\in\mathscr{D}$,$\forall\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,$\boldsymbol{Y}_{s-t}\in\mathscr{D}$,存在 $T=T(\tau,\omega,D,\eta)\geqslant0$,使得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sup_{t\geqslant T}\|\boldsymbol{Y}(s,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{Y}_{s-t})\|_E^2\leqslant1+R(\tau,\omega)$$

其中对 $\forall\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,有

$$R(\tau,\omega)=\sup_{s\leqslant\tau}R_1(s,\omega)=\sup_{s\leqslant\tau}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\int_0^r\varrho(\mu,\omega)\mathrm{d}\mu}\cdot(1+\|g(r+s)\|^2+|\alpha||z(\theta_r\omega)|)\mathrm{d}r$$

证 对任意固定的 $\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,$(u_{s-t},v_{s-t})\in D$,将方程(12)中第二个等式与

$$v(r)=v(r,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{Y}_{s-t})\qquad s\leqslant\tau$$

作内积,有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\|v\|^2-(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\|v\|^2+(\lambda+k^2)(u,v)+(A^2u,v)+(f(u),v)=$$
$$\alpha z(\theta_{r-s}\omega)(3k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))(u,v)-(\varphi(v+\alpha uz(\theta_{r-s}\omega)-ku),v)+(g(r),v) \tag{13}$$

且有

$$v=u_t-\alpha uz(\theta_{r-s}\omega)+ku \tag{14}$$

当 $\alpha_1-k>0$ 时,根据拉格朗日中值定理、假设(Ⅰ)-(Ⅱ)和Young不等式,有

$$(g,v)\leqslant\|g\|\|v\|\leqslant\frac{\|g\|^2}{2(\alpha_1-k)}+\frac{\alpha_1-k}{2}\|v\|^2 \tag{15}$$

$$\alpha z(\theta_{r-s}\omega)(3k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))(u,v)-(\varphi(v+\alpha uz(\theta_{r-s}\omega)-ku),v)\leqslant$$
$$k\varphi'(\vartheta)(u,v)+\left(\frac{1}{2}(3k+\alpha_2)|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|+\frac{1}{2}\alpha^2|z(\theta_{r-s}\omega)|^2\right)(\|u\|^2+\|v\|^2)-\alpha_1\|v\|^2 \tag{16}$$

$$(f(u),v)\geqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i)+k(f(u),u)-$$
$$\gamma_1\gamma_3^{-1}|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i)-c_1|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|-|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|\ \|u\|^2 \tag{17}$$

利用(6),(10),(14)式，并将(15)－(20)式带入(13)式，整理有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(\|\boldsymbol{Y}(r)\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i))\leqslant$$
$$-\varrho(r-s,\omega)(\|\boldsymbol{Y}(r)\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i))+c(1+\|g\|^2+|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|) \tag{18}$$

其中

$$\varrho(\mu,\omega)=\sigma-\beta_1|\alpha||z(\theta_\mu\omega)|-\beta_2\left(\frac{1}{2}\alpha^2|z(\theta_\mu\omega)|^2+\beta_3|\alpha||z(\theta_\mu\omega)|\right)$$

$$\sigma=\frac{1}{2}\min\{k,k\gamma_2\}$$

$$\beta_1=\max\left\{1,\frac{\gamma_1\gamma_3^{-1}}{2}\right\}\qquad \beta_2=1+\frac{1}{\lambda+k^2-\alpha_2 k}\qquad \beta_3=\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}\alpha_2+2\alpha_2 k+17=\beta_4+17$$

对(18)式利用 Gronwall 不等式，计算可得

$$\|\boldsymbol{Y}(s)\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_i)\leqslant(\|\boldsymbol{Y}_{s-t}\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_{i,s-t}))\mathrm{e}^{2\int_s^{s-t}\varrho(r-s,\omega)\mathrm{d}r}+$$
$$c\int_{s-t}^{s}\mathrm{e}^{2\int_s^r\varrho(\xi-s,\omega)\mathrm{d}\xi}(1+\|g(r)\|^2+|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|)\mathrm{d}r\leqslant$$
$$(\|\boldsymbol{Y}_{s-t}\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_{i,s-t}))\mathrm{e}^{2\int_0^{-t}\varrho(r,\omega)\mathrm{d}r}+$$
$$c\int_{-t}^{0}\mathrm{e}^{2\int_0^r\varrho(\xi,\omega)\mathrm{d}\xi}(1+\|g(r+s)\|^2+|\alpha||z(\theta_r\omega)|)\mathrm{d}r \tag{19}$$

由文献[10]可知，当

$$|\alpha|<\min\left\{\frac{-2\sqrt{k}(\beta_2\beta_3+\beta_1)+\sqrt{4k(\beta_2\beta_3+\beta_1)^2+\pi k\beta_2\sigma}}{\beta_2\sqrt{\pi}},\frac{-2\sqrt{k}(\beta_2\beta_4+1)+\sqrt{4k(\beta_2\beta_4+1)^2+\pi k\beta_2\sigma}}{\beta_2\sqrt{\pi}}\right\}$$

时，存在 T_1，使得对 $\forall r\leqslant -T_1$ 有

$$\mathrm{e}^{2\int_0^r\varrho(\xi,\omega)\mathrm{d}\xi}\leqslant \mathrm{e}^{\sigma r} \tag{20}$$

又因为 $|z(\theta_r\omega)|$ 是缓增的，通过(7)式和(20)式，可知

$$R_1(s,\omega)=c\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\int_0^r\varrho(\xi,\omega)\mathrm{d}\xi}(1+\|g(r+s)\|^2+|\alpha||z(\theta_r\omega)|)\mathrm{d}r$$

是收敛的.

因为 $D\in\mathscr{D}$，$(u_{s-t},v_{s-t})\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)$，$l^2\subset l^p$，则通过(6),(20)式，对 $\forall t\geqslant T_1$，有

$$(\|\boldsymbol{Y}_{s-t}\|_E^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_{i,s-t}))\mathrm{e}^{2\int_0^{-t}\varrho(r,\omega)\mathrm{d}r}\leqslant$$
$$c\,\mathrm{e}^{-\sigma t}(1+\|u_{s-t}\|_p^p+\|u_{s-t}\|^2+\|v_{s-t}\|^2)\leqslant$$
$$c\,\mathrm{e}^{-\sigma t}(1+\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^2+\|D(s-t,\theta_{-t}\omega)\|^p)\to 0\qquad t\to+\infty \tag{21}$$

对(19)式关于 $s\in(-\infty,\tau]$ 取上确界，对 $\forall\tau\in\mathbb{R}$，$\omega\in\Omega$，$\boldsymbol{Y}_{s-t}\in D$，存在 $T=T(\tau,\omega,D,\eta)\geqslant 0$，当 $t\geqslant T(\geqslant T_1)$ 时，有

$$\sup_{s\leqslant\tau}\|\boldsymbol{Y}(s,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{Y}_{s-t})\|_E^2\leqslant 1+\sup_{s\leqslant\tau}R_1(s,\omega)=1+R(\tau,\omega) \tag{22}$$

推论 1　若假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)成立，且满足引理 1，则由文献[7,15]中拉回一致吸收集存在的条件可知，协循环$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$存在 $\mathscr{D}$-拉回后向一致吸收集 $\mathscr{K}\in\mathscr{D}$，其中

$$\mathscr{K}(\tau,\omega)=\{(u,v)\in E:\|\boldsymbol{Y}\|_E^2\leqslant M(1+R(\tau,\omega))\}=\overline{\bigcup_{s\leqslant\tau}\mathscr{K}_0(s,\omega)}$$

$\mathscr{K}_0$ 为拉回随机吸收集.

引理 2 若假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)成立,$(u_{s-t},v_{s-t})\in D(s-t,\theta_{-t}\omega)$,$\tau\in\mathbb{R}$,$\omega\in\Omega$,$D\in\mathscr{D}$,则对 $\forall\eta>0$,存在

$$T=T(\tau,\omega,D,\eta)>0\qquad N=N(\tau,\omega,\eta)\geqslant 1$$

使得对 $\forall t\geqslant T$,方程(12)的解满足

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|\geqslant N(\tau,\omega,\eta)}(|\boldsymbol{Y}_i(s,s-t,\theta_{-s}\omega,\boldsymbol{Y}_{s-t})|^2)\leqslant\eta$$

证 定义一个光滑函数 ρ,当 $s\in\mathbb{R}$ 时,有 $0\leqslant\rho\leqslant 1$,且当 $|s|\leqslant 1$ 时,$\rho=0$;当 $|s|\geqslant 2$ 时,$\rho=1$. 则存在常数 μ_1,对 $\forall s\in\mathbb{R}$,有 $|\rho'(s)|\leqslant\mu_1$.

令

$$u=(u_i)_{i\in\mathbb{Z}}\qquad v=(v_i)_{i\in\mathbb{Z}}$$

$$\rho_n=\left(\rho\left(\frac{|i|}{n}\right)\right)_{i\in\mathbb{Z}}\qquad \rho u=\left(\rho\left(\frac{|i|}{n}\right)u_i\right)_{i\in\mathbb{Z}}\qquad \rho v=\left(\rho\left(\frac{|i|}{n}\right)v_i\right)_{i\in\mathbb{Z}}$$

将方程(12)中的第二个等式与 ρv 作内积,有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|v_i|^2-(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|v_i|^2+(\lambda+k^2)(u,\rho v)+(A^2u,\rho v)+(f(u),\rho v)=\\&\alpha z(\theta_{r-s}\omega)(3k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))(u,\rho v)-(\varphi(v+\alpha uz(\theta_{r-s}\omega)-ku),\rho v)+(g(r),\rho v)\end{aligned}\tag{23}$$

当 $\alpha_1-k>0$ 时,通过 Young 不等式以及(14)式,有

$$\begin{aligned}(f(u),\rho v)=&\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_nf_i(u_i)(\dot{u}+ku_i-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)u_i)=\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_nF_i(u_i)+k\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_nf_i(u_i)u_i-\alpha z(\theta_{r-s}\omega)\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_nf_i(u_i)u_i\end{aligned}\tag{24}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_ng_i(r)v_i\leqslant\frac{1}{2(\alpha_1-k)}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|g_i(r)|^2+\frac{\alpha_1-k}{2}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|v_i|^2\tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\alpha z(\theta_{r-s}\omega)(3k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))(u,\rho v)+\alpha_2|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|u_i||v_i|\leqslant\\&\left(\frac{1}{2}(3k+\alpha_2)|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|+\frac{1}{2}\alpha^2|z(\theta_{r-s}\omega)|^2\right)\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n(|u_i|^2+|v_i|^2)\end{aligned}\tag{26}$$

与文献[12]的方法类似,通过(9),(10),(14)式可知

$$\begin{aligned}(A^2u,\rho v)\geqslant&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|(Au)_i|^2+(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|(Au)_i|^2-\\&\frac{8(9+(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))^2)\mu_1}{n}(\|u\|^2+\|v\|^2)-\frac{68(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\mu_1}{n}\|u\|^2\end{aligned}\tag{27}$$

将(24)-(27)式带入(23)式,并根据假设(Ⅰ),(Ⅱ),整理有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n(|\boldsymbol{Y}_i(r)|^2+2F_i(u_i))\leqslant-\varrho(r-s,\omega)\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n(|\boldsymbol{Y}_i(r)|^2+2F_i(u_i))+\\&\frac{8(9+(k-\alpha^2z(\theta_{r-s}\omega))^2)\mu_1}{n}(\|u\|^2+\|v\|^2)+\frac{68(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\mu_1}{n}\|u\|^2+\\&c\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n|g_i(r)|^2+\eta(1+|\alpha||z(\theta_{r-s}\omega)|)\end{aligned}\tag{28}$$

对(28)式利用 Gronwall 不等式,并取上确界,计算可得

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n(|\boldsymbol{Y}_i(s)|^2+2F_i(u_i))\leqslant\sup_{s\leqslant\tau}\mathrm{e}^{2\int_0^{-t}\varrho(\mu,\omega)\mathrm{d}\mu}(\|\boldsymbol{Y}_{s-t}\|^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_{i,s-t}))+$$

$$\sup_{s\leqslant\tau} c\int_{-t}^{0} e^{2\int_0^r \varrho(\mu,\ \omega)\mathrm{d}\mu}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n\ |\ g_i(r+s)\ |^2\mathrm{d}r+\sup_{s\leqslant\tau}\eta\int_{-t}^{0} e^{2\int_0^r \varrho(\mu,\ \omega)\mathrm{d}\mu}(1+|\ \alpha\ ||\ z(\theta_r\omega)\ |)\mathrm{d}r+$$

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{s-t}^{s} e^{2\int_s^r \varrho(\mu-s,\ \omega)\mathrm{d}\mu}\ \frac{8(9+(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))^2)\mu_1}{n}(\|\ u\ \|^2+\|\ v\ \|^2)\mathrm{d}r+$$

$$\sup_{s\leqslant\tau}\int_{s-t}^{s} e^{2\int_s^r \varrho(\mu-s,\ \omega)\mathrm{d}\mu}\ \frac{68(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\mu_1}{n}\|\ u\ \|^2\mathrm{d}r$$

与(21) 式类似，可得

$$\lim_{t\to+\infty}\sup_{s\leqslant\tau} e^{2\int_0^{-t}\varrho(\mu,\ \omega)\mathrm{d}\mu}(\|\ \boldsymbol{Y}_{s-t}\ \|^2+2\sum_{i\in\mathbb{Z}}F_i(u_{i,\ s-t}))=0 \tag{29}$$

根据 $z(\theta_r\omega)$ 的缓增性和(11) 式可知，对 $\forall\,\varepsilon>0$，存在 $C=C(\varepsilon,\ \omega)$，使得

$$|\ z(\theta_r\omega)\ |+\left|\int_r^0 z(\theta_s\omega)\mathrm{d}s\right|\leqslant-\varepsilon r+C(\varepsilon,\ \omega) \tag{30}$$

则通过(8),(20),(30) 式可知，存在常数 M 和 $T(\geqslant T_1)$，当 $t>T$ 时，有

$$c\int_{-t}^{0} e^{2\int_0^r \varrho(\mu,\ \omega)\mathrm{d}\mu}\sum_{i\in\mathbb{Z}}\rho_n\ |\ g_i(r+s)\ |^2\mathrm{d}r\leqslant e^c\int_{-\infty}^{0} e^{\sigma s}\sum_{|i|\geqslant n}|\ g_i(r+s)\ |^2\mathrm{d}r\leqslant\eta \tag{31}$$

$$\eta\int_{-t}^{0} e^{2\int_0^r \varrho(\mu,\ \omega)\mathrm{d}\mu}(1+|\ \alpha\ ||\ z(\theta_r\omega)\ |)\mathrm{d}r\leqslant\eta C(\omega)\leqslant\eta \tag{32}$$

$$\int_{s-t}^{s} e^{2\int_s^r \varrho(\mu-s,\ \omega)\mathrm{d}\mu}\left(\frac{8(9+(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))^2)\mu_1}{n}(\|\ u\ \|^2+\|\ v\ \|^2)+\frac{68(k-\alpha z(\theta_{r-s}\omega))\mu_1}{n}\|\ u\ \|^2\right)\mathrm{d}r\leqslant$$

$$\eta MC(\omega)(1+R(\tau,\ \omega))\leqslant\eta \tag{33}$$

所以通过(6),(29),(31)—(39) 式，对 $\forall\,\eta>0$，存在

$$T=T(\tau,\ \omega,\ D,\ \eta)>0\qquad N=N(\tau,\ \omega,\ \eta)\geqslant 1$$

使得对 $\forall\,t\geqslant T$，有

$$\sup_{s\leqslant\tau}\sum_{|i|\geqslant N(\tau,\ \omega,\ \eta)}(|\ \boldsymbol{Y}_i(s,\ s-t,\ \theta_{-s}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{s-t})\ |^2)\leqslant\eta$$

引理 3　若假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ) 成立，则协循环$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在吸收集 $\mathscr{K}\in\mathscr{D}$ 上是后向渐进紧的.

证　对任意固定的 $\tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$，$\boldsymbol{Y}_\tau\in\mathscr{K}(\tau_k-t_k,\ \theta_{-t_k}\omega)$，取任意序列$\{\tau_k\}$，$\tau_k\leqslant\tau$，$t_k\to+\infty$ $(k\to+\infty)$，定义

$$\boldsymbol{Y}_k=\Phi(t_k,\ \tau_k-t_k,\ \theta_{-t_k}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{\tau,\ k})=\boldsymbol{Y}(\tau_k,\ \tau_k-t_k,\ \theta_{-\tau_k}\omega,\ \boldsymbol{Y}_{\tau,k})$$

下证$\{\boldsymbol{Y}_k\}$ 在 E 上是预紧的. 由引理 2 可知，存在 K,N，使得当 $k\geqslant K$ 时，有

$$\sum_{|i|\geqslant N(\tau,\ \omega,\ \eta)}(|\ \boldsymbol{Y}_{k,i}\ |^2)\leqslant\eta \tag{34}$$

由引理 1 可知，$\{\boldsymbol{Y}_k\}$ 在 E 中是有界的，因此$\{(\boldsymbol{Y}_{k,i})_{|i|\leqslant N}\}_k$ 在 $\mathbb{R}^{2N+1}$ 中有界，所以$\{(\boldsymbol{Y}_{k,i})_{|i|\leqslant N}\}_k$ 在 $\mathbb{R}^{2N+1}$ 中有一个有限的ε-网，结合(34) 式可以得到$\{\boldsymbol{Y}_k\}$ 在 E 中有一个有限的 2ε-网，所以$\{\boldsymbol{Y}_k\}$ 在 E 中是预紧的，进而$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 在吸收集 $\mathscr{K}$ 上是后向渐进紧的.

3　后向紧随机吸引子

定理 1　若假设(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ) 成立，则方程(1) 生成的动力系统存在后向紧随机吸引子.

证　由推论 1 和引理 3 可知，协循环$\{\Phi(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在 $\mathscr{D}$-拉回后向一致吸收集且在吸收集上是后向渐进紧的，因此满足文献[15](定理 3.9) 中拉回吸引子的存在性条件，因此方程(12) 生成的非自治随机动力系统 $\Phi(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$ 和唯一可测的 $\mathscr{D}_0$-拉回吸引子 $\mathscr{A}_0\in\mathscr{D}_0$. 再根据文献[16](定理 6.1) 可知 $\mathscr{A}=\mathscr{A}_0$，所以吸引子 $\mathscr{A}$ 也是随机的，因此 $\Phi(t)$ 存在唯一的后向紧 $\mathscr{D}$-拉回随机吸引子 $\mathscr{A}\in\mathscr{D}$，从而方程(1) 存在后向紧随机吸引子.

参考文献:

[1] BATES P W, LU K N, WANG B X. Attractors of Non-Autonomous Stochastic Lattice Systems in Weighted Spaces [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2014, 289: 32-50.

[2] BATES P W, LISEI H, LU K N. Attractors for Stochastic Lattice Dynamical Systems [J]. Stochastics and Dynamics, 2006, 6(1): 1-21.

[3] WANG B X. Asymptotic Behavior of Non-Autonomous Lattice Systems [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 331(1): 121-136.

[4] YIN J Y, LI Y R, GU A H. Backwards Compact Attractors and Periodic Attractors for Non-Autonomous Damped Wave Equations on an Unbounded Domain [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2017, 74(4): 744-758.

[5] WANG R H, LI Y R. Regularity and Backward Compactness of Attractors for Non-Autonomous Lattice Systems with Random Coefficients [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 354: 86-102.

[6] WANG B X. Sufficient and Necessary Criteria for Existence of Pullback Attractors for Non-Compact Random Dynamical Systems [J]. Journal of Differential Equations, 2012, 253(5): 1544-1583.

[7] 宋立，李扬荣. 非自治随机 p-Laplacian 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(4)：92-99.

[8] 张子怡，李扬荣. 随机波动格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(10)：19-25.

[9] 乔闪闪，李扬荣. 随机 Kuramoto-Sivashinsky 格点方程的后向紧随机吸引子 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(8)：48-53.

[10] YAO X B. Random Attractors for Non-Autonomous Stochastic Plate Equations with Multiplicative Noise and Nonlinear Damping [J]. AIMS Mathematics, 2020, 5(3): 2577-2607.

[11] MA Q Z, YAO X B, LIU T T. Existence and Upper Semi-Continuity of Random Attractors for Non-Autonomous Stochastic Plate Equations with Multiplicative Noise on $\mathbb{R}^n$ [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2021, 11(3): 1422-1454.

[12] WANG R H. Long-Time Dynamics of Stochastic Lattice Plate Equations with Nonlinear Noise and Damping [J]. Journal of Dynamics and Differential Equations, 2021, 33(2): 767-803.

[13] FAN X M. Attractors for a Damped Stochastic Wave Equation of Sine-Gordon Type with Sublinear Multiplicative Noise [J]. Stochastic Analysis and Applications, 2006, 24(4): 767-793.

[14] TEMAM R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics [M]. New York: Springer-Verlag, 1997.

[15] WANG S L, LI Y R. Longtime Robustness of Pullback Random Attractors for Stochastic Magneto-Hydrodynamics Equations [J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 2018, 382: 46-57.

[16] DAMASCELLI L. Comparison Theorems for Some Quasilinear Degenerate Elliptic Operators and Applications to Symmetry and Monotonicity Results [J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Non-Linéaire, 1998, 15(4): 493-516.

责任编辑　廖坤