第 48 卷 第 7 期 西南师范大学学报(自然科学版) 2023 年 7 月
Vol. 48 No. 7 Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition) Jul. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.07.014

对粗糙集上的不完全信息非合作博弈的均衡分析①

毛浪， 杨彦龙

贵州大学 数学与统计学院，贵阳 550025

摘要：在经典不完全信息非合作博弈中，常常假定局中人知道其他局中人类型的概率分布，但是在现实的社会中，对于这样的概率分布往往无法知晓. 本文借助粗糙集理论处理这种不完备性，首先利用其中一个局中人依赖于对其他局中人的信息判断，计算出其他局中人的类型近似精确度. 其次，给出模型的 Nash 均衡的存在性定理，并利用 Kakutani-Fan-Glicksberg 不动点定理证明了 Nash 均衡的存在性. 最后，通过一个实例验证了该博弈模型的实用性.

关 键 词：不完全信息非合作博弈；粗糙集；Nash 均衡；不动点定理

中图分类号：**F224.32** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1000－5471(2023)07－0095－06

Equilibrium Analysis of Non-Cooperative Game with Incomplete Information on Rough Set

MAO Lang， YANG Yanlong

School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China

Abstract: In classical non-cooperative games with incomplete information, it is often assumed that the players know the probability distribution of other players, but in the real society, such probability distribution is often unknown. In this paper, rough set theory is used to deal with this incompleteness, and the type approximation accuracy of other players is calculated by using the information judgment of one player on other players. Secondly, the existence theorem of Nash equilibrium is given, and the existence of Nash equilibrium is proved by Kakutani-Fan-Glicksberg fixed point theorem. Finally, an example is given to verify the practicability of the game model.

Key words: non-cooperative games with incomplete information; rough set; Nash equilibrium; Fixed Point Theorem

博弈论又被称为对策论，是研究决策者在决策过程中所选择的策略形成的不同局势以及策略的均衡.

① 收稿日期：2022－09－05

基金项目：国家自然科学基金项目(71961003)；贵州省科技厅联合基金项目(黔科合 LH 字[2017]7223)；贵州大学博士基金(贵大人基合字(2019)49).

作者简介：毛浪，硕士研究生，主要从事博弈论研究.

通信作者：杨彦龙，博士，副教授，研究生导师.

在经典的博弈论理论中，将博弈分为不完全信息博弈和完全信息博弈.不完全信息博弈是指在不充分了解其他参与人的特征、策略空间以及收益函数的情况下的博弈.

1965年，Zadeh发表的《模糊集理论》[1]为之后的模糊数学研究提供了系统的理论基础.现如今模糊集理论已经应用到不动点理论、变分不等式和博弈论等许多领域[2-4].

1982年，波兰数学家Pawlak创立了粗糙集理论[5]，作为刻画不完整性和不确定性的数学工具，能有效地分析不精确、不一致、不完整等各种不完备的信息，还可以对数据进行分析和推理，从中发现隐含的知识，揭示潜在的规律.因此，粗糙集理论被广泛使用在机器学习、数据挖掘、图像处理、模式识别等许多领域.国内外针对模糊不完全信息的单独博弈大都基于模糊集理论[6-9].目前利用粗糙集理论来解决博弈论中不确定性问题的研究相对较少[10-14].文献[14]在文献[11]的基础上进一步分析不完全信息博弈的粗糙均衡并讨论了不完全信息古诺博弈的粗糙均衡.本文在以上研究的基础上给出了不完全信息博弈的粗糙均衡的存在性定理并对 n 人古诺博弈的粗糙均衡进行了讨论.

1 预备知识

设 U 是论域，R 是一等价关系，则 (U, R) 称为近似空间.设 X 是 U 的子集，$x \in X \subset U$，则 $[x]_R$ 表示根据等价关系 R 构成的不可分辨元素的集合，为 R-元素集，所有等价类集合记为 $ind(R)$.用 U 中所有具有属性 R 的元素的集合来表达 X 时，则有的元素一定属于 X，而有的元素不一定属于 X.当给定近似空间 (U, R)，对于每一个子集 X 和一个等价关系 R，可根据 R 的基本集合的描述来划分集合 X，从而得出下近似和上近似的定义.

定义1[5] 设 $X \subset U$，R 是一个等价关系，那么当 X 可以由 $ind(R)$ 中的集合的并表示时，则 X 是 R 可定义的，否则，X 是 R 不可定义的.

定义2[5] 若集合 $R_-(X)=\{x \mid x \in U, [x]_R \subset X\}$，则称 $R_-(X)$ 是 $X(X \subset U)$ 的 R-下近似集.

定义3[5] 若 $R^-(X)=\{x \mid x \in U, [x]_R \cap X \neq \varnothing\}$，则称集合 $R^-(X)$ 是 $X(X \subset U)$ 的 R-上近似集.

定义4[5] 令 $R_-(X)=\{x \mid x \in U, [x]_R \subset X\}$ 为下近似集，$R^-(X)=\{x \mid x \in U, [x]_R \cap X \neq \varnothing\}$ 为上近似集.如果 $R^-(X)=R_-(X)$，则称 X 关于近似空间 (U, R) 是可定义的，否则称 X 关于近似空间 (U, R) 是粗糙的，简称为粗糙集.

下近似表示根据等价分类 R 判断一些元素(具有不可分辨性)组成的集合一定属于 X，即 $[x]_R$ 中的元素根据等价分类 R 一定属于 X.上近似表示通过 R，一些元素组成的集合与 X 的交集非空，即根据 R 其中有的元素可能属于 X，有的元素可能不属于 X.上近似集和下近似集之差被称为 X 的 R-边界集，记为 $BN_R(X)=R^-(X)-R_-(X)$.由于存在边界区域，集合中的某些元素既不能在全域的某个子集上被分类，也不能在它的补集上被分类，这就产生了不确定性.集合的边界区域越大，则精确度越低.

定义5[11] 集合 X 的近似精确度：设 $R_-(X)$ 和 $R^-(X)$ 分别是集合 $X(X \subset U)$ 的 R-下近似集和 R-上近似集，称 $d_R(X)=\dfrac{|R_-(X)|}{|R^-(X)|}$ 为集合 X 的 R-近似精度，其中 $|\cdot|$ 表示基数，即集合元素的个数.若 $R^-(X) \neq \varnothing$，则定义 $d_R(X)=1$，此时信息是完备的.本文证明需要用到以下几个定理.

定理1[15] $x^* \in X$ 是非合作博弈的Nash平衡点的充分必要条件为 $x^* \in X$ 是最佳回应映射 $F: X \longrightarrow P_0(X)$ 的不动点.

定理2[15] (Berge极大值定理)如果 $f: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续的，$G: Y \longrightarrow P_0(Y)$ 在 Y 上是连续的，且 $\forall y \in Y$，$G(y)$ 是非空紧集，则 $V(y)$ 在 Y 上必是连续的，且 $\forall y \in Y$，由 $M(y)=\{x \in G(y): f(x, y)=V(y)\}$ 定义的集值映射 $M: Y \longrightarrow P_0(X)$ 在 Y 上必是上半连续的.

定理3[16] (Kakutani-Fan-Glicksberg不动点定理)设X是一个局部凸Hausdorff拓扑向量空间的一个

空紧凸集，令 $\varphi: X \longrightarrow 2^X$ 是 X 上的一个集值映射，φ 上半连续且对于所有 $x \in X$，$\varphi(x)$ 是非空闭凸的，则 φ 有一个不动点 $x_0 \in X$，使得 $x_0 \in \varphi(x_0)$.

2　模型和 Nash 均衡的存在

下面先给出文献[17]中经典的 n 人静态贝叶斯博弈模型. 记 $-i = N \backslash \{i\}$ 为除了局中人 i 以外其他 $n-1$ 个局中人.

模型(A)[17]　设 $N=\{1, \cdots, n\}$ 为局中人集合，$\forall i \in N$，局中人的类型为集合 $\Theta_i=\{\theta_1^{(i)}, \cdots, \theta_m^{(i)}\}$. 局中人 i 的类型上的概率分布(先验知识)为 P_i. $X_i=\{x_1^{(i)}, \cdots, x_l^{(i)}\}$ 为局中人 i 的策略集. $u_i: X \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ 是局中人 i 的收益函数，其中 $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$，$\Theta=\prod_{i=1}^{n} \Theta_i$. 条件概率 $p_i=p_i(\theta_j^{(-i)} \mid \theta_j^{(i)})$，$i \in \{1, \cdots, n\}$，$j \in \{1, \cdots, m\}$ 表示局中人 i 在决定自己的类型为 $\theta_j^{(i)}$ 的情况下，局中人 i 对其他局中人类型 $\theta_j^{(-i)} \in \Theta_{-i}=\prod_{s \in N \backslash \{i\}} \Theta_s$ 的不确定性. 用 $\Gamma=\{\Theta_1, \cdots, \Theta_n; X_1, \cdots, X_n; p_1, \cdots, p_n; u_1, \cdots, u_n\}$ 表示此博弈.

古诺双寡头竞争经济模型是不完全信息博弈的一个经典例子. 在古诺双寡头竞争经济模型中，假设企业不知道其它企业是低成本还是高成本的，但是假定一个企业知道其他企业类型的概率分布. 为了更贴近现实情况，假设 P_i 是不容易得到的，因此，在这种情况下，贝叶斯博弈模型不再是合适的分析工具. 粗糙集理论是建立在分类机制的基础上的，它将分类理解为在特定空间上的等价关系，而等价关系构成了对该空间的划分. 基于粗糙集对于信息的分类作用并根据已知信息便能够推断出局中人类型(或是属性)上的近似精确度. 例如可以从公司的财务报表知道成本、盈利等信息，并根据这些信息推断出这个公司是成本低还是高)和是否是盈利型的. 建立博弈模型如下：

模型(B)　设 $N=\{1, \cdots, n\}$ 为局中人集合. 设 $\forall i \in N$，$Y_i=\{y_1^{(i)}, \cdots, y_n^{(i)}\}$ 为局中人 i 的信息集，$Y_{-i}=\{y_1^{(-i)}, \cdots, y_l^{(-i)}\}$，局中人 i 根据 Y_{-i} 中的知识对其他的 $n-1$ 位局中人进行分类. $\Theta_i=\{\theta_1^{(i)}, \cdots, \theta_m^{(i)}\}$ 为局中人 i 的类型集，$\Theta_{-i}=\{\theta_1^{(-i)}, \cdots, \theta_l^{(-i)}\}$. X_i 是局中人 i 的策略集. $u_i: X \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ 是局中人 i 的收益函数. 定义局中人 i 对于局中人 $-i$ 的类型判断映射 $g_i: Y_{-i} \longrightarrow \Theta_{-i}$. 局中人 i 确定局中人 $-i$ 属于类型 $\theta_j^{(-i)}$ 的近似精确度为 $d_i(Y_{-i})=\dfrac{|g_{i\_}(Y_{-i})|}{|g_i^{-}(Y_{-i})|}$，$0 \leqslant d_i(Y_{-i}) \leqslant 1$. 当 $d_i(Y_{-i})=1$ 时为完备信息博弈. 由文献[11]可知，局中人 i 的类型变化计算出的近似精确度之和为 1. 用 $G=\{X_1, \cdots, X_n; \Theta_1, \cdots, \Theta_n; d_1, \cdots, d_n; u_1, \cdots, u_n; Y_1, \cdots, Y_n;\}$ 表示此博弈. 设局中人 i 的粗糙期望效用函数为

$$f_i=\sum_{\theta_j^{(-i)}} d_i(Y_{-i}) u_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)}), i \in \{1, \cdots, n\}, j \in \{1, \cdots, m\}$$

定义 6　若存在策略组合 $x^* \in X$ 满足

$$\forall i \in N, f_i(x_i^*, x_{-i}^*; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})=\max_{v_i \in X_i} f_i(v_i, x_{-i}^*; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$$

则称 x^* 是博弈 G 的一个粗糙 Nash 均衡，

定理 4[15]　$i \in N$，设 X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空凸紧集，$u_i: X \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续，且 $\forall x_{-i} \in X_{-i}$，$x_i \longrightarrow u_i(x_i, x_{-i})$ 在 X_i 上是拟凹的，则此对策的 Nash 平衡点必存在.

定理 5　设 $G=\{X_1, \cdots, X_n; \Theta_1, \cdots, \Theta_n; d_1, \cdots, d_n; u_1, \cdots, u_n; Y_1, \cdots, Y_n\}$ 是一个满足以下条件的粗糙非合作博弈：设 $\forall i \in N$

(i) X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空凸紧集，

(ii) $u_i: X \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ 连续，

(iii) $\forall x_{-i} \in X_{-i}$，$x_i \longrightarrow u_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$ 在 X_i 上是拟凹的，

(iv) 令 $f_i=\sum_{x_{-i}} d_i(Y_{-i})u_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$,

则 G 有一个 Nash 均衡.

证　首先,$X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ 必是局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空凸紧集,其中,$\forall i \in N$,$\forall x_{-i} \in X_{-i}=\prod_{s \in N\setminus\{i\}} X_s$. 令

$$F_i(x_{-i})=\{f_i(\omega_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})=\max_{\mu_i \in X_i} f_i(\mu_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)}), \omega_i \in X_i\}$$

由于 u_i 连续,则显然 f_i 连续,且对于任意 x_{-i},$x_i \longrightarrow f_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$ 是连续的,又 X_i 是局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的非空凸紧集,可知 X_i 是闭集. 记

$$\max_{x_i \in X_i} f_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})=c,\ \forall w_i^m \in F_i(x_{-i}),\ w_i^m \to w_i$$

则 $w_i^m \in X_i$,因 X_i 是闭集,$w_i \in X_i$. 又 $f_i(w_i^m, x_{-i})=c$,因 f_i 连续,故 $f_i(w_i, x_{-i})=c$,$w_i \in F_i(x_{-i})$,$F_i(x_{-i})$ 必是闭集. 又 $w_i^1, w_i^2 \in F_i(x_{-i})$,$\forall \varepsilon \in (0, 1)$,因 $w_i^1, w_i^2 \in X_i$ 且 X_i 是闭集,故 $\varepsilon w_i^1+(1-\varepsilon)w_i^2 \in X_i$,$f(\varepsilon w_i^1+(1-\varepsilon)w_i^2, x_{-i}) \leqslant c$,又 $f_i(w_i^1, x_{-i})=f_i(w_i^2, x_{-i})=c$,$\forall x_{-i} \in X_{-i}$,$x_i \longrightarrow u_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$ 在 X_i 上是拟凹的,故 $x_i \longrightarrow f_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$ 在 X_i 上是拟凹的,则 $f(\varepsilon w_i^1+(1-\varepsilon)w_i^2, x_{-i}) \geqslant \min\{f_i(w_i^1, x_{-i}), f_i(w_i^2, x_{-i})\}=c$. 故 $f(\varepsilon w_i^1+(1-\varepsilon)w_i^2, x_{-i})=c$,$\varepsilon w_i^1+(1-\varepsilon)w_i^2 \in F_i(x_{-i})$,$F_i(x_{-i})$ 必是凸集. $\forall i \in N$,$F_i(x_{-i})$ 是非空闭凸集,因此 $F(x)=\prod_{i=1}^{n} F_i(x_{-i})$ 必是非空闭凸集. $\forall i \in N$,因 $f_i(x_i, x_{-i}; \theta_j^{(i)}, \theta_j^{(-i)})$ 连续,而 X_i 是闭集,由定理 2,集值映射 $F_i: X_{-i} \longrightarrow p_0(X_i)$ 必是上半连续的. 因此 $F(x)=\prod_{i=1}^{n} F_i(x_{-i})$ 在 X 上必是上半连续的,由定理 3 知存在 $x^* \in X$,使 $x^* \in F(x^*)$. 最后由定理 1 知 x^* 必是 G 的 Nash 均衡点.

推论 1　当 $d_i(Y_{-i})=1$ 时,定理 5 与 Nash 均衡定理 4 是等价的,此时为完全信息静态博弈.

3　算例

设 n 个企业生产同一产品,用 c_i^H 表示企业 i 是高成本,c_i^L 表示企业 i 是低成本,其中 $i \in \{1, \cdots, n\}$. 集合 $T_i=\{c_i^H, c_i^L\}$ 为企业 i 的类型集. 销售价格为 $P(Q)=a-Q$,$Q=q_1+\cdots+q_n$ 为市场产品总量. 将每个企业的单位成本记为 c_i. 企业 i 的净收益函数为 $C_i=q_i(a-Q-c_i)$. 对于每个企业所属类型的概率分布是未知的,设有限集 $X_i=\{x_1, \cdots, x_n\}$ 为企业 i 的信息集. 设定判断机制(等价分类关系),即 $R_i: x_i \longrightarrow \{c_i^H, c_i^L\}$. 因为企业 i 是知道自己的类型的,故只需对其他 $n-1$ 个企业的类型做出近似判断. 企业 i 首先对企业 j 的类型作判断. 此时固定其他 $n-2$ 个企业的类型,为了便于分析,可假设其他 $n-2$ 个企业的类型同时为低成本或高成本. 假设企业 j 根据判断 R_j 被判定为高成本的元素有 m 个,即高成本下近似集的基数为 m,此时等价关系为 c_j^H,故下近似集可记为 $|R_{i\_}(c_2^H)|=m$,X_j 的上近似集为其自身,基数为 n,记为 $|R_i^-(c_j^H)|=n$,则企业 i 认为企业 j 是高成本的近似精度为 $d_i(c_j^H)=\dfrac{|R_{i\_}(c_j^H)|}{|R_i^-(c_j^H)|}=\dfrac{m}{n}$. 又设低成本的元素有 l 个,也就是低成本下近似集的基数为 l,此时等价关系为 c_j^L,故下近似集可记为 $|R_{i\_}(c_j^L)|=l$,则企业 i 认为企业 j 是低成本的近似精度为 $d_i(c_j^L)=\dfrac{|R_{i\_}(c_j^L)|}{|R_i^-(c_j^L)|}=\dfrac{l}{n}$,且 $d_i(c_j^H)+d_i(c_j^L)=1$. 企业 i 的粗糙期望效益为

$$f_i=\frac{m}{n}q_i(a-q_1-\cdots-q_{j-1}-q_j^H-q_{j+1}-\cdots-q_{i-1}-q_i-q_{i+1}-\cdots-q_n-c_i)+$$

$$\frac{m}{n}q_i(a-q_1-\cdots-q_{j-1}-q_j^H-q_{j+1}-\cdots-q_{i-1}-q_i-q_{i+1}-\cdots-q_n-c_i)$$

根据前面的假设，其他 $n-2$ 个企业的类型同时为低成本时(因为为低成本和高成本的分析方法和过程是一样的)，令 $f_i=\frac{m}{n}q_i(a-c_i-q_j^H-\triangle^L)+\frac{l}{n}q_i(a-c_i-q_j^L-\triangle^L)$，其中

$$q_1^L-\cdots-q_{j-1}^L-q_{j+1}^L-\cdots-q_{i-1}^L-q_{i+1}^L-\cdots-q_n^L=\triangle^L$$

企业 i 会选择使得粗糙期望效用函数最大化的产量，设为 q_i^*，即 $q_i^*\in \operatorname{argmax}\left\{f_i=\frac{m}{n}q_i(a-c_i-q_j^H-\triangle^L)+\frac{l}{n}q_i(a-c_i-q_j^L-\triangle^L)\right\}$.

令 $\frac{m}{n}q_i(a-c_i-q_j^H-\triangle^L)+\frac{l}{n}q_i(a-c_i-q_j^L-\triangle^L)=0$，对 q_i 求一阶导数得 $q_i^*=\frac{1}{2}(a-c_i-\frac{m}{n}q_j^H-\frac{l}{n}q_j^L-\triangle^L)$.

当企业 i 是低成本时有

$$q_i^{L*}=\frac{1}{2}\left(a-c_i^L-\frac{m}{n}q_j^H-\frac{l}{n}q_j^L-\triangle^L\right)$$

当企业 i 是高成本时有

$$q_i^{H*}=\frac{1}{2}\left(a-c_i^H--\frac{m}{n}q_j^H-\frac{l}{n}q_j^L-\triangle^L\right)$$

同时，企业 j 在做决策时也会考虑其他人的类型，讨论企业 j 对企业 i 类型所做的判断. 设根据判断 $X_i=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 里企业 i 为高成本的元素有 k 个，也就是高成本下近似集的基数为 k，此时等价关系为 c_j^H，故有 $|R_{i\_}(c_i^H)|=k$，$|R_i^-(c_i^H)|=n$，故企业 j 认为企业 i 是高成本的近似精度为 $d_j(c_i^H)=\frac{|R_{i\_}(c_i^H)|}{|R_i^-(c_i^H)|}=\frac{k}{n}$. 又设为低成本的元素有 h 个，故有 $|R_{i\_}(c_i^L)|=h$，$|R_i^-(c_i^L)|=n$，故企业 j 认为企业 i 是低成本的近似精度为 $d_j(c_i^L)=\frac{|R_{i\_}(c_i^L)|}{|R_i^-(c_i^L)|}=\frac{l}{n}$，且 $d_j(c_i^H)+d_j(c_i^L)=1$. 同理，当企业 j 是低成本时有

$$q_j^{L*}=\frac{1}{2}\left(a-c_j^L-\frac{k}{n}q_i^H-\frac{h}{n}q_i^L-\Delta^L\right)$$

当企业 j 是高成本时有

$$q_j^{H*}=\frac{1}{2}\left(a-c_j^H--\frac{k}{n}q_i^H-\frac{h}{n}q_i^L-\triangle^L\right)$$

因为企业 i 对其他 $n-2$ 个企业的分析过程和对企业 j 的类似. 故用相同的方法可以求出其他 $n-2$ 个企业的最优产量 q_g^{L*}，q_g^{H*}，$g\neq i,j$. 故当每个企业都选择最优产量时，所构成的产量组合就为粗糙 Nash 均衡. 因为每个企业有两种类型，故共有 2^n 种均衡组合.

值得注意的是，本文中仅讨论了固定其他 $n-2$ 个企业都是低成本的情况，当然也可以假设其他 $n-2$ 个企业的类型不相同或都为高成本，这正好符合现实经济的复杂性和变动性.

4　结论

本文研究了基于粗糙集上的不完全信息非合作博弈. 证明了粗糙 Nash 均衡的存在定理. 模型(B) 是对模型(A) 的一种扩展，极大地保留了原始信息的客观性，具有更强的实用性和理论价值. 本文仅研究了模型(B) 的均衡解存在性问题，对于其均衡解的稳定性研究将是下一步的工作.

参考文献:

[1] ZADEH L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[2] BILLOT A. Economic Theory of Fuzzy Equilibria: An Axiomatic Analysis [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1992.

[3] HUANG N. Existence of Equilibrium for Generalized Abstract Fuzzy Economies [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117(1): 151-156.

[4] KYU W, KIM. Generalized Fuzzy Games and Fuzzy Equilibria [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 122(2): 293-301.

[5] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer & Information Sciences, 1982, 11(5): 341-356.

[6] SCALZO V. On the Existence of Maximal Elements, Fixed Points and Equilibria of Generalized Games in a Fuzzy Environment [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2015, 272: 126-133.

[7] YANG Z, WANG A Q. Existence and Stability of the α-Core for Fuzzy Games [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2018, 341: 59-68.

[8] VAN HUNG N, TAM V M, O'REGAN D, et al. A New Class of Generalized Multiobjective Games in Bounded Rationality with Fuzzy Mappings: Structural (Λ, ε) [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2020, 372: 112735.

[9] ZHOU L, JIA W S, LIU L P. Essential Stability of Fuzzy Equilibria for Generalized Multiobjective Games with Fuzzy Constraint Mappings [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2022, 447: 113-122.

[10] YAO J T, HERBERT J P. A Game-Theoretic Perspective on Rough Set Analysis [J]. Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications (Natural Science Edition), 2008, 20(3): 291-298.

[11] 眢廷全，朱天博. 博弈论的粗集模型 [J]. 中国传媒大学学报(自然科学版)，2010，17(2)：19-26.

[12] HERBERT J P, YAO J T. Game-Theoretic Rough Sets [J]. Fundamenta Informaticae, 2011, 108(3-4): 267-286.

[13] AZAM N, YAO J T. Analyzing Uncertainties of Probabilistic Rough Set Regions with Game-Theoretic Rough Sets [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2014, 55(1): 142-155.

[14] 周辉. 基于粗糙集的不完全信息静态博弈及其均衡分析 [J]. 太原师范学院学报(自然科学版)，2014，13(3)：71-73，87.

[15] 俞建. 博弈论与非线性分析 [M]. 北京：科学出版社，2008.

[16] GLICKSBERG I L. A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem, with Application to Nash Equilibrium Points [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1952, 3(1): 170-174.

[17] HARSANYI J C. Games with Incomplete Information Played by "Bayesian" Players, I-III [J]. Management Science, 2004, 50(12 Supplement): 1804-1817.

责任编辑　张枸