第 48 卷 第 8 期　　西南师范大学学报(自然科学版)　　2023 年 8 月
Vol. 48 No. 8　　Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition)　　Aug. 2023

DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.08.001

关于 k-Riemann-Liouville 分数阶积分的 Ostrowski 型积分不等式①

连铁艳，　党筱楠

陕西科技大学 数学与数据科学学院，西安 710021

摘要：引入 k-Riemann-Liouville 分数阶积分和 h-凸函数，通过建立 k-Riemann-Liouville 分数阶积分的 Ostrowski 型积分不等式，构造了一些新的 Hermite-Hadamard 型积分不等式. 相比较于已有的一些结果，所得结果在积分形式和数据点类型两个方面有一定的优势，使得 Hermite-Hadamard 型积分不等式适用范围更广. 最后给出 Ostrowski 型 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式在概率方面的应用.

关 键 词：Hermite-Hadamard 型积分不等式；Ostrowski 型积分不等式；h-凸函数；k-Riemann-Liouville 分数阶积分

中图分类号：O177.1；O178　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000-5471(2023)08-0001-09

Ostrowski Type Integral Inequalities for k-Riemann-Liouville Fractional Integral

LIAN Tieyan，　DANG Xiaonan

School of Mathematics and Data Science, Shaanxi University of Science and Technology, Xi'an 710021, China

Abstract: By introducing k-Riemann-Liouville fractional integrals and h-convex function, and establishing Ostrowski type integral inequalities for k-Riemann-Liouville fractional integral, some new Hermite-Hadamard type integral inequalities are established. Compared with some existing results, the obtained results have some advantages in integral form and data point type, which makes the Hermite-Hadamard type integral inequality more widely applicable. Finally, an application of Ostrowski type k-Riemann Liouville fractional integral inequality in probability is given.

Key words: Hermite-Hadamard type integral inequality; Ostrowski type integral inequality; h-convex function; k-Riemann-Liouville fractional integral

相较于整数阶微积分而言，分数阶微积分的优势在于能够更加精确地描述复杂的机械和力学过程. 特别地，分数阶积分不等式有助于确定某些分数阶偏微分方程的解，为分数阶边界解提供上界和下界. 通过引入分数阶积分算子来探索某些扩展和推广凸性，在数学问题解的优化中起着非常重要的作用[1-3].

① 收稿日期：2022-12-11
基金项目：国家自然科学基金项目(11801342)；陕西省自然科学基础研究计划项目(2023-JC-YB-043).
作者简介：连铁艳，副教授，博士，主要从事算子不等式的研究.

在本文中，记 $\mathbb{R}$ 是实数域，$I \subset \mathbb{R}$，I^{o} 是 I 的内部. 文献[4]给出了凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式.

定理 1[4] 设 $f: I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是凸函数，对于任意 $a, b \in I$，$a < b$，则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{1}$$

关于 Hermite-Hadamard 型积分不等式的各种新证明、改进、加细和推广，可参见文献[4-14].

Hermite-Hadamard 型积分不等式提供了连续凸函数平均值的估计方法，与之有密切关系的还有 Ostrowski 型积分不等式. 如果 $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I 上的可导函数，且 $f' \in L[a, b]$，$|f'(x)| \leqslant M$，则下面不等式称为 Ostrowski 型积分不等式[4]：

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(u)\mathrm{d}u \right| \leqslant \frac{M}{b-a}\left[\frac{(x-a)^{2}+(b-x)^{2}}{2}\right] \tag{2}$$

Riemann-Liouville 分数阶积分算子是非整数阶积分算子的第一个公式.

定义 1[6] 设 $\alpha > 0$，$f \in L_{1}[a, b]$，则函数 f 的 α 阶左 Riemann-Liouville 分数阶积分和 α 阶右 Riemann-Liouville 分数阶积分分别定义为

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{a}^{x} (x-t)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad x > a$$

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{b} (t-x)^{\alpha-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad x < b$$

其中 $\Gamma(\alpha)$ 是 Gamma 函数，即 $\Gamma(\alpha) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$.

文献[7]引入了 Riemann-Liouville 分数阶积分，证明了与(1)式的第二个不等式有关的结论：

引理 1[7] 设 $f: I^{o} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$\forall a, b \in I^{o}$，$a < b$. 如果 $f' \in L[a, b]$，则下面 Riemann-Liouville 分数阶积分等式成立：

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] = \frac{b-a}{2}\int_{0}^{1}\left[(1-t)^{\alpha} - t^{\alpha}\right] f'(ta+(1-t)b)\mathrm{d}t \tag{3}$$

定理 2[7] 设 $f: I^{o} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$\forall a, b \in I^{o}$，$a < b$. 如果 $|f'|$ 是$[a, b]$上的凸函数，则下面 Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2(b-a)^{\alpha}}\left[J_{a+}^{\alpha} f(b) + J_{b-}^{\alpha} f(a)\right] \right| \leqslant \frac{b-a}{2(\alpha+1)}\left(1-\frac{1}{2^{\alpha}}\right)\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \tag{4}$$

关于 Riemann-Liouville 分数阶积分不等式的最新结果可参见文献[11-12]. 文献[15]引入了 Riemann-Liouville 分数阶积分，证明了与(1)式的第一个不等式有关的结论：

引理 2[15] 设 f 是在 I 上的实值函数，且在 I^{o} 上可微，$a, b \in I$ 且 $a < b$，$f' \in L[a, b]$，则下面 Riemann-Liouville 分数阶积分等式成立：

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[\left(\frac{2}{a-b}\right)^{\alpha-1} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^{\alpha} f(a) - \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha-1} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^{\alpha} f(b)\right] = \\ & \frac{b-a}{4}\left[\int_{0}^{1} t^{\alpha} f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t - \int_{0}^{1} t^{\alpha} f'\left(t\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\mathrm{d}t\right] \end{aligned} \tag{5}$$

定理 3[15] 设 $f: I^{o} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$\forall a, b \in I^{o}$，$a < b$. 如果 $|f'|$ 是$[a, b]$上的凸函数，则下面 Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\begin{aligned} & \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}\left[\left(\frac{2}{a-b}\right)^{\alpha-1} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^{\alpha} f(a) - \left(\frac{2}{b-a}\right)^{\alpha-1} J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)+}^{\alpha} f(b)\right] \right| \leqslant \\ & \frac{b-a}{4(\alpha+1)}\left[|f'(a)| + |f'(b)|\right] \end{aligned} \tag{6}$$

文献[16]提出了 Riemann-Liouville 分数阶积分的推广，即 k-Riemann-Liouville 分数阶积分：

定义 2[16] 设 $\alpha > 0$，$f \in L_{1}[a, b]$，函数 f 的 α 阶左 k-Riemann-Liouville 分数阶积分和 α 阶右 k-Riemann-Liouville 分数阶积分分别定义为

$$J_{a^+}^{\alpha,k} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad x > a$$

$$J_{b^-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(t)\mathrm{d}t \qquad x < b$$

其中 $k>0$，$\Gamma_k(\alpha)$ 是 k-Gamma 函数，即 $\Gamma_k(\alpha)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{t^k}{k}} t^{\alpha-1}\mathrm{d}t$.

明显地，当 $k=1$ 时，k-Riemann-Liouville 分数阶积分就是 Riemann-Liouville 分数阶积分. 若 $k=1$ 且 $\alpha=1$，则 k-Riemann-Liouville 分数阶积分就是 Riemann 积分.

本文的目的是引入 k-Riemann-Liouville 分数阶积分和 h- 凸函数，通过建立 Ostrowski 型积分不等式，由取特殊值法，构造出更多点处新的 Hermite-Hadamard 型积分不等式，从而拓宽 Hermite-Hadamard 型积分不等式的适用范围，并且推广已有的一些结论.

1　k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式

要建立 Ostrowski 型 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式，首先给出相关的等式.

定理 4　设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，则对 $\forall x,y \in (a,b)$，有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式：

$$\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}} f(x) + (b-y)^{\frac{\alpha}{k}} f(y)}{b-a} - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left[J_{x^-}^{\alpha,k} f(a) + J_{y^+}^{\alpha,k} f(b)\right] =$$

$$\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}} f'(tx+(1-t)a)\mathrm{d}t - \frac{(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}} f'(ty+(1-t)b)\mathrm{d}t \tag{7}$$

证　由分部积分法及变量代换 $u=tx+(1-t)a$，利用 k-Riemann-Liouville 分数阶积分的定义，有

$$\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}} f'(tx+(1-t)a)\mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{x-a}\left[f(x) - \frac{\alpha}{k}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}-1} f(tx+(1-t)a)\mathrm{d}t\right] =$$

$$\frac{1}{x-a} f(x) - \frac{\alpha}{k(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}}\int_a^x (u-a)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(u)\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{x-a} f(x) - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}} \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x (u-a)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(u)\mathrm{d}u =$$

$$\frac{1}{x-a} f(x) - \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}} J_{x^-}^{\alpha,k} f(a) \tag{8}$$

类似地，

$$\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}} f'(ty+(1-t)b)\mathrm{d}t =$$

$$-\frac{1}{b-y} f(y) - \frac{\alpha}{k(y-b)^{\frac{\alpha}{k}+1}}\int_b^y (u-b)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(u)\mathrm{d}u =$$

$$-\frac{1}{b-y} f(y) + \frac{\alpha}{k(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1}}\int_y^b (b-u)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(u)\mathrm{d}u =$$

$$-\frac{1}{b-y} f(y) + \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1}} \frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_y^b (b-u)^{\frac{\alpha}{k}-1} f(u)\mathrm{d}u =$$

$$-\frac{1}{b-y} f(y) + \frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1}} J_{y^+}^{\alpha,k} f(b) \tag{9}$$

由(8) 式和(9) 式，经过简单的计算，则(7) 式成立.

推论 1　设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，则对

$\forall x \in (a,b)$，有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式：

$$\frac{[(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}+(b-x)^{\frac{\alpha}{k}}]}{b-a}f(x)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{x^+}^{\alpha,k}f(b)]=$$

$$\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'(tx+(1-t)a)\mathrm{d}t-\frac{(b-x)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'(tx+(1-t)b)\mathrm{d}t \tag{10}$$

证 在定理 4 中，利用(7)式，令 $x=y$ 即推论 1 得证.

推论 2[11] 设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，则对 $\forall x \in (a,b)$，有 Riemann-Liouville 分数阶积分等式：

$$\frac{[(x-a)^{\alpha}+(b-x)^{\alpha}]}{b-a}f(x)-\frac{\Gamma(\alpha+1)}{b-a}[J_{x^-}^{\alpha}f(a)+J_{x^+}^{\alpha}f(b)]=$$

$$\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)a)\mathrm{d}t-\frac{(b-x)^{\alpha+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\alpha}f'(tx+(1-t)b)\mathrm{d}t \tag{11}$$

证 由推论 1，利用(10)式，取 $k=1$ 即推论 2 得证.

推论 3 设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，$r \geqslant 1$ 且 $r \geqslant m \geqslant 0$，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式成立：

$$\frac{f\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)+f\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)}{2}-$$

$$\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{r}{m(b-a)}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\left[J_{\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)^+}^{\alpha,k}f(b)\right]=$$

$$\frac{m(b-a)}{2r}\left[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{(r-m)a+mb}{r}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{ma+(r-m)b}{r}+(1-t)b\right)\mathrm{d}t\right] \tag{12}$$

证 在定理 4 中，利用(7)式，取 $x=\frac{(r-m)a+mb}{r}$ 和 $y=\frac{ma+(r-m)b}{r}$，(12)式成立.

注 1 利用推论 3 的结果，对参数 α,k,m,r 取特殊的值，可得到函数在一些特殊点处的普通积分或者分数阶积分等式. 比如，令 $m=r$，$k=1$，经简单计算，则引理 1 成立. 利用这些等式，可以讨论函数在特殊点处的梯形积分不等式，即推广 Hermite-Hadamard 型积分不等式(1)中右侧项与中间项差值的估计.

推论 4 设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，$r \geqslant 1$ 且 $r \geqslant m \geqslant 0$，则有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式：

$$\left[(b-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(\frac{r-m}{r}\right)^{\frac{\alpha}{k}}+(b-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right]f\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)-$$

$$\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left[J_{\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)^+}^{\alpha,k}f(b)\right]=$$

$$\left(\frac{r-m}{r}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{ma+(r-m)b}{r}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t-$$

$$\left(\frac{m}{r}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}(b-a)^{\frac{\alpha}{k}}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{ma+(r-m)b}{r}+(1-t)b\right)\mathrm{d}t \tag{13}$$

证 由推论 1，利用(10)式，取 $x=\frac{(r-m)a+mb}{r}$，经过简单的计算，则可得(13)式成立.

推论 5 设 $f: I^o \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b \in I^o$，$a<b$. 如果 $f' \in L[a,b]$，则有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分等式：

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}^{\alpha,k}f(b)\right)=$$

$$\frac{b-a}{4}\left[\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\mathrm{d}t-\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\mathrm{d}t\right] \tag{14}$$

证　由推论 4，利用(13) 式，取 $r=2m$，经过简单的计算，则可得(14) 式成立.

注 2　利用推论 4 的结果，当参数 α,k,m,r 取特殊的值时，可得到函数在一些特殊点处的普通积分或者分数阶积分等式. 比如，令 $r=2m$，$k=1$，则引理 2 成立. 利用这些等式，可以讨论函数在特殊点处的积分不等式，即推广 Hermite-Hadamard 型积分不等式(1) 中左侧项与中间项差值的估计.

2　k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式

作为通常凸函数的推广，文献[6] 介绍了 h- 凸函数的定义：

定义 3[6]　设$(0,1)\subset J$，$h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$为非负函数. 如果对于非负函数 $f:I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$，$\forall x,y\in I$，$\lambda\in(0,1)$，有

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant h(\lambda)f(x)+h(1-\lambda)f(y)\tag{15}$$

则称 f 是 I 上的 h- 凸函数. 如果不等式(15) 反向，则称 f 是 I 上的 h- 凹函数.

明显地，若 $h(\lambda)=\lambda^s$，$s\in(0,1)$，则 h- 凸函数就是第二意义上的 s- 凸函数；若 $h(\lambda)=\lambda$，则 h- 凸函数就是通常的凸函数，h- 凹函数就是通常的凹函数；分别当 $h(\lambda)=1$，$h(\lambda)=\dfrac{1}{t}$，$h(\lambda)=\dfrac{1}{t^s}(s\in(0,1))$ 时，利用(15) 式，分别可定义 P- 函数、Godunova-Levin 函数、第二意义上的 s-Godunova-Levin 函数. 关于凸函数的经典概念在各种不同的方向上的推广研究可参见文献[8-10].

我们首先建立 h- 凸函数的 Ostrowski 型 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式. 然后通过取函数的特殊值，就可以得到多个 Hermite-Hadamard 型积分不等式的推广形式. 比如，得到的某些结论就是对定理 2、定理 3 的推广.

定理 5　设 $f:I^o\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b\in I^o$，$a<b$. 如果 $f'\in L[a,b]$ 且 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凸函数，$|f'|\leqslant M$，则对 $\forall x,y\in(a,b)$，有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式：

$$\left|\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}f(x)+(b-y)^{\frac{\alpha}{k}}f(y)}{b-a}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}(J_{x^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{y^+}^{\alpha,k}f(b))\right|\leqslant$$

$$\frac{M((x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}+(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1})}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}[h(t)+h(1-t)]\mathrm{d}t\tag{16}$$

证　因为 $|f'|$ 是$[a,b]$ 上的 h- 凸函数且 $|f'|\leqslant M$，所以有

$$|f'(tx+(1-t)a)|\leqslant h(t)|f'(x)|+h(1-t)|f'(a)|\leqslant[h(t)+h(1-t)]M$$

和

$$|f'(ty+(1-t)b)|\leqslant h(t)|f'(y)|+h(1-t)|f'(b)|\leqslant[h(t)+h(1-t)]M$$

由定理 4，则

$$\left|\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}f(x)+(b-y)^{\frac{\alpha}{k}}f(y)}{b-a}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}(J_{x^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{y^+}^{\alpha,k}f(b))\right|\leqslant$$

$$\frac{(x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}|f'(tx+(1-t)a)|\mathrm{d}t+\frac{(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1}}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}|f'(ty+(1-t)b)|\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{M((x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}+(b-y)^{\frac{\alpha}{k}+1})}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}[h(t)+h(1-t)]\mathrm{d}t$$

推论 6　设 $f:I^o\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b\in I^o$，$a<b$. 如果 $f'\in L[a,b]$ 且 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h -凸函数，$|f'|\leqslant M$，则对 $\forall x\in(a,b)$，有 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式：

$$\left|\frac{((x-a)^{\frac{\alpha}{k}}+(b-x)^{\frac{\alpha}{k}})}{b-a}f(x)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}(J_{x^-}^{\alpha,k}f(a)+J_{x^+}^{\alpha,k}f(b))\right|\leqslant$$

$$\frac{M((x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}+(b-x)^{\frac{\alpha}{k}+1})}{b-a}\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}[h(t)+h(1-t)]\mathrm{d}t\tag{17}$$

证　由定理 5，利用(16) 式，令 $x=y$，则推论 6 得证.

注 3　在推论 6 的条件下，如果令 $k=1$，则由(17) 式，可得文献[17] 中的定理 1，即给出关于

Riemann-Liouville 分数阶积分的 Ostrowski 型积分不等式；如果令 $\alpha=1$，$k=1$，注意 $|f'(tx+(1-t)a)|\leqslant M$ 和 $|f'(tx+(1-t)b)|\leqslant M$，采用定理 5 的证明可得(2)式成立.

定理 6 设 $(0,1)\subset J$，$h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为非负函数，$f:I^{o}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$a,b\in I^{o}$，$a<b$，$f'\in L[a,b]$，如果 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凸函数，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right)\right|\leqslant$$
$$\frac{b-a}{4}(|f'(a)|+|f'(b)|)\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}\left(h\left(\frac{t}{2}\right)+h\left(1-\frac{t}{2}\right)\right)\mathrm{d}t \tag{18}$$

证 因为

$$t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)a=\left(1-\frac{t}{2}\right)a+\frac{1}{2}tb$$

且 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凸函数，所以

$$\left|f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|\leqslant h\left(1-\frac{t}{2}\right)|f'(a)|+h\left(\frac{t}{2}\right)|f'(b)|$$

同理

$$\left|f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|\leqslant h\left(\frac{t}{2}\right)|f'(a)|+h\left(1-\frac{t}{2}\right)|f'(b)|$$

由推论 5，有

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right)\right|\leqslant$$
$$\frac{b-a}{4}\int_0^1\left[t^{\frac{\alpha}{k}}\left|f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)a\right)\right|+t^{\frac{\alpha}{k}}\left|f'\left(t\,\frac{a+b}{2}+(1-t)b\right)\right|\right]\mathrm{d}t\leqslant$$
$$\frac{b-a}{4}(|f'(a)|+|f'(b)|)\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}\left[h\left(\frac{t}{2}\right)+h\left(1-\frac{t}{2}\right)\right]\mathrm{d}t$$

推论 7 设 $(0,1)\subset J$，$h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为非负函数，$f:I^{o}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$a,b\in I^{o}$，$a<b$，$f'\in L[a,b]$，如果 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的凸函数，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{b-a}\left(\frac{2}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}-1}\left(J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{\left(\frac{a+b}{2}\right)^+}f(b)\right)\right|\leqslant$$
$$\frac{k(b-a)}{4(\alpha+k)}(|f'(a)|+|f'(b)|) \tag{19}$$

注 4 令 $k=1$，利用(19)式可得文献[11]中的结论，即定理 3.

定理 7 设 $(0,1)\subset J$，$h:J\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 为非负函数，$f:I^{o}\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^{o} 上的可微函数，$a,b\in I^{o}$，$a<b$，$f'\in L[a,b]$，$r\geqslant 1$ 且 $r\geqslant m\geqslant 0$，如果 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h -凸函数，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left|\frac{f\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)+f\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{r}{m(b-a)}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\left(J^{\alpha,k}_{\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)^+}f(b)\right)\right|\leqslant$$
$$\frac{m(b-a)}{2r}(|f'(a)|+|f'(b)|)\int_0^1 t^{\frac{\alpha}{k}}\left[h\left(\frac{m}{r}t\right)+h\left(1-\frac{m}{r}t\right)\right]\mathrm{d}t \tag{20}$$

证 因为

$$t\,\frac{(r-m)a+mb}{r}+(1-t)a=\frac{m}{r}tb+\left(1-\frac{m}{r}t\right)a$$

且 $|f'|$ 是 $[a,b]$ 上的 h- 凸函数，所以

$$\left|f'\left(t\frac{(r-m)a+mb}{r}+(1-t)a\right)\right|\leqslant h\left(\frac{m}{r}t\right)|f'(b)|+h\left(1-\frac{m}{r}t\right)|f'(a)| \tag{21}$$

同理

$$\left|f'\left(t\frac{ma+(r-m)b}{r}+(1-t)b\right)\right|\leqslant h\left(\frac{m}{r}t\right)|f'(a)|+h\left(1-\frac{m}{r}t\right)|f'(b)| \tag{22}$$

利用(12),(21) 和(22) 式，则(20) 式成立.

推论 8 设该推论条件与定理 7 相同，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left|\frac{f\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)+f\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{r}{m(b-a)}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\left(J^{\alpha,k}_{\left(\frac{(r-m)a+mb}{r}\right)^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{\left(\frac{ma+(r-m)b}{r}\right)^+}f(b)\right)\right|\leqslant$$

$$\frac{mk(b-a)}{2r(\alpha+k)}(|f'(a)|+|f'(b)|) \tag{23}$$

定理 8 设 $f:I^o\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 是 I^o 上的可微函数，$\forall a,b\in I^o$，$a<b$. 如果 $|f'|$ 是$[a,b]$上的凸函数，则下面 k-Riemann-Liouville 分数阶积分不等式成立：

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}}(J^{\alpha,k}_{b^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{a^+}f(b))\right|\leqslant$$

$$\frac{k(b-a)}{2(\alpha+k)}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}}\right](|f'(a)|+|f'(b)|) \tag{24}$$

证 由推论 3，有

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}}(J^{\alpha,k}_{b^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{a^+}f(b))=$$

$$\frac{b-a}{2}\int_0^1(t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}})f'(tb+(1-t)a)\,\mathrm{d}t$$

于是

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{\Gamma_k(\alpha+k)}{2}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\frac{\alpha}{k}}(J^{\alpha,k}_{b^-}f(a)+J^{\alpha,k}_{a^+}f(b))\right|\leqslant$$

$$\frac{b-a}{2}\int_0^1|t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}|\,|f'(tb+(1-t)a)|\,\mathrm{d}t\leqslant$$

$$\frac{b-a}{2}\int_0^1|t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}|\,[t|f'(b)|+(1-t)|f'(a)|]\mathrm{d}t=$$

$$\frac{b-a}{2}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}][t|f'(b)|+(1-t)|f'(a)|]\mathrm{d}t+\right.$$

$$\left.\int_{\frac{1}{2}}^1[t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}][t|f'(b)|+(1-t)|f'(a)|]\mathrm{d}t\right\}=$$

$$\frac{b-a}{2}(K_1+K_2) \tag{25}$$

其中 K_1,K_2 分别为

$$K_1=|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}]t\,\mathrm{d}t+|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}](1-t)\,\mathrm{d}t=$$

$$|f'(b)|\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}]t\,\mathrm{d}t+|f'(a)|\int_0^{\frac{1}{2}}[(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}-t^{\frac{\alpha}{k}}](1-t)\,\mathrm{d}t=$$

$$|f'(b)|\left[\frac{k^2}{(\alpha+k)(\alpha+2k)}-\frac{k}{\alpha+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}\right]+$$

$$|f'(a)|\left[\frac{k}{\alpha+2k}-\frac{k}{\alpha+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}\right]$$

$$K_2=\int_{\frac{1}{2}}^{1}[t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}][t\,|f'(b)|+(1-t)\,|f'(a)|]\mathrm{d}t=$$

$$|f'(b)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}[t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}]t\,\mathrm{d}t+|f'(a)|\int_{\frac{1}{2}}^{1}[t^{\frac{\alpha}{k}}-(1-t)^{\frac{\alpha}{k}}](1-t)\mathrm{d}t=$$

$$|f'(b)|\left[\frac{k}{\alpha+2k}-\frac{k}{\alpha+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}\right]+|f'(a)|\left[\frac{k^2}{(\alpha+k)(\alpha+2k)}-\frac{k}{\alpha+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\alpha}{k}+1}\right]$$

在(25)式中，带入 K_1，K_2 则有(24)式成立.

注 5　令 $k=1$，利用(24)式可得文献[5]中的结论，即定理 2.

3　在概率方面的应用

令 X 是区间$[a,b]$上的连续型随机变量，X 的概率密度函数为 $p(x):[a,b]\longrightarrow(0,+\infty)$，则其分布函数为

$$F(x)=\Pr(X\leqslant x)=\int_a^x p(t)\mathrm{d}t$$

r 阶矩为

$$E(X^r)=\int_a^b t^r p(t)\mathrm{d}t \qquad r=1,2,3\cdots$$

若$[x_1,x_2]\subset[a,b]$，记 $E_{[x_1,x_2]}(X^r)=\int_{x_1}^{x_2}t^r p(t)\mathrm{d}t$.

利用 k-Riemann-Liouville 分数阶积分的定义及随机变量函数的矩计算公式，则

$$J_{a+}^{\alpha,k}p(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}E_{[a,x]}((x-X)^{\frac{\alpha}{k}-1})$$

$$J_{b-}^{\alpha}p(x)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}E_{[x,b]}((X-x)^{\frac{\alpha}{k}-1})$$

定理 9　设连续型随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 在$[a,b]$上可微，密度函数 $F'(x)$ 是$[a,b]$上的凸函数且 $|F'(x)|\leqslant M$，则

$$\frac{1}{b-a}\left|E_{[x,b]}((b-X)^{\frac{\alpha}{k}})-E_{[a,x]}((X-a)^{\frac{\alpha}{k}})\right|\leqslant\frac{kM((x-a)^{\frac{\alpha}{k}+1}+(b-x)^{\frac{\alpha}{k}+1})}{(\alpha+k)(b-a)} \tag{26}$$

证　利用分部积分法，分布函数的性质及随机变量函数的矩计算公式，有

$$J_{x-}^{\alpha,k}F(a)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x(t-a)^{\frac{\alpha}{k}-1}F(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}\int_a^x F(t)\mathrm{d}(t-a)^{\frac{\alpha}{k}}=$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}\left[F(x)(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}-\int_a^x(t-a)^{\frac{\alpha}{k}}F'(t)\mathrm{d}t\right]=$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}[F(x)(x-a)^{\frac{\alpha}{k}}-E_{[a,x]}((X-a)^{\frac{\alpha}{k}})] \tag{27}$$

和

$$J_{x+}^{\alpha,k}F(b)=\frac{1}{k\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b(b-t)^{\frac{\alpha}{k}-1}F(t)\mathrm{d}t=-\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}\int_x^b F(t)\mathrm{d}(b-t)^{\frac{\alpha}{k}}=$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}\left[F(x)(b-x)^{\frac{\alpha}{k}}+\int_x^b(b-t)^{\frac{\alpha}{k}}F'(t)\mathrm{d}t\right]=$$

$$\frac{1}{\alpha\Gamma_k(\alpha)}[F(x)(b-x)^{\frac{\alpha}{k}}+E_{[x,b]}((b-X)^{\frac{\alpha}{k}})] \tag{28}$$

由推论 6，利用(17)，(26)，(27)式以及概率密度函数 $F'(x)$ 的有界性和凸性，则定理 9 得证.

推论 9　设定理 9 的条件满足，则当 $k=\alpha=1$ 时，对 $\forall x\in\mathbb{R}$，有

$$\left|\Pr(X\leqslant x)-\frac{b-E(X)}{b-a}\right|\leqslant\frac{M((x-a)^2+(b-x)^2)}{2(b-a)}$$

参考文献：

[1] MILLER K S, ROSS B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations [M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1993.

[2] PODLUBNY I. Fractional Differential Equations[M]. San Diego: Academic press, 1999.

[3] 黎君. 一类凸不等式系统的鲁棒半径和不确定复分式规划问题的最优性条件[D]. 重庆：西南大学，2020.

[4] PEČARIĆ J E, PROSCHAN F, TONG Y L. Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications [M]. Boston: Academic Press, 1992.

[5] OSTROWSKI A. Über Die Absolut Abweichung Einer Differentiierbaren Funktion Von Ihrem Integralmittelwert [J]. Commentarii Mathematici Helvetici, 1937, 10(1): 226-227.

[6] GORENFLO R, MAINARDI F. Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order [M]// CARPINTERI A, MAINARDI F. Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics. Vienna: Springer, 1997: 223-276

[7] SARIKAYA M Z, SET E, YALDIZ H, et al. Hermite-Hadamard's Inequalities for Fractional Integrals and Related Fractional Inequalities [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2013, 57(9/10): 2403-2407.

[8] DRAGOMIR S S. Hermite-Hadamard Type Inequalities for Generalized Riemann-Liouville Fractional Integrals of h-Convex Functions [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2021, 44(3): 2364-2380.

[9] LIAN T Y, TANG W. Generalizations of Hermite-Hadamard Type Inequalities Involving S-Convex Functions [J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics, 2018, 33(3): 278-286.

[10] NOOR M A, NOOR K I, AWAN M U. Fractional Ostrowski Inequalities for s-Godunova-Levin Functions [J]. International Journal of Analysis and Applications, 2014, 5(2): 167-173.

[11] SET E. New Inequalities of Ostrowski Type for Mappings Whose Derivatives are s-Convex in the Second Sense Via Fractional Integrals [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2012, 63(7): 1147-1154.

[12] NOOR M A, NOOR K I, AWAN M U, et al. Fractional Hermite-Hadamard Inequalities for Some New Classes of Godunova-Levin Functions [J]. Applied Mathematics & Information Sciences, 2014, 8(6): 2865-2872.

[13] 吴欣锟. 一类新的带有相同参数的混合分数阶可微变分不等式的拓扑处理方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2020，42(12)：103-106.

[14] 罗杰，李晓. 一个关于混合锥体积测度的子空间集中不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(4)：34-37.

[15] LIAN T Y, TANG W, ZHOU R. Fractional Hermite-Hadamard Inequalities for (s, m)-Convex or s-Concave Functions [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2018, 2018(1): 1-11.

[16] MUBEEN S, HABIBULLAH G M. k-Fractional Integrals and Applications [J]. International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 2012, 7(2): 89-94.

[17] LIU W J. Some Ostrowski Type Inequalities Via Riemann-Liouville Fractional Integrals for h-Convex Functions [J]. Journal of Computational Analysis & Applications, 2012, 16(5): 998-1004.

责任编辑　廖坤