DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.08.002

拟齐次核逆向 Hilbert 型积分不等式的构建条件及算子表示①

洪勇[1], 赵茜[1], 张丽娟[1], 孔荫莹[2]

1. 广州华商学院 数据科学学院，广州 511300；2. 广东财经大学 统计与数学学院，广州 510320

摘要：利用权函数方法和逆向 Hölder 积分不等式，讨论了具有拟齐次核 $K(x, y)$ 的逆向 Hilbert 型积分不等式

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K(x, y)\,|f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant M\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}$$

的构建问题，其中 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$，$g\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$. 得到了构建逆向 Hilbert 型积分不等式的充分必要条件和最佳常数因子的计算公式，与拟齐次核 Hilbert 型积分不等式的相关结果形成对应，完善了 Hilbert 型积分不等式的理论问题. 最后利用逆向 Hilbert 型积分不等式对积分算子

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty} K(x, y) f(x)\,\mathrm{d}x \qquad f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$$

进行探讨，给出了相应的算子不等式和若干特例，这对于积分算子的研究有一定的理论意义.

关 键 词：逆向 Hilbert 型积分不等式；拟齐次核；构建条件；最佳常数因子；算子表示

中图分类号：**O178** **文献标志码**：**A** **文章编号**：1000-5471(2023)08-0010-09

Construction Conditions and Operator Representations of Inverse Hilbert-Type Integral Inequalities with Quasi-Homogeneous Kernel

HONY Yong[1], ZHAO Qian[1], ZHANG Lijuan[1], KONG Yinying[2]

1.College of Data Science, Guangzhou Huashang College, Guangzhou 511300, China;

2.College of Statistics and Mathematics, Guangdong University of Finance and Economics, Guangzhou 510320, China

Abstract: Using the weight function method and inverse Hölder integral inequality, the problem of constructing the inverse Hilbert-type integral inequality

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} K(x, y)\,|f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geqslant M\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}$$

with quasi-homogeneous kernel $K(x,y)$ is discussed, where $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$, $f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$, $g\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$. The sufficient necessary conditions for constructing the inverse Hilbert-type integral inequality and formula for the best constant factor are obtained, which form a correspondence with the rele-

① 收稿日期：2022-11-10

基金项目：广东省基础与应用基础研究基金项目(2022A1515012429)；广州华商学院科研团队项目(2021HSKT03).

作者简介：洪勇，教授，主要从事调和分析及解析不等式的研究.

vant results of the Hilbert-type integral inequality with quasi-homogeneous kernel, which refines a theoretical problem of Hilbert-type inequality, and finally the integral operator

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}K(x,y)f(x)\mathrm{d}x \qquad f\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$$

is discussed by using the inverse Hilbert-type integral inequality, giving the corresponding operator inequality and several spacial cases, which have some theoretical significance for the study of integral operators.

Key words: inverse Hilbert-type integral inequality; quasi-homogeneous kernel; construction condition; the best constant factor; operator representation

设 $r\neq 0$，$\alpha\in\mathbb{R}$，记

$$L_r^{\alpha}(0,+\infty)=\left\{f(x):\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\,|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}<+\infty\right\}$$

需要指出的是：

当 $r>1$ 时，$L_r^{\alpha}(0,+\infty)$ 是带幂权 x^{α} 的加权 Lebesgue 空间，此时记

$$\|f\|_{r,\alpha}=\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\,|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$$

当 $r\leqslant 1$ 且 $r\neq 0$ 时，$L_r^{\alpha}(0,+\infty)$ 并不构成向量空间，为了区别 $r>1$ 的情形，此时记

$$\|f\|_{r,\alpha}^{*}=\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\,|f(x)|^r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{r}}$$

若 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，$K(x,y)\geqslant 0$，$f(x)\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$，$g(y)\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$，称

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(x,y)\,|f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant M\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*} \tag{1}$$

为以 $K(x,y)$ 为核的逆向 Hilbert 型积分不等式，M 称为常数因子，$M_0=\sup\{M\}$ 称为最佳常数因子.

在充分讨论 Hilbert 型不等式并取得了大量成果的基础上[1-4]，近年来各国学者开始关注逆向 Hilbert 型不等式[5-9]. 文献[10-16]讨论了 Hilbert 型不等式的构建问题，从理论上解决了 Hilbert 型不等式针对各类核的构造参数条件，并得到了加权 Lebesgue 空间中有界积分算子的构造方法，这在算子理论中是非常有意义的，但目前讨论逆向 Hilbert 型不等式构造的文献还不多见. 本文针对拟齐次核讨论逆向 Hilbert 型积分不等式的构造问题，得到了等价的参数条件和最佳常数因子的计算公式.

设 λ 是一个实数，$G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$\lambda_1\lambda_2>0$，称 $K(x,y)=G(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})$ 为拟齐次函数，显然 $K(x,y)$ 具有性质：若 $t>0$，则

$$K(tx,y)=t^{\lambda\lambda_1}K(x,t^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}y) \qquad K(x,ty)=t^{\lambda\lambda_2}K(t^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}x,y)$$

特别地，

$$K(t,1)=t^{\lambda\lambda_1}K(1,t^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}) \qquad K(1,t)=t^{\lambda\lambda_2}K(t^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},1)$$

本文中，我们记

$$W_1(s)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^s\mathrm{d}t \qquad W_2(s)=\int_0^{+\infty}K(t,1)t^s\mathrm{d}t$$

$$A(K,f,g)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(x,y)\,|f(x)|\,|g(y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

1　预备引理

引理 1　设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$K(x,$

$y)=G(x^{\lambda_1}, y^{\lambda_2})$, $\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$, 则$\frac{1}{\lambda_1}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\frac{1}{\lambda_2}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$, 且

$$\omega_1(x,\beta,q)=\int_0^{+\infty}K(x,y)y^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}y=x^{\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\beta+1}{q}-1\right)}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$$

$$\omega_2(y,\alpha,p)=\int_0^{+\infty}K(x,y)x^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}x=y^{\lambda\lambda_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{\alpha+1}{p}-1\right)}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$$

证 因为

$$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$$

故

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\lambda\lambda_2-\frac{\beta+1}{q}\right)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1=-\frac{\alpha+1}{p}$$

于是

$$\begin{aligned}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)&=\int_0^{+\infty}K(t^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}},1)t^{\lambda\lambda_2-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t=\\&\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\lambda\lambda_2-\frac{\beta+1}{q}\right)-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1}\mathrm{d}u=\\&\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\int_0^{+\infty}K(u,1)u^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}u=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\end{aligned}$$

故有

$$\frac{1}{\lambda_1}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\frac{1}{\lambda_2}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$$

利用$K(x,y)$的性质, 有

$$\begin{aligned}\omega_1(x,\beta,q)&=x^{\lambda\lambda_1}\int_0^{+\infty}K(1,x^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}y)y^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}y=\\&x^{\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\beta+1}{q}-1\right)}\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t=\\&x^{\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\beta+1}{q}-1\right)}W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)\end{aligned}$$

同理可得

$$\omega_2(y,\alpha,p)=y^{\lambda\lambda_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{\alpha+1}{p}-1\right)}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$$

引理2[17] 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1, q<0)$, $x\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$, $\omega(x)\geqslant 0$, $f(x)\geqslant 0$, $g(x)\geqslant 0$, 则有逆向 Hölder 积分不等式

$$\int_\Omega f(x)g(x)\omega(x)\mathrm{d}x\geqslant\left(\int_\Omega f^p(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega g^q(x)\omega(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

当且当存在常数C使得$f^p(x)=Cg^q(x)$时, 不等式取等号.

2 逆向 Hilbert 型积分不等式的构造定理

定理1 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1, q<0)$, $\lambda_1\lambda_2>0$, $\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$, $G(u,v)$是λ阶齐次非负函数, $K(x,y)=G(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})$, $0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$, $0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$, 存在常数$\sigma>0$, 使得$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$或$W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$, 则:

(i) 当且当$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$时，存在常数 $M>0$，使得

$$A(K,f,g)=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}K(x,y)|f(x)||g(y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant M\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*} \tag{2}$$

其中 $f(x)\in L_p^{\alpha}(0,+\infty)$，$g(y)\in L_q^{\beta}(0,+\infty)$；

(ii) 当$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$时，(2) 式的最佳常数因子为

$$\sup\{M\}=\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$$

其中 $W_0=|\lambda_1|W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$.

证　不妨设 $W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$.

(i) 充分性　设$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$，根据引理 1 及引理 2，有

$$\begin{aligned}
&A(K,f,g)=\\
&\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{x^{\frac{\alpha+1}{pq}}}{y^{\frac{\beta+1}{pq}}}|f(x)|\right)\left(\frac{y^{\frac{\beta+1}{pq}}}{x^{\frac{\alpha+1}{pq}}}|g(y)|\right)K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\\
&\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^{\frac{\alpha+1}{q}}}{y^{\frac{\beta+1}{q}}}|f(x)|^pK(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{y^{\frac{\beta+1}{p}}}{x^{\frac{\alpha+1}{p}}}|g(y)|^qK(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\\
&\left(\int_0^{+\infty}x^{\frac{\alpha+1}{q}}|f(x)|^p\omega_1(x,\beta,q)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}y^{\frac{\beta+1}{p}}|g(y)|^q\omega_2(y,\alpha,p)\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\\
&W_1^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{\frac{1}{q}}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\left(\int_0^{+\infty}x^{\frac{\alpha+1}{q}+\lambda\lambda_1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\frac{\beta+1}{q}-1\right)}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}y^{\frac{\beta+1}{p}+\lambda\lambda_2-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(\frac{\alpha+1}{p}-1\right)}|g(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\\
&W_1^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{\frac{1}{q}}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\left(\int_0^{+\infty}x^{\alpha}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{+\infty}y^{\beta}|g(y)|^q\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\\
&W_1^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{\frac{1}{q}}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}
\end{aligned}$$

任取 $0<M\leqslant W_1^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{\frac{1}{q}}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$，都可得到(2) 式.

必要性　设存在常数 $M>0$ 使得(2) 式成立，记

$$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}-\left(\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)=c$$

若 $c\lambda_2>0$，对充分小的 $\varepsilon>0$，令

$$f(x)=\begin{cases}x^{-\frac{\alpha+1+|\lambda_1|\varepsilon}{p}} & x\geqslant 1\\ 0 & 0<x<1\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}y^{-\frac{\beta+1+|\lambda_2|\varepsilon}{q}} & y\geqslant 1\\ 0 & 0<y<1\end{cases}$$

则有

$$\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}=\left(\int_1^{+\infty}x^{-1-|\lambda_1|\varepsilon}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_1^{+\infty}y^{-1-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{\varepsilon|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}} \tag{3}$$

同时还有

$$A(K,f,g)=\int_1^{+\infty}y^{-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}}\left(\int_1^{+\infty}K(x,y)x^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$\int_1^{+\infty} y^{\lambda\lambda_2-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}}\left(\int_1^{+\infty} K(y^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}x,1)x^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$\int_1^{+\infty} y^{\lambda\lambda_2-\frac{\beta+1}{q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{q}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\left(-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}\right)+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\left(\int_{y^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}}^{+\infty} K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y\leqslant$$

$$\int_1^{+\infty} y^{\lambda_2\left(\lambda-\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}-\frac{|\lambda_2|\varepsilon}{\lambda_2 q}-\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{\lambda_1 p}+\frac{1}{\lambda_1}\right)}\left(\int_0^{+\infty} K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y=$$

$$\int_1^{+\infty} y^{-1-c\lambda_2-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t \tag{4}$$

根据(3)式和(4)式,有

$$\varepsilon\int_1^{+\infty} y^{-1-c\lambda_2-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty} K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{M}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}} \tag{5}$$

因为 $c\lambda_2>0$,由 Lebesgue 控制收敛定理,有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_1^{+\infty} y^{-1-c\lambda_2-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\frac{1}{y^{1+c\lambda_2}}\mathrm{d}y<+\infty$$

令

$$F(t)=\begin{cases}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\sigma} & 0<t\leqslant 1\\ K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}} & t>1\end{cases}$$

因为 $\varepsilon>0$ 充分小,故 $\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}<\sigma$,于是

$$K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\leqslant F(t)\qquad t>0$$

而

$$\int_0^{+\infty}F(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 F(t)\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}F(t)\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^1 K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\sigma}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}t\leqslant$$

$$W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}-\sigma\right)+W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$$

视 ε 为一个趋于0的正项数列 $\{c_k\}$,根据 Lebesgue 控制收敛定理,有

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t=\lim_{k\to+\infty}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|c_k}{p}}\mathrm{d}t=$$

$$\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}t=W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$$

于是在(5)式中令 $\varepsilon\to 0^+$,得

$$0\geqslant\frac{M}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}}>0 \tag{6}$$

矛盾,所以 $c\lambda_2>0$ 不成立.

若 $c\lambda_2<0$,对充分小的 $\varepsilon>0$,令

$$f(x)=\begin{cases}x^{-\frac{\alpha+1-|\lambda_1|\varepsilon}{p}} & 0<x\leqslant 1\\ 0 & x>1\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}y^{-\frac{\beta+1-|\lambda_2|\varepsilon}{q}} & 0<y\leqslant 1\\ 0 & y>1\end{cases}$$

类似地可得

$$\varepsilon\int_0^1 y^{-1-c\lambda_2+|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}+\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{M}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}}$$

利用

$$W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}+\sigma\right)<+\infty \qquad W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$$

及 Lebesgue 控制收敛定理，令 $\varepsilon\to 0^+$，类似地也可得到(6) 式，矛盾. 故 $c\lambda_2<0$ 也不能成立.

综上所述，可得 $c\lambda_2=0$，但 $\lambda_2\neq 0$，故 $c=0$，即

$$\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$$

(ii) 设 $\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$，则 $c=0$. 若(2) 式的最佳常数因子不是 $\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$，则存在常数 $M_0>0$，使得

$$M_0>W_1^{\frac{1}{p}}\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)W_2^{\frac{1}{q}}\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$$

$$A(K,f,g)\geqslant M_0\|f\|_{p,\alpha}^{*}\|g\|_{q,\beta}^{*}$$

由于 $c=0$，根据导出(5) 式的方法，得

$$\varepsilon\int_1^{+\infty}y^{-1-|\lambda_2|\varepsilon}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{M_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}}$$

由此得到

$$\frac{1}{|\lambda_2|}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}-\frac{|\lambda_1|\varepsilon}{p}}\mathrm{d}t\geqslant\frac{M_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{p}}|\lambda_2|^{\frac{1}{q}}}$$

令 $\varepsilon\to 0^+$，得

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}t\geqslant M_0$$

于是

$$\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}}W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^{+\infty}K(t,1)t^{-\frac{\alpha+1}{p}}\mathrm{d}t\geqslant M_0$$

这与 $M_0>\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$ 矛盾，故(2) 式的常数因子是最佳的.

3　逆向 Hilbert 型积分不等式的算子表式

设 $K(x,y)\geqslant 0$，定义以 $K(x,y)$ 为核的积分算子 T：

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}K(x,y)f(x)\mathrm{d}x \qquad f(x)\in L_p^{\alpha}(0,+\infty) \tag{7}$$

根据 Hilbert 型不等式的基本理论，逆向 Hilbert 型积分不等式(1) 等价于算子不等式

$$\|T(f)\|_{p,\beta(1-p)}^{*}\geqslant M\|f\|_{p,\alpha}^{*} \qquad f(x)\in L_p^{\alpha}(0,+\infty) \tag{8}$$

根据定理 1，可得到下列等价定理：

定理 2　设 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$，$G(u,v)$ 是 λ 阶齐次非负函数，$K(x,y)=G(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})$，$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$，存在常数 $\sigma>0$，使得 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$ 或 $W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$，积分算子 T 由(7) 式定义，则：

(i) 当且当 $\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$ 时，存在常数 $M>0$，使得(8) 式成立；

(ii) 当 $\frac{\alpha+1}{\lambda_1 p}+\frac{\beta+1}{\lambda_2 q}=\lambda+\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}$ 时，(8) 式的最佳常数因子为 $\sup\{M\}=\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$，其中

$$W_0=|\lambda_1|W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)$$

在定理2中取$\lambda_1=\lambda_2=1$，则可得到关于齐次核积分算子的如下结果：

推论1 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\alpha,\beta,\lambda\in\mathbb{R}$，$K(x,y)$是$\lambda$阶齐次非负函数，$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)<+\infty$，存在常数$\sigma>0$，使得$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$或$W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$，积分算子$T$由(7)式定义，则：

(i) 当且当$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=\lambda+1$时，存在常数$M>0$，使得(8)式成立；

(ii) 当$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=\lambda+1$时，(8)式的最佳常数因子为$\sup\{M\}=W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)$.

在定理2中取$\alpha=\beta=0$，则可得：

推论2 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda_1\lambda_2>0$，$\lambda\in\mathbb{R}$，$G(u,v)$是$\lambda$阶齐次非负函数，$K(x,y)=G(x^{\lambda_1},y^{\lambda_2})$，$0<W_1\left(-\frac{1}{q}\right)<+\infty$，$0<W_2\left(-\frac{1}{p}\right)<+\infty$，存在常数$\sigma>0$，使得$W_1\left(-\frac{1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$或$W_2\left(-\frac{1}{p}\pm\sigma\right)<+\infty$，积分算子$T$由(7)式定义，则：

(i) 当且当$\lambda+\frac{1}{\lambda_1 q}+\frac{1}{\lambda_2 p}=0$时，存在常数$M>0$，使得

$$\|T(f)\|_p^*\geqslant M\|f\|_p^* \qquad f(x)\in L_p(0,+\infty) \tag{9}$$

(ii) 当$\lambda+\frac{1}{\lambda_1 q}+\frac{1}{\lambda_2 p}=0$时，(9)式的最佳常数因子为$\sup\{M\}=\frac{W_0}{|\lambda_1|^{\frac{1}{q}}|\lambda_2|^{\frac{1}{p}}}$，其中

$$W_0=|\lambda_1|W_2\left(-\frac{1}{p}\right)=|\lambda_2|W_1\left(-\frac{1}{q}\right)$$

推论3 设$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1(0<p<1,\ q<0)$，$\lambda>0$，$0\leqslant a<b$，积分算子$T$为

$$T(f)(y)=\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{bx^\lambda+y^\lambda}{ax^\lambda+y^\lambda}\right)f(x)\mathrm{d}x \qquad f(x)\in L_p^{p\left(\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{2}\right)}(0,+\infty)$$

则有

$$\|T(f)\|_{p,\frac{\lambda p}{2}-1}^*\geqslant\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{b}-\sqrt{a})\|f\|_{p,p\left(\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{2}\right)}^*$$

其中的常数因子$\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$是最佳值.

证 记

$$\alpha=p\left(\frac{1}{q}+\frac{\lambda}{2}\right) \qquad \beta=q\left(\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{2}\right)$$

则$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=1$. 又记

$$K(x,y)=\ln\left(\frac{bx^\lambda+y^\lambda}{ax^\lambda+y^\lambda}\right) \qquad x>0,\ y>0$$

因为$0\leqslant a<b$，故$K(x,y)$是0阶齐次非负函数. 作变换$t=u^{\frac{2}{\lambda}}$，有

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\int_0^{+\infty}K(1,t)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+t^\lambda}{a+t^\lambda}\right)t^{-\frac{\beta+1}{q}}\mathrm{d}t=$$

$$\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{2}{\lambda}\frac{\beta+1}{q}+\frac{2}{\lambda}-1}\mathrm{d}u=\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)\mathrm{d}u=$$
$$\frac{2}{\lambda}\left(u\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}u\left(\frac{2u}{b+u^2}-\frac{2u}{a+u^2}\right)\mathrm{d}u\right)=$$
$$\frac{4(b-a)}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(b+u^2)(a+u^2)}\mathrm{d}u$$

若 $a>0$，因为 $h(z)=\frac{z^2}{(b+z^2)(a+z^2)}$ 在上半平面上有两个一阶极点 $\sqrt{a}\,\mathrm{i}$ 和 $\sqrt{b}\,\mathrm{i}$，利用复变函数的残数理论，可求得

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\frac{4(b-a)}{\lambda}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{(b+u^2)(a+u^2)}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{2(b-a)}{\lambda}2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}_{z=\sqrt{b}\mathrm{i}}\frac{z^2}{(b+z^2)(a+z^2)}+\mathrm{Res}_{z=\sqrt{a}\mathrm{i}}\frac{z^2}{(b+z^2)(a+z^2)}\right)=$$
$$\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{b}-\sqrt{a})$$

若 $a=0$，则易求得 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{b}$.

综上所述，当 $a\geqslant 0$ 时，有

$$0<W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{b}-\sqrt{a})<+\infty$$

类似地也可得

$$0<W_2\left(-\frac{\alpha+1}{p}\right)=\frac{2\pi}{\lambda}(\sqrt{b}-\sqrt{a})<+\infty$$

取 $\sigma=\frac{\lambda}{4}>0$，有

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\sigma\right)=\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+t^\lambda}{a+t^\lambda}\right)t^{-\frac{\beta+1}{q}-\sigma}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=$$
$$\frac{2}{\lambda}\int_0^{1}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\frac{2}{\lambda}\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\leqslant$$
$$\frac{2}{\lambda}\int_0^{1}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\frac{2}{\lambda}\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)\mathrm{d}u$$

因为

$$\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{-\frac{1}{2}}\sim\ln\left(\frac{b}{a}\right)u^{-\frac{1}{2}}\qquad u\to 0^+$$
$$\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)=\ln\left(1+\frac{b-a}{a+u^2}\right)\sim\frac{b-a}{a+u^2}<\frac{b-a}{u^2}\qquad u\to+\infty$$
$$\int_0^1\ln\left(\frac{b}{a}\right)u^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}u<+\infty\qquad \int_1^{+\infty}\frac{b-a}{u^2}\mathrm{d}u<+\infty$$

从而可推知 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}-\sigma\right)<+\infty$. 又因为

$$W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}+\sigma\right)=\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+t^\lambda}{a+t^\lambda}\right)t^{-\frac{\beta+1}{q}+\sigma}\mathrm{d}t=$$
$$\frac{2}{\lambda}\int_0^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u=$$

$$\frac{2}{\lambda}\int_0^1 \ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u+\frac{2}{\lambda}\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u\leqslant$$
$$\frac{2}{\lambda}\int_0^1 \ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)\mathrm{d}u+\frac{2}{\lambda}\int_1^{+\infty}\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}u$$

而

$$\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)u^{\frac{1}{2}}\sim\frac{b-a}{a+u^2}u^{\frac{1}{2}}<\frac{b-a}{u^{\frac{3}{2}}}\qquad u\to+\infty$$
$$\int_1^{+\infty}\frac{b-a}{u^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u<+\infty\qquad \int_0^1\ln\left(\frac{b+u^2}{a+u^2}\right)\mathrm{d}u<+\infty$$

所以可知 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}+\sigma\right)<+\infty$，于是得到 $W_1\left(-\frac{\beta+1}{q}\pm\sigma\right)<+\infty$.

综上所述，并根据推论 1，可知推论 3 成立.

参考文献：

[1] 洪勇，和炳. Hilbert 型不等式的理论与应用(上册) [M]. 北京：科学出版社，2023：26-90.

[2] 杨必成，陈强. 一个核为双曲正割函数的半离散 Hilbert 型不等式 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2015，40(2)：26-32.

[3] 钟建华，陈强. 一个单调减非凸的零齐次核 Hilbert 型不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2014，36(8)：92-96.

[4] 王爱珍. 一个半离散且单调齐次核的 Hilbert 型不等式 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2013，35(4)：101-105.

[5] RASSIAS M TH，YANG B C. A Reverse Mulholland-Type Inequality in the Whole Plane with Multi-Parameters [J]. Applicable Analysis and Discrrete Mathematics，2019，13：290-308.

[6] 杨必成，陈强. 一类非齐次核逆向的 Hardy 型积分不等式成立的等价条件 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2017，55(4)：804-808.

[7] YANG B C，WU S H，WANG A Z. A New Reverse Mulholland-Type Inequality with Multi-Parameters [J]. AIMS Mathematics，2021，6(9)：9939-9954.

[8] RASSIAS M T，YANG B C，MELETIOU G C. A More Accurate Half-Discrete Hilbert-Type Inequality in the Whole Plane and the Reverses [J]. Annals of Functional Analysis，2021，12(3)：1-29.

[9] ZHAO C J，CHENG W S. Reverse Hilbert-Type Inequalities [J]. Journal of Mathematics Inequalities，2019，13(3)：855-866.

[10] HONG Y，HUANG Q L，YANG B C，et al. The Necessary and Sufficient Conditions for the Existence of a Kind of Hilbert-Type Multiple Integral Inequality with the Non-Homogeneous Kernel and Its Applications [J]. Journal of Inequalities and Applications，2017，316：1-12.

[11] 洪勇，温雅敏. 齐次核的 Hilbert 型级数不等式取最佳常数因子的充要条件 [J]. 数学年刊(A 辑)，2016，37(3)：329-336.

[12] HE B，HONG Y，LI Z. Conditions for the Validity of a Class of Optimal Hilbert Type Multiple Integral Inequalities with Nonhomogeneous Kernels [J]. Journal of Inequalities and Applications，2021，64：1-12.

[13] 洪勇，吴春阳，陈强. 一类非齐次核的最佳 Hilbert 型积分不等式的搭配参数条件 [J]. 吉林大学学报(理学版)，2021，59(2)：207-212.

[14] HONG Y，HUANG Q L，CHEN Q. The Parameter Conditions for the Existence of the Hilbert-Type Multiple Integral Inequality and Its Best Constant Factor [J]. Annals of Functional Analysis，2020，2020：1-10.

[15] LIAO J Q，HONG Y，YANG B C. Equivalent Conditions of a Hilbert-Type Multiple Integral Inequality Holding [J]. Journal of Function Spaces，2020，2020：1-6.

[16] WANG A Z，YANG B C，CHEN Q. Equivalent Properties of a Reverse Half-Discrete Hilbert'S Inequality [J]. Journal of Inequalities and Applications，2019，2019(1)：1-12.

[17] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 5 版. 济南：山东科学技术出版社，2021：4-43.

责任编辑 廖坤