DOI:10.13718/j.cnki.xsxb.2023.08.003

分数次热方程侧边值问题的迭代分数次 Tikhonov 方法[①]

多杰吉，　熊向团

西北师范大学 数学与统计学院，兰州 730070

摘要：考虑四分之一平面内的分数次热方程的侧边值问题，这是一类严重不适定问题. 首先给出了该问题的解，然后采用迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法给出了其迭代正则解，最后在先验和后验的正则化参数选取规则下，给出了精确解和正则解之间的误差估计.

关　键　词：分数次热方程侧边值问题；不适定问题；迭代分数次 Tikhonov 方法；正则化参数；误差估计

中图分类号：O241.1　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1000－5471(2023)08－0019－07

Iterated Fractional Tikhonov Method for Sideways Fractional Heat Equation Problem

DUO Jieji，　XIONG Xiangtuan

College of Mathematics and Statistics，Northwest Normal University，Lanzhou 730070，China

Abstract：Considering the sideways fractional heat equation in the quarter plane，it is a kind of seriously ill-posed problem. To begin with，the solution of the problem is given，and then the iterated fractional Tikhonov regularization method is used to give the iterated regular solution. in the end，the error estimation between the exact solution and the regular solution is given under the prior and posterior regularization parameter selection rules.

Key words：sideways fractional heat equation problem；ill-posed problem；iterated fractional Tikhonov method；regularization parameter；error estimate

所谓热传导侧边值问题，也称逆热传导问题，在一些实际问题中，当人们需要确定一个物体的表面温度，但又无法直接测量的时候，就必须由物体内部某固定位置的温度来反演表面温度. 该类问题是严重不适定的，对此，许多学者提出了不同的方法来解决这一问题，如新型网格方法[1]、傅里叶正则化方法[2]、一种新的正则化方法[3]、小波正则化方法[4]、分数次 Tikhonov 方法[5] 等. 近几年来，微分问题广泛应用于数学和工程方面[6-11]，而针对分数次热方程侧边值问题，也有作者提出了相应的方法对其进行讨论，如分数次 Tikhonov 方法[12]、最优滤波方法[13] 等. 由于经典的 Tikhonov 方法的近似解过于光滑，例如，对于具有

---

① 收稿日期：2022－12－14

基金项目：国家自然科学基金项目(11661072)；西北师范大学科学计算创新团队项目(NWNU-LKQN-17-5).

作者简介：多杰吉，硕士研究生，主要从事微分方程数值解的研究.

跳跃的精确解，经典的 Tikhonov 方法没法很好地重构精确解的特征. 因此，为了更好地解决这一问题，本文给出迭代的分数次 Tikhonov方法. 该方法是文献[14]提出的一种正则化方法，文献[15]应用这种方法讨论了球对称反向时间分数阶扩散方程.

1 问题的解和不适定性分析

我们考虑如下的问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} - u_{xx} = 0 & x > 0,\ t > 0,\ 0 < \beta < 1 \\ u(x,0) = 0 & x \geqslant 0 \\ u(1,t) = g(t) & t \geqslant 0 \\ u(x,t)|_{x\to\infty} \text{ 有界} \end{cases} \tag{1}$$

其中，时间分数阶导数$\dfrac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta}$由文献[12]中 $\beta(0<\beta<1)$ 阶 Caputo 导数定义.

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \frac{\partial u(x,s)}{\partial s}\frac{\mathrm{d}s}{(t-s)^\beta} \qquad 0<\beta<1$$

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial t^\beta} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad \beta = 1$$

注 1 当 $\beta=1$ 时，问题(1) 是经典的热传导问题的侧边值问题[12].

在实际问题中，这里的输入数据 $g(t)$ 往往是由物理测量得到的，记 $g^\delta(t)\in L^2(\mathbb{R})$ 为带噪音的测量数据，且满足

$$\| g^\delta - g \| \leqslant \delta \tag{2}$$

其中 $\delta>0$ 是噪音水平，$\|\cdot\|$ 表示 L^2 -范数. 进一步，我们给出如下的先验界：

$$\| u(0,t) \| \leqslant E \tag{3}$$

其中 E 是大于 0 的有界常数.

为了在频域中考虑问题(1)，我们将关于 t 的函数延拓到整个实轴，令 $t<0$ 的部分为 0. 定义函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换为

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}t \qquad \xi \in \mathbb{R} \tag{4}$$

相应函数 $\hat{f}(\xi)$ 的 Fourier 逆变换为

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\,\mathrm{d}\xi$$

对问题(1) 关于变量 t 作 Fourier 变换：

$$\begin{cases} (i\xi)^\beta \hat{u}(x,\xi) - \hat{u}_{xx}(x,\xi) = 0 & x>0,\ \xi\in\mathbb{R},\ 0<\beta<1 \\ \hat{u}(x,0) = 0 & x \geqslant 0 \\ \hat{u}(1,\xi) = \hat{g}(\xi) & \xi \in \mathbb{R} \\ \hat{u}(x,\xi)|_{x\to\infty} \text{ 有界} \end{cases} \tag{5}$$

通过计算，得到问题(5) 的精确解为

$$\hat{u}(x,\xi) = \mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi) \tag{6}$$

等价于

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi t}\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

其中

$$(\mathrm{i}\xi)^{\frac{\beta}{2}}=\begin{cases}|\xi|^{\frac{\beta}{2}}\left(\cos\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\xi)\sin\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)\right) & \xi\geqslant 0\\ |\xi|^{\frac{\beta}{2}}\left(\cos\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)-\mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\xi)\sin\left(\frac{\beta\pi}{4}\right)\right) & \xi<0\end{cases}$$

令

$$\eta=\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^{\beta}}$$

则 η 的实部和虚部分别表示为

$$a=\mathrm{Re}(\eta)\qquad b=\mathrm{Im}(\eta)$$

因此

$$\eta=a+b\mathrm{i}\tag{7}$$

注意到，当 $0<x<1$，$|\xi|\to\infty$ 时，$|\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^{\beta}}}|\to\infty$. 因为要求 $u(x,t)\in L^2(\mathbb{R})$，所以精确数据 $\hat{g}(\xi)$ 必须为急降函数. 但实际测量数据 $\hat{g}^{\delta}(\xi)$ 一般不会是急降函数. 这种情况下数据 $g(t)$ 非常小的扰动，都会让放大因子 $|\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^{\beta}}}|$ 将解无限放大，导致解的爆破. 因此，问题(1)是严重不适定的. 本文采用迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法来求解问题(1)，并给出先验和后验参数选取规则下的误差估计.

2　迭代的分数次 Tikhonov 正则化

本节中，我们采用固定迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法[14]来求解问题(1)，并给出先验和后验参数选取方法及误差估计.

引入迭代格式：

$$\begin{cases}u_{\alpha,\gamma}^{0}=0\\ (K^*K+\alpha I)^{\gamma}u_{\alpha,\gamma}^{m}=(K^*K)^{\gamma-1}K^*g+[(K^*K+\alpha I)^{\gamma}-(K^*K)^{\gamma}]u_{\alpha,\gamma}^{m-1}\end{cases}\tag{8}$$

其中，$u_{\alpha,\gamma}^{0}$ 为迭代初值，$\frac{1}{2}\leqslant\gamma\leqslant 1$，$\alpha>0$ 是正则化参数，迭代步数 $m>0$ 是固定的. 令 $u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}$ 表示固定迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法关于扰动数据 $g=g^{\delta}$ 的第 m 次迭代解.

注 2　如果 $\gamma=1$，我们会得到标准的 Tikhonov 方法. 选择 $\frac{1}{2}<\gamma<1$，可以防止平滑效应并获得更精确的不连续解的数值结果[16].

对于任意给定的 $m\in\mathbb{N}$ 和 $\frac{1}{2}<\gamma<1$，(8) 式中的 IFTRM 是一种基于滤波器的滤子正则化方法，其滤子函数为

$$F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)=\frac{(\sigma^2+\alpha)^{\gamma m}-[(\sigma^2+\alpha)^{\gamma}-\sigma^{2\gamma}]^m}{(\sigma^2+\alpha)^{\gamma m}}\tag{9}$$

注 3　当 $\gamma=1$，$m=1$ 时，恢复为经典的 Tikhonov 滤波器；当 $\gamma=1$ 时，恢复为迭代 Tikhonov 滤波器. 我们的滤子方法的主导思想是用 $\frac{F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)}{\sigma}$ 代替 $\frac{1}{\sigma}$，以便用 $u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}$ 来近似 u，如下所示：

$$\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)=F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^{\beta}}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\tag{10}$$

其中 $\sigma=\mathrm{e}^{(x-1)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)^{\beta}}}$.

2.1　先验参数选取规则

我们首先证明几个辅助引理.

引理 1[17]　如果常数 $\alpha>0$，$a<b$，则有如下不等式成立：

$$\sup_{s>0}\frac{\mathrm{e}^{sa}}{1+\alpha\mathrm{e}^{sb}}\leqslant\alpha^{-\frac{a}{b}}$$

引理 2　对常数 $\gamma>0$，$\alpha>0$，$m>0$，$0<\beta<1$，我们有

$$\sup_{\xi} F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma) \mathrm{e}^{(1-x)a} \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{\alpha}}$$

证　根据文献[14]中的命题 18，我们有

$$F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma) \leqslant m F_{\alpha,\gamma}(\sigma) \tag{11}$$

其中 $F_{\alpha,\gamma}(\sigma)$ 是分数次 Tikhonov 方法滤子函数

$$F_{\alpha,\gamma}(\sigma) = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha}\right)^{\gamma} \tag{12}$$

由(11)式和(12)式，我们得到

$$\sup_{\xi} F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma) \mathrm{e}^{(1-x)a} \leqslant \sup_{\xi} m F_{\alpha,\gamma}(\sigma) \mathrm{e}^{(1-x)a} = \sup_{\xi} m \mathrm{e}^{(1-x)a} \left(\frac{\mathrm{e}^{2(x-1)a} + \alpha}{\mathrm{e}^{2(x-1)a}}\right)^{\gamma} = \sup_{\xi} \frac{m\ (\mathrm{e}^{(x-1)a})^{2\gamma-1}}{(\mathrm{e}^{2(x-1)a} + \alpha)^{\gamma}} \tag{13}$$

引入新变量 $s = \mathrm{e}^{-a}$，记 $\mathrm{e}^{ax} = c_1$. 令

$$A(s) = \frac{m c_1^{2\gamma-1} s^{2\gamma-1}}{(c_1^2 s^2 + \alpha)^{\gamma}} \tag{14}$$

对 $\gamma > \frac{1}{2}$，函数 $A(s)$ 是连续的. 由于 $A(s) \geqslant 0$，$\lim\limits_{s \to 0} A(s) = 0$，$\lim\limits_{s \to \infty} A(s) = 0$，最大点满足 $A'(s_*) = 0$. 由(14)式，我们得到

$$s_* = \frac{\sqrt{2\gamma\alpha - \alpha}}{c_1}$$

将 s_* 代入 $A(s)$ 中得最大值

$$A(s) \leqslant A(s_*) = \frac{m 2^{-\gamma} \gamma^{-\gamma} (2\gamma - 1)^{\gamma - \frac{1}{2}} c_1^{-2\gamma+1}}{\sqrt{\alpha}} \tag{15}$$

记 $m 2^{-\gamma} \gamma^{-\gamma} (2\gamma - 1)^{\gamma - \frac{1}{2}} c_1^{-2\gamma+1} = c_2$.

将(15)式代入(13)式，可得

$$\sup_{\xi} F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma) \mathrm{e}^{(1-x)a} \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{\alpha}}$$

引理 3　对常数 $\gamma > 0$，$\alpha > 0$，$m > 0$，$0 < \beta < 1$，我们有

$$\sup_{\xi} (1 - F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)) \mathrm{e}^{-ax} \leqslant \alpha^{\frac{x}{2(1-x)}}$$

证　根据文献[14]中的命题 18，我们得到

$$1 - F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma) \leqslant (1 - F_{\alpha,\gamma}(\sigma))^m \tag{16}$$

此外根据文献[15]中的命题 3.2，我们有

$$F_{\alpha,\gamma}(\sigma) \geqslant F_{\alpha,1}(\sigma) > 0 \tag{17}$$

其中 $F_{\alpha,1}(\sigma)$ 是经典的 Tikhonov 方法滤子函数

$$F_{\alpha,1}(\sigma) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \alpha} \tag{18}$$

结合(16)—(18)式，我们有

$$\sup_{\xi} (1 - F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)) \mathrm{e}^{-ax} \leqslant \sup_{\xi} (1 - F_{\alpha,\gamma}(\sigma))^m \mathrm{e}^{-ax} \leqslant \sup_{\xi} (1 - F_{\alpha,1}(\sigma))^m \mathrm{e}^{-ax} =$$

$$\sup_{\xi} \left(\frac{\alpha}{\sigma^2 + \alpha}\right)^m \mathrm{e}^{-ax} = \sup_{\xi} \left(\frac{\alpha \mathrm{e}^{-\frac{ax}{m}}}{\mathrm{e}^{2(x-1)a} + \alpha}\right)^m = \sup_{\xi} \left(\frac{\alpha \mathrm{e}^{2a - 2ax - \frac{ax}{m}}}{1 + \alpha \mathrm{e}^{2a - 2ax}}\right)^m$$

由引理 1，可得

$$\sup_{\xi} (1 - F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)) \mathrm{e}^{-ax} \leqslant \alpha^{\frac{x}{2(1-x)}}$$

定理 1　假定噪音假设(4)式和先验界(5)式成立，如果选择

$$\alpha = \left(\frac{\delta}{E}\right)^{2(1-x)}$$

就有误差估计

$$\| u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-u(x,\xi)\| \leqslant (c_2+1)E^{1-x}\delta^x$$

证 由三角不等式和 Parseval 公式可得

$$\begin{aligned}\| u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-u(x,\xi)\| &= \| \hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-\hat{u}(x,\xi)\| \leqslant \\ &\| \hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m}(x,\xi)\| + \| \hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m}(x,\xi)\| \end{aligned} \tag{19}$$

记 $I_1=\| \hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m}(x,\xi)\|$，$I_2=\| \hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m}(x,\xi)\|$.

首先估计 I_1，

$$\begin{aligned}I_1 &= \| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}^\delta(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\| = \\ &\| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}(\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}(\xi))\| \leqslant \delta\sup_\xi |F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}|\end{aligned}$$

由(6)式可得

$$|e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}|=e^{(1-x)a} \tag{20}$$

$$|e^{-x\sqrt{(i\xi)^\beta}}|=e^{-ax} \tag{21}$$

因此，由引理 2、引理 3 可得

$$I_1=\delta\sup_\xi |F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}|=\delta\sup_\xi F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)a}\leqslant \delta\frac{c_2}{\sqrt{\alpha}} \tag{22}$$

接下来估计 I_2，由先验界 $e^{\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\leqslant E$，得

$$\begin{aligned}I_2 &= \| e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\| = \| (1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))e^{(1-x)\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\| \leqslant \\ &\| e^{\sqrt{(i\xi)^\beta}}\hat{g}(\xi)\| \sup_\xi |(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))e^{-x\sqrt{(i\xi)^\beta}}| \leqslant E\sup_\xi (1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))e^{-ax}\leqslant E\alpha^{\frac{x}{2(1-x)}}\end{aligned} \tag{23}$$

最后，将(22)式和(23)式代入(19)式，有

$$\| \hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-\hat{u}(x,\xi)\| \leqslant I_1+I_2\leqslant (c_2+1)E^{1-x}\delta^x$$

2.2 后验参数选取规则

在这一节中给出后验参数选取规则，并且正则化参数 α 由 Morozov's 偏差原理确定[17]. 由 Morozov's 偏差原理，可寻找一个 α 满足方程

$$\| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}^\delta(\xi)\| =\tau\delta \tag{24}$$

其中$\frac{1}{2}<\gamma<1$，$\tau>1$ 是常数，α 是正则化参数.

下面的结论是显然的：

引理 4 设 $H(\alpha)=\| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}^\delta(\xi)\|$，并且 $0<\tau\delta<\| \hat{g}^\delta(\xi)\|$，则：

(i) $H(\alpha)$ 是连续函数；

(ii) $\lim\limits_{\alpha\to 0} H(\alpha)=0$；

(iii) $\lim\limits_{\alpha\to 0} H(\alpha)=\| \hat{g}^\delta(\xi)\|_{L^2(\mathbb{R})}$；

(iv) $H(\alpha)$ 是严格单调增函数.

注 4 根据引理 4 可知，若 $0<\tau\delta<\| \hat{g}^\delta(\xi)\|$，则方程(24)的解存在且唯一.

引理 5 若 α 满足方程(24)，则有不等式

$$\| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}(\xi)\| \leqslant (\tau+1)\delta \tag{25}$$

证 由方程(24)和三角不等式得

$$\| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}(\xi)\| \leqslant \| F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}^\delta(\xi)\| + \| \hat{g}^\delta(\xi)-\hat{g}(\xi)\| \leqslant (\tau+1)\delta$$

引理 6 对常数 $\gamma>0$，$\alpha>0$，$m>0$，我们有

$$\sup_{a\geqslant 0}(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))e^{-a}\leqslant \alpha^{\frac{1}{2(1-x)}}$$

证

$$\sup_{a\geqslant 0}(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\mathrm{e}^{-a}\leqslant\sup_{a\geqslant 0}(1-F_{\alpha,1}(\sigma))^{m}\mathrm{e}^{-a}=\sup_{a\geqslant 0}\left(\frac{\alpha\mathrm{e}^{-\frac{a}{m}}}{\sigma^{2}+\alpha}\right)^{m}=\sup_{a\geqslant 0}\left(\frac{\alpha\mathrm{e}^{2a-2ax-\frac{a}{m}}}{1+\alpha\mathrm{e}^{2a-2ax}}\right)^{m}$$

由引理 1，可得

$$\sup_{a\geqslant 0}(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\mathrm{e}^{-a}\leqslant\alpha^{\frac{1}{2(1-x)}}$$

引理 7 若 α 满足方程(24)，则有如下不等式成立：

$$\frac{1}{\alpha}\leqslant\left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{2(1-x)}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2(1-x)}\tag{26}$$

证 由引理 6，有

$$\begin{aligned}\tau\delta=&\|F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi)\|=\|(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\hat{g}^{\delta}(\xi)\|\leqslant\|(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))(\hat{g}^{\delta}(\xi)-\hat{g}(\xi))\|+\\&\|(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\hat{g}(\xi)\|\leqslant\delta+\|(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\mathrm{e}^{-\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\mathrm{e}^{\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\hat{g}(\xi)\|\leqslant\\&\delta+\sup_{a\geqslant 0}\left|(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\mathrm{e}^{-\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\right|\|\mathrm{e}^{\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\hat{g}(\xi)\|\leqslant\delta+E\sup_{a\geqslant 0}(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\mathrm{e}^{-a}\leqslant\\&\delta+E\alpha^{\frac{1}{2(1-x)}}\end{aligned}$$

因此

$$\frac{1}{\alpha}\leqslant\left(\frac{1}{\tau-1}\right)^{2(1-x)}\left(\frac{E}{\delta}\right)^{2(1-x)}$$

定理 2 设噪音假设(4)式和先验界(5)式成立，且正则化参数 α 由方程(24)确定，那么就有以下的误差估计：

$$\|u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)-u(x,\xi)\|\leqslant\left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{1-x}(\tau+1)^{x}E^{1-x}\delta^{x}$$

证 记

$$I=\|u(x,\xi)-u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)\|$$

由 Parseval 公式及(25)，(26)式可知

$$\begin{aligned}I^{2}=&\|u(x,\xi)-u_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)\|^{2}=\|\hat{u}(x,\xi)-\hat{u}_{\alpha,\gamma}^{m,\delta}(x,\xi)\|^{2}=\\&\|\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\hat{g}^{\delta}(\xi)\|^{2}=\|\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))\|^{2}=\\&\int_{-\infty}^{\infty}\left|\mathrm{e}^{(1-x)\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))\right|^{2}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

由赫尔德不等式和(20)，(21)式得

$$\begin{aligned}I^{2}\leqslant&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2(1-x)a}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))^{2}\mathrm{d}\xi=\\&\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{2(1-x)a}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))^{2(1-x)}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))^{2x}\mathrm{d}\xi\leqslant\\&\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{e}^{2(1-x)a}\left|\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{2(1-x)})^{\frac{1}{1-x}}\mathrm{d}\xi\right)^{1-x}\left(\int_{-\infty}^{\infty}(\left|\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi)\right|^{2x})^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}\xi\right)^{x}\leqslant\\&\|\mathrm{e}^{\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}(\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi))\|^{2(1-x)}\|\hat{g}(\xi)-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\hat{g}^{\delta}(\xi)\|^{2x}\end{aligned}$$

根据引理 5 及三角不等式得

$$\begin{aligned}I^{2}\leqslant&(\|\mathrm{e}^{\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}\hat{g}(\xi)(1-F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))\|+\|\mathrm{e}^{\sqrt{(\mathrm{i}\xi)\beta}}F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)(\hat{g}(\xi)-\hat{g}^{\delta}(\xi))\|)^{2(1-x)}((\tau+1)\delta)^{2x}\leqslant\\&(E+\delta\sup_{a\geqslant 0}\mathrm{e}^{a}F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma))^{2(1-x)}((\tau+1)\delta)^{2x}\end{aligned}$$

同理于引理 2，我们得到

$$\begin{aligned}&\sup_{a\geqslant 0}\mathrm{e}^{a}F_{\alpha,\gamma}^{(m)}(\sigma)\leqslant\sup_{a\geqslant 0}\mathrm{e}^{a}mF_{\alpha,\gamma}(\sigma)=\\&\sup_{a\geqslant 0}\mathrm{e}^{a}m\left(\frac{\mathrm{e}^{2(x-1)a}}{\mathrm{e}^{2(x-1)a}+\alpha}\right)^{\gamma}\leqslant\sup_{a\geqslant 0}m\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{a}{\gamma}}}{1+\alpha\mathrm{e}^{2a(1-x)}}\right)^{\gamma}\leqslant m\alpha^{-\frac{1}{2(1-x)}}\end{aligned}$$

又根据引理 7 可得

$$I^2 \leqslant (E+\delta\alpha^{-\frac{1}{2(1-x)}})^{2(1-x)}((\tau+1)\delta)^{2x} \leqslant \left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{2(1-x)}(\tau+1)^{2x}E^{2(1-x)}\delta^{2x}$$

因此

$$\| u(x,\xi)-u_{\alpha,\gamma}^{m;\delta}(x,\xi) \| \leqslant \left(\frac{\tau}{\tau-1}\right)^{1-x}(\tau+1)^{x}E^{1-x}\delta^{x}$$

3　总结

分数次 Tikhonov 正则化方法虽然克服了解的过度光滑的缺陷，但还是无法克服经典的 Tikhonov 正则化方法所产生的饱和效应. 对此，文献[14] 在分数次 Tikhonov 方法的基础上提出了迭代的分数次 Tikhonov 方法，这一迭代方法超出了分数次 Tikhonov 方法的饱和效果. 但是，如何确定迭代次数仍然是一个开放的问题.

文中采用固定迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法求解分数次热方程侧边值问题，同时，通过理论分析给出了先验和后验参数选取规则，得到误差估计，证明了所用方法的有效性. 这种迭代的分数次 Tikhonov 正则化方法也同样适用于分数次数值微分问题和时间分数阶扩散方程等其他不适定问题.

参考文献：

[1] 温瑾，程秀芬. 逆热传导问题的一种新型无网格方法 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2018，54(5)：5-9.

[2] 石万霞，熊向团. 多层介质中逆热传导问题的傅里叶正则化方法 [J]. 应用数学与计算数学学报，2012，26(3)：348-354.

[3] 柏恩鹏，熊向团. 一种新的正则化方法求解热传导方程的侧边值问题 [J]. 应用数学和力学，2021，42(5)：541-550.

[4] 庄娥，熊向团，薛雪敏，等. 基于小波收缩求解时间反向热传导问题的正则化方法 [J]. 应用数学与计算数学学报，2018，32(4)：831-840.

[5] 熊向团，石满州. 非齐次热方程侧边值问题的分数次 Tikhonov 方法 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2021，57(2)：9-14.

[6] 滕兴虎，毛自森，李静，等. 一类分数阶微分方程的比较定理与应用 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(5)：1-7.

[7] 李益军，陈光淦. 一类随机偏微分方程的有效近似 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(7)：89-96.

[8] 李宝麟，席娅. 测度中立型泛函微分方程的稳定性 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(2)：79-89.

[9] 纪宏伟. 一类非线性三阶微分方程边值问题多个解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2020，45(5)：51-57.

[10] 胡芳芳，刘元彬，张永. 一类带有 p-Laplacian 算子的分数阶微分方程边值问题的多重正解 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2022，47(11)：31-40.

[11] 雷娘，白艺昕，谢成康. 一类常微分方程和偏微分方程的级联系统的边界控制 [J]. 西南大学学报(自然科学版)，2021，43(9)：54-58.

[12] 柏恩鹏，熊向团. 分数阶热传导方程侧边值问题的一种分数次 Tikhonov 方法 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版)，2021，46(3)：119-125.

[13] 熊向团，柏恩鹏. 分数阶热传导方程侧边值问题的最优滤波方法 [J]. 西北师范大学学报(自然科学版)，2020，56(3)：14-16.

[14] BIANCHI D，BUCCINI A，DONATELLI M，et al. Iterated Fractional Tikhonov Regularization [J]. Inverse Problems，2015，31(5)：055005.

[15] YANG S P，XIONG X T，NIE Y. Iterated Fractional Tikhonov Regularization Method for Solving the Spherically Symmetric Backward Time-Fractional Diffusion Equation [J]. Applied Numerical Mathematics，2021，160：217-241.

[16] GERTH D，KLANN E，RAMLAU R，et al. On Fractional Tikhonov Regularization [J]. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems，2015，23(6)：611-625.

[17] XIONG X T，XUE X M. Fractional Tikhonov Method for an Inverse Time-Fractional Diffusion Problem in 2-Dimensional Space [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society，2020，43(1)：25-38.

责任编辑　廖坤