

具有交叉传播的 SIMR 谣言传播模型的动力学分析^①

赵勇胜, 侯强, 张磊

中北大学 数学学院, 太原 030051

摘要: 基于谣言的传播机制建立了一个具有个体和媒介交叉传播的 SIMR 谣言传播动力学模型, 研究了交叉传播对谣言传播的影响. 首先, 利用下一代矩阵法得到了基本再生数 R_0 , 证明了 $R_0 \leq 1$ 时无谣言平衡点的全局渐近稳定性; 其次, 证明了 $R_0 > 1$ 时, 模型的一致持续性和谣言盛行平衡点的唯一性; 最后, 利用 Lyapunov 函数和图论理论, 证明了谣言盛行平衡点的全局渐近稳定性. 这些结果说明交叉传播会影响谣言传播的基本再生数, 但不影响谣言传播的全局动力学属性.

关键词: 谣言传播; 基本再生数; 一致持续; 全局渐近稳定性

中图分类号: O175.1

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)08-0026-07

Dynamic Analysis of SIMR Rumor Spreading Model with Cross-Transmission

ZHAO Yongsheng, HOU Qiang, ZHANG Lei

School of Mathematics, North University of China, Taiyuan 030051, China

Abstract: In this paper, a SIMR rumor spreading model is established with individual and medium cross-transmission based on the rumor spreading mechanism, and the impact of cross-transmission on the rumor spreading is studied. Firstly, the basic reproduction number R_0 is obtained by using the next-generation matrix method, the global asymptotic stability of the rumor-free equilibrium point is proved when $R_0 \leq 1$. Further, the uniformly persistence of the model and the unique of rumor-prevailing equilibrium point are proved when $R_0 > 1$. Finally, the global asymptotic stability of the rumor-prevailing equilibrium point is proved by using Lyapunov functions and graph theories. These results indicate that cross-transmission affects the basic reproduction number but not affects the global dynamic attribute of rumor spreading.

Key words: rumor spreading; basic reproduction number; uniform persistent; global asymptotic stability

谣言是指没有事实根据的传闻, 它常常伴随一些重要的事件产生, 谣言歪曲事件的实际情况, 可能会引起心理恐慌, 造成经济损失, 甚至引起社会动荡^[1]. 随着互联网的发展, 信息在社交网络的传播已经成为常态, 人们之间的信息交流变得更加频繁, 这无疑加速了谣言的传播. 为了减少谣言带来的负面影响, 促进社会健康发展, 研究谣言的传播机制是十分有必要的.

① 收稿日期: 2022-10-29

基金项目: 山西省基础研究计划资助项目(20210302123031, 20210302123019, 202203021211091).

作者简介: 赵勇胜, 硕士研究生, 主要从事动力系统及其应用研究.

通信作者: 侯强, 副教授.

由于传播机制的相似性, 大多数谣言的传播都是基于传染病模型, 其中: 文献[2]研究了遗忘机制对谣言传播的影响; 文献[3]研究了犹豫机制对谣言传播的影响; 文献[4]研究了不同态度对谣言传播的影响. 特别是随着翻译软件的发展和人们教育程度的提高, 导致了多种语言的谣言传播^[5-7]. 本文基于文献[7], 考虑了在多语言环境下, 人际传播与网络媒体传播相结合对谣言传播的影响.

1 模型的建立

假设将人群分为两组, 第一组通过语言 1 传播谣言, 第二组通过语言 2 传播谣言. 考虑到有人掌握多种语言或者会使用翻译软件, 使得信息可以在不同的群体之间交换, 因此谣言的交叉传播机制是存在的. 将每组分为 4 类: 从未听过谣言, 但易受谣言影响的人 $S_i(t)$, 传播谣言的人 $I_i(t)$, 网络上的谣言信息量 $M_i(t)$ ($I_i(t)$ 在网络上产生的谣言信息量), 知道谣言但不传播的人 $R_i(t)$, $i=1, 2$. 建立模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = A_1 - \sum_{j=1}^2 \beta_{1j} S_1 I_j - \sum_{j=1}^2 \alpha_{1j} S_1 M_j - \mu_1 S_1 \\ \frac{dI_1}{dt} = \sum_{j=1}^2 \beta_{1j} S_1 I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{1j} S_1 M_j - \varphi_1 I_1 R_1 - \sigma_1 I_1 - \mu_1 I_1 \\ \frac{dM_1}{dt} = \delta_1 I_1 - d_1 M_1 \\ \frac{dR_1}{dt} = \sigma_1 I_1 + \varphi_1 I_1 R_1 - \mu_1 R_1 \\ \frac{dS_2}{dt} = A_2 - \sum_{j=1}^2 \beta_{2j} S_2 I_j - \sum_{j=1}^2 \alpha_{2j} S_2 M_j - \mu_2 S_2 \\ \frac{dI_2}{dt} = \sum_{j=1}^2 \beta_{2j} S_2 I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{2j} S_2 M_j - \varphi_2 I_2 R_2 - \sigma_2 I_2 - \mu_2 I_2 \\ \frac{dM_2}{dt} = \delta_2 I_2 - d_2 M_2 \\ \frac{dR_2}{dt} = \sigma_2 I_2 + \varphi_2 I_2 R_2 - \mu_2 R_2 \end{cases} \quad (1)$$

模型中所有的参数都是正的, 并且 $A = (\alpha_{ij})_{2 \times 2}$, $B = (\beta_{ij})_{2 \times 2}$ 是不可约的, $i, j=1, 2$. 在谣言传播过程中, 易受谣言影响的人与传播谣言的人相遇后, 可能产生传播谣言的兴趣, 以 β_{ij} 的传播率变为传播谣言的人, β_{ii} 表示 S_i 和 I_i 的接触传播率, β_{ij} 表示 S_i 和 I_j 的交叉接触传播率 ($i \neq j$); 易受谣言影响的人看到网络谣言信息后, 可能产生传播谣言的兴趣, 以 α_{ij} 的传播率变为传播谣言的人, α_{ii} 表示 S_i 和 M_i 的接触传播率, α_{ij} 表示 S_i 和 M_j 的交叉接触传播率 ($i \neq j$); 传播谣言的人与知道谣言但不传播的人相遇后, 可能失去传播谣言的兴趣, 以 φ_i 的传播率变为知道谣言但不传播的人; A_i 表示 S_i 的输入率; μ_i 表示自然死亡率; σ_i 表示 I_i 的自然遗忘率; δ_i 表示单位时间内一个谣言传播者在网络上产生的谣言量; d_i 表示网络谣言信息的自然消除率.

2 基本再生数

模型(1) 存在无谣言平衡点 $E^0 = (S_1^0, 0, 0, 0, S_2^0, 0, 0, 0)$, $S_i^0 = \frac{A_i}{\mu_i}$, $i=1, 2$. 模型(1) 的可行域为 $X = \left\{ S_1, I_1, M_1, R_1, S_2, I_2, M_2, R_2 \in \mathbb{R}_+^8 \mid S_i + I_i + R_i \leq \frac{A_i}{\mu_i}, 0 \leq M_i \leq \frac{A_i \delta_i}{\mu_i d_i}, i=1, 2 \right\}$.

根据下一代矩阵法^[8], 得到

$$F = \begin{bmatrix} \beta_{11} S_1^0 & \beta_{12} S_1^0 & \alpha_{11} S_1^0 & \alpha_{12} S_1^0 \\ \beta_{21} S_2^0 & \beta_{22} S_2^0 & \alpha_{21} S_2^0 & \alpha_{22} S_2^0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \mu_1 + \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 + \sigma_2 & 0 & 0 \\ -\delta_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & -\delta_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix}$$

计算模型(1)的基本再生数为 $R_0 = \rho(\mathbf{FV}^{-1}) = \rho\left(\frac{\left(\beta_{ij} + \alpha_{ij} \frac{\delta_j}{d_j}\right)S_i^0}{\mu_j + \sigma_j}\right)_{2 \times 2}$, $i, j = 1, 2$. 令 $\mathbf{M}(\mathbf{S}^0) = \left(\frac{\left(\beta_{ij} + \alpha_{ij} \frac{\delta_j}{d_j}\right)S_i^0}{\mu_i + \sigma_i}\right)_{2 \times 2}$, 其中 $\mathbf{S}^0 = (S_1^0, S_2^0)^T$, 易验证 $R_0 = \rho(\mathbf{M}(\mathbf{S}^0))$.

3 无谣言平衡点的稳定性

定理 1 当 $R_0 < 1$ 时, 模型(1)的无谣言平衡点 $\mathbf{E}^0$ 是局部渐近稳定的.

证 为了证明无谣言平衡点 $\mathbf{E}^0$ 是局部渐近稳定的, 需要检验文献[8]中的假设(A1)–(A5). 假设(A1)–(A4)是显然成立的, 条件(A5)需要证明下列 8×8 矩阵的全部特征根具有负实部.

$$\mathbf{J} | \mathbf{E}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ \mathbf{J}_3 & \mathbf{J}_4 \end{pmatrix}$$

其中: $\mathbf{W} = \mathbf{F} - \mathbf{V} = \begin{pmatrix} \beta_{11}S_1^0 - (\mu_1 + \sigma_1) & \beta_{12}S_1^0 & \alpha_{11}S_1^0 & \alpha_{12}S_1^0 \\ \beta_{21}S_2^0 & \beta_{22}S_2^0 - (\mu_2 + \sigma_2) & \alpha_{21}S_2^0 & \alpha_{22}S_2^0 \\ \delta_1 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$,

$$\mathbf{J}_3 = \begin{pmatrix} -\beta_{11}S_1^0 & -\beta_{12}S_1^0 & -\alpha_{11}S_1^0 & -\alpha_{12}S_1^0 \\ -\beta_{21}S_2^0 & -\beta_{22}S_2^0 & -\alpha_{21}S_2^0 & -\alpha_{22}S_2^0 \\ \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J}_4 = \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

定义 $s(\mathbf{W})$ 为矩阵 $\mathbf{W}$ 的最大特征值, 由文献[8]中的定理 2 可知下列等式成立:

$$R_0 > 1 \Leftrightarrow s(\mathbf{W}) > 0, R_0 < 1 \Leftrightarrow s(\mathbf{W}) < 0$$

计算 $\mathbf{J}_4$ 的特征根, 可知 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\mu_1 < 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = -\mu_2 < 0$. 如果 $R_0 < 1$, 则 $s(\mathbf{W}) < 0$, 所以 $s(\mathbf{J} | \mathbf{E}^0) < 0$, 条件(A5)成立. 因此, 当 $R_0 < 1$ 时, 无谣言平衡点 $\mathbf{E}^0$ 是局部渐近稳定的.

定理 2 当 $R_0 \leq 1$ 时, 模型(1)的无谣言平衡点 $\mathbf{E}^0$ 是全局渐近稳定的.

证 构造一个 Lyapunov 函数

$$V_0(t) = \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\mu_i + \sigma_i} \left(S_i - S_i^0 - S_i^0 \ln \frac{S_i}{S_i^0} + I_i + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \frac{S_i^0}{d_j} M_j \right)$$

其中 $\mathbf{I}(t) = (I_1(t), I_2(t))^T$, $\mathbf{w}^T = (\omega_1, \omega_2)$, $\mathbf{w}^T$ 为 $\mathbf{M}(\mathbf{S}^0)$ 关于特征值 $\rho(\mathbf{M}(\mathbf{S}^0))$ 的一个正的左特征向量, $S_i^0 = \frac{A_i}{\mu_i}$, $i = 1, 2$.

计算 $V_0(t)$ 沿着模型(1)解的全导数,

$$\begin{aligned} \frac{dV_0(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\mu_i + \sigma_i} \left[\left(1 - \frac{S_i^0}{S_i} \right) (A_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i M_j - \mu_i S_i) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i M_j - \varphi_i I_i R_i - \sigma_i I_i - \mu_i I_i + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \frac{S_i^0}{d_j} (\delta_j I_j - d_j M_j) \right] = \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\mu_i + \sigma_i} \left[-A_i \left(\frac{S_i}{S_i^0} + \frac{S_i^0}{S_i} - 2 \right) + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^0 I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \frac{\delta_j}{d_j} S_i^0 I_j - (\sigma_i + \mu_i) I_i - \varphi_i I_i R_i \right] \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^2 \frac{\omega_i}{\mu_i + \sigma_i} \left[\sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^0 I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \frac{\delta_j}{d_j} S_i^0 I_j - (\sigma_i + \mu_i) I_i \right] = \\ &\quad \mathbf{w}^T [\mathbf{M}(\mathbf{S}^0) \mathbf{I} - \mathbf{I}] = [\rho(\mathbf{M}(\mathbf{S}^0)) - 1] \mathbf{w}^T \mathbf{I} = (R_0 - 1) \mathbf{w}^T \mathbf{I} \end{aligned}$$

故 $R_0 \leq 1$ 时, $\frac{dV_0(t)}{dt} \leq 0$, 且 $\frac{dV_0(t)}{dt} = 0$ 时, $I_i(t) = 0$, $i = 1, 2$. 即当 $\mathbf{E}^0 =$

$\left(\frac{A_1}{\mu_1}, 0, 0, 0, \frac{A_2}{\mu_2}, 0, 0, 0\right)$ 时, $\frac{dV_0(t)}{dt} = 0$. 集合 $\{(S_1, I_1, M_1, R_1, S_2, I_2, M_2, R_2) \mid V'_0(t) = 0\}$ 的最大不变集为单点集 $\{E^0\}$, 根据 LaSalle 不变集原理^[9], 当 $R_0 \leq 1$ 时, 无谣言平衡点 E^0 是全局渐近稳定的.

4 谣言盛行平衡点的存在性及唯一性

定理 3 对于模型 (1), $R_0 > 1$ 时, 模型是一致持续的, 即存在一个正数 ϵ , 使得 $\liminf_{t \rightarrow \infty} (I_i(t), M_i(t)) \geq (\epsilon, \epsilon)$, $i = 1, 2$.

证 定义

$$X_0 := \{(S_i, I_i, M_i, R_i) \in X \mid I_i > 0, M_i > 0, i = 1, 2\}, \partial X_0 = X \setminus X_0$$

首先, 容易验证 X_0 是正不变集. 根据模型 (1) 的有界性, 可知模型 (1) 是点耗散的.

令 $M_\partial = \{S_i, I_i, M_i, R_i \mid S_i, I_i, M_i, R_i \in \partial X_0, \forall t \geq 0, i = 1, 2\}$.

下面证明

$$M_\partial = \{S_i, 0, 0, R_i \mid S_i \geq 0, R_i \geq 0, i = 1, 2\}$$

由于 $\{S_i(t), 0, 0, R_i(t) \mid S_i(t) \geq 0, R_i(t) \geq 0, i = 1, 2\} \subseteq M_\partial$ 恒成立, 所以只需证 $M_\partial \subseteq \{S_i(t), 0, 0, R_i(t) \mid S_i(t) \geq 0, R_i(t) \geq 0, i = 1, 2\}$ 即可. 假设不成立, 那么存在 i_0 , 不失一般性, 假设 $i_0 = 2$, 当 $t_0 \geq 0$ 时, $I_2(t_0) > 0, M_2(t_0) = 0$, 则有

$$\frac{dM_2(t_0)}{dt} = \delta_2 I_2(t_0) - d_2 M_2(t_0) > \delta_2 I_2(t_0) \quad (2)$$

即存在正数 τ , 当 $t_0 < t < t_0 + \tau$ 时 $\frac{dM_2}{dt} > 0$. 这说明 $t_0 < t < t_0 + \tau$ 时, $(S_i(t), I_i(t), M_i(t), R_i(t)) \notin M_\partial, i = 1, 2$. 这与假设矛盾, 即证明了 $M_\partial = \{S_i(0), 0, 0, R_i(0) \mid S_i(t) \geq 0, R_i(t) \geq 0, i = 1, 2\}$.

下面证明 $W^S(E^0) \cap X_0 = \emptyset$, 利用反证法, 假设 $W^S(E^0) \cap X_0 \neq \emptyset$.

由文献[10]可知, 设 ϵ_1 为任意充分小的正数, 存在一个正常数 $\eta = \eta(\epsilon_1)$, 使得

$$S_i(t) > S_i^0 - \epsilon_1, I_i(t) < \epsilon_1, M_i(t) < \epsilon_1, R_i(t) < \epsilon_1, t \geq \eta$$

由模型 (1) 可以得到

$$\begin{cases} \frac{dI_i}{dt} \geq (S_i^0 - \epsilon_1) \sum_{j=1}^2 (\beta_{ij} I_j + \alpha_{ij} M_j) - \varphi_i I_i \epsilon_1 - \sigma_i I_i - \mu_i I_i \\ \frac{dM_i}{dt} = \delta_i I_i - d_i M_i \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

考虑一个辅助系统

$$\begin{cases} \frac{dI_i^*}{dt} = (S_i^0 - \epsilon_1) \sum_{j=1}^2 (\beta_{ij} I_j^* + \alpha_{ij} M_j^*) - \varphi_i I_i^* \epsilon_1 - \sigma_i I_i^* - \mu_i I_i^* \\ \frac{dM_i^*}{dt} = \delta_i I_i^* - d_i M_i^* \end{cases} \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

系统 (3) 在平衡点的雅可比矩阵为

$$W_2 = \begin{pmatrix} b_1 & \beta_{12}(S_1^0 - \epsilon_1) & \alpha_{11}(S_1^0 - \epsilon_1) & \alpha_{12}(S_1^0 - \epsilon_1) \\ \beta_{21}(S_2^0 - \epsilon_1) & b_2 & \alpha_{21}(S_2^0 - \epsilon_1) & \alpha_{22}(S_2^0 - \epsilon_1) \\ \delta_1 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}$$

其中 $b_1 = \beta_{11}(S_1^0 - \epsilon_1) - \varphi_1 \epsilon_1 - (\mu_1 + \sigma_1)$, $b_2 = \beta_{22}(S_2^0 - \epsilon_1) - \varphi_2 \epsilon_1 - (\mu_2 + \sigma_2)$, 由于 $R_0 > 1 \Leftrightarrow s(W) > 0$, 则当 $R_0 > 1$ 时, 存在充分小的正数 $\zeta (\zeta \geq \epsilon_1)$ 使得 $s(W - \zeta W_0) > 0$, 进而有 $s(W_2) = s(W - \epsilon_1 W_0) \geq s(W - \zeta W_0) > 0$, 其中

$$W_0 = \begin{pmatrix} \beta_{11} + \varphi_1 & \beta_{12} & \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} + \varphi_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这说明矩阵 W_2 至少有一个正的特征根. 因此系统(3) 是不稳定的, 则系统(3) 的解满足下列式子

$$(I_i^*(t), M_i^*(t)) \rightarrow (\infty, \infty), t \rightarrow \infty, i=1,2.$$

通过比较定理可得

$$(I_i(t), M_i(t)) \rightarrow (\infty, \infty), t \rightarrow \infty, i=1,2.$$

这与 $I_i(t) < \epsilon$, $M_i(t) < \epsilon$ 矛盾, 因此 $W^S(E^0) \cap X_0 = \emptyset$ 成立. 集合 M_0 内的每条轨线都收敛到 E^0 , 且 E^0 是非周期的. 根据文献[11] 可知, 模型(1) 关于 $(X_0, \partial X_0)$ 是一致持续的. 结合文献[12] 可知, 模型(1) 至少存在一个谣言盛行平衡点 $E^* = (S_i^*, I_i^*, M_i^*, R_i^*)$, $i=1,2$.

定理 4 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1) 存在唯一的一个谣言盛行平衡点 $E^* = (S_i^*, I_i^*, M_i^*, R_i^*)$, $i=1,2$.

证 首先, 计算模型(1) 的谣言盛行平衡点

$$\begin{cases} A_i - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j - \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i M_j - \mu_i S_i = 0 \\ \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i I_j + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i M_j - \varphi_i I_i R_i - \sigma_i I_i - \mu_i I_i = 0 \\ \delta_i I_i - d_i M_i = 0 \\ \sigma_i I_i + \varphi_i I_i R_i - \mu_i R_i = 0 \end{cases} \quad i=1,2.$$

$$\text{得到 } S_i = \frac{A_i}{\mu_i} - I_i - \frac{\sigma_i I_i}{\mu_i - \varphi_i I_i}, M_i = \frac{\delta_i I_i}{d_i}, R_i = \frac{\sigma_i I_i}{\mu_i - \varphi_i I_i}, i=1,2.$$

模型(1) 的平衡点等价于

$$\left(\frac{A_i}{\mu_i} - I_i - \frac{\sigma_i I_i}{\mu_i - \varphi_i I_i} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{ij} + \alpha_{ij} \frac{\delta_j}{d_j} \right) I_j - (\mu_i + \sigma_i) I_i - \frac{\varphi_i \sigma_i (I_i)^2}{\mu_i - \varphi_i I_i} = 0, i=1,2. \quad (4)$$

根据文献[13] 的方法, 假设 $I_i^* = h > 0$, $I_i^* = k > 0$ 是模型的两个常数解, 如果 $h \neq k$, 那么至少存在一个 $i (i=1,2)$, 使得 $h_i \neq k_i$. 不失一般性, 假设 $h_1 > k_1$, 进一步可设 $\frac{h_1}{k_1} \geq \frac{h_i}{k_i}$ 对任意的 $i (i=1,2)$ 成立. 将 h 和 k 带入(4) 式得

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - h_1 - \frac{\sigma_1 h_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) h_j - (\mu_1 + \sigma_1) h_1 - \frac{\varphi_1 \sigma_1 (h_1)^2}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} = \\ & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - k_1 - \frac{\sigma_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) k_j - (\mu_1 + \sigma_1) k_1 - \frac{\varphi_1 \sigma_1 (k_1)^2}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

进行变换得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - h_1 - \frac{\sigma_1 h_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) h_j \frac{k_1}{h_1} - \frac{\varphi_1 \sigma_1 h_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} = \\ & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - k_1 - \frac{\sigma_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) k_j - \frac{\varphi_1 \sigma_1 (k_1)^2}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

对任意的 $i (i=1,2)$ 有 $k_i \geq k_1 \left(\frac{h_i}{h_1} \right)$ 成立, 且

$$\frac{A_1}{\mu_1} - h_1 - \frac{\sigma_1 h_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} < \frac{A_1}{\mu_1} - k_1 - \frac{\sigma_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 k_1}, \frac{\varphi_1 \sigma_1 h_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} > \frac{\varphi_1 \sigma_1 (k_1)^2}{\mu_1 - \varphi_1 k_1}$$

进一步得到

$$\begin{aligned} & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - h_1 - \frac{\sigma_1 h_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) h_j \frac{k_1}{h_1} - \frac{\varphi_1 \sigma_1 h_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 h_1} < \\ & \left(\frac{A_1}{\mu_1} - k_1 - \frac{\sigma_1 k_1}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} \right) \sum_{j=1}^2 \left(\beta_{1j} + \alpha_{1j} \frac{\delta_j}{d_j} \right) k_j - \frac{\varphi_1 \sigma_1 (k_1)^2}{\mu_1 - \varphi_1 k_1} \end{aligned} \quad (7)$$

这与(6) 式矛盾, 因此模型(1) 存在唯一的谣言盛行平衡点 $E^* = (S_i^*, I_i^*, M_i^*, R_i^*)$, $i=1,2$.

5 谣言盛行平衡点的稳定性

定理 5 当 $R_0 > 1$ 时, 模型(1) 的谣言盛行平衡点 E^* 是全局渐近稳定的.

证 令 $J_1(t) = \left(S_i - S_i^* - S_i^* \ln \frac{S_i}{S_i^*}\right) + \left(I_i - I_i^* - I_i^* \ln \frac{I_i}{I_i^*}\right) + \frac{\varphi_i R_i^*}{\varphi_i R_i^* + \sigma_i} \left(R_i - R_i^* - R_i^* \ln \frac{R_i}{R_i^*}\right)$,
 $J_2(t) = \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \frac{1}{\delta_j I_j^*} \left(M_j - M_j^* - M_j^* \ln \frac{M_j}{M_j^*}\right)$, $i = 1, 2$. 令 $f(x) = 1 - x + \ln x$, 则对 $\forall x > 0$,
 $f(x) \leq 0$, 当且仅当 $x = 1$ 时, $f(x) = 0$.

$J_1(t), J_2(t)$ 沿着模型(1)解的全导数分别为

$$\begin{aligned} \frac{dJ_1(t)}{dt} &= \left(1 - \frac{S_i}{S_i^*}\right) S_i' + \left(1 - \frac{I_i}{I_i^*}\right) I_i' + \frac{\varphi_i R_i^*}{\varphi_i R_i^* + \sigma_i} \left(1 - \frac{R_i}{R_i^*}\right) R_i' = \\ &\quad \left(1 - \frac{S_i}{S_i^*}\right) \left[-\mu_i (S_i - S_i^*) - \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} (S_i I_j - S_i^* I_j^*) - \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} (S_i M_j - S_i^* M_j^*)\right] + \\ &\quad \left(1 - \frac{I_i}{I_i^*}\right) \left[\sum_{j=1}^2 \beta_{ij} \left(S_i I_j - S_i^* I_j^* \frac{I_i}{I_i^*}\right) + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} \left(S_i M_j - S_i^* M_j^* \frac{I_i}{I_i^*}\right) - \varphi_i \left(I_i R_i - I_i^* R_i^* \frac{I_i}{I_i^*}\right)\right] + \\ &\quad \frac{\varphi_i R_i^*}{\varphi_i R_i^* + \sigma_i} \left(1 - \frac{R_i}{R_i^*}\right) \left[\varphi_i \left(I_i R_i - I_i^* R_i^* \frac{R_i}{R_i^*}\right) + \sigma_i \left(I_i - I_i^* \frac{R_i}{R_i^*}\right)\right] = \\ &\quad \mu_i S_i^* \left(2 - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{S_i}{S_i^*}\right) + \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(2 + \frac{I_j}{I_j^*} - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i^* S_i I_j}{I_i S_i^* I_j^*}\right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \left(2 + \frac{M_j}{M_j^*} - \frac{S_i^*}{S_i} - \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i^* S_i M_j}{I_i S_i^* M_j^*}\right) + \frac{\varphi_i R_i^*}{\varphi_i R_i^* + \sigma_i} \sigma_i I_i \left(2 - \frac{R_i}{R_i^*} - \frac{R_i^*}{R_i}\right) \leq \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*}\right) + \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \left(\frac{M_j}{M_j^*} - \ln \frac{M_j}{M_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*}\right) \\ \frac{dJ_2(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \frac{1}{\delta_j I_j^*} \left(1 - \frac{M_j^*}{M_j}\right) (\delta_j I_j - d_j M_j) = \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \frac{1}{\delta_j I_j^*} \delta_j I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \frac{M_j}{M_j^*} - \frac{M_j^* I_j}{M_j I_j^*} + 1\right) \leq \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{M_j}{M_j^*} - \frac{M_j}{M_j^*}\right) \end{aligned}$$

构造 Lyapunov 函数

$$V(t) = \sum_{i=1}^2 v_i (J_1 + J_2), \quad i = 1, 2.$$

$V(t)$ 沿着模型(1)解的全导数为

$$\begin{aligned} \frac{dV(t)}{dt} &= \sum_{i=1}^2 v_i (J_1' + J_2') \leq \sum_{i=1}^2 v_i \left[\sum_{j=1}^2 \beta_{ij} S_i^* I_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*}\right) + \right. \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \left(\frac{M_j}{M_j^*} - \ln \frac{M_j}{M_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*}\right) + \\ &\quad \sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} S_i^* M_j^* \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{M_j}{M_j^*} - \frac{M_j}{M_j^*}\right) \left. \right] \leq \\ &\quad \sum_{i=1}^2 v_i \left[\sum_{j=1}^2 (\beta_{ij} S_i^* I_j^* + \alpha_{ij} S_i^* M_j^*) \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*} + \ln \frac{I_i}{I_i^*} - \frac{I_i}{I_i^*}\right) \right] \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})_{2 \times 2}$, $\mathbf{B} = (\beta_{ij})_{2 \times 2}$ 是不可约的, 根据文献[14]中的定理 2.3, 有 $\sum_{i,j=1}^2 v_i (\beta_{ij} S_i^* I_j^* + \alpha_{ij} S_i^* M_j^*) \left(\frac{I_j}{I_j^*} - \ln \frac{I_j}{I_j^*}\right) = \sum_{i,j=1}^2 v_i (\beta_{ij} S_i^* I_j^* + \alpha_{ij} S_i^* M_j^*) \left(\frac{I_i}{I_i^*} - \ln \frac{I_i}{I_i^*}\right)$, 于是得到 $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$, 当且仅当 $\mathbf{E}^* = (S_i^*, I_i^*, M_i^*, R_i^*)$, $i = 1, 2$ 时, $\frac{dV(t)}{dt} = 0$. 那么, $V'(t) = 0$ 的最大不变集为单点集 $\{\mathbf{E}^*\}$, 根据 LaSalle 不变集原理^[9]可知, 当 $R_0 > 1$ 时, 谣言盛行平衡点 $\mathbf{E}^*$ 是全局渐近稳定的.

6 结论

本文基于谣言传播的若干特点,考虑个体和媒介交叉传播这一风险因素,建立 SIMR 模型来研究交叉传播的影响.首先,通过下一代矩阵的方法定义基本再生数 R_0 ;其次,构造 Lyapunov 函数证明了当基本再生数 $R_0 \leq 1$ 时,模型的无谣言平衡点是全局渐近稳定的;然后根据持续性理论,证明了当基本再生数 $R_0 > 1$ 时,模型是一致持续的,且存在唯一的谣言盛行平衡点;最后,利用 Lyapunov 函数和图论知识,证明了谣言盛行平衡点是全局渐近稳定的.结果说明交叉传播会影响模型的基本再生数,但不会影响谣言传播的动力学属性.该研究丰富了谣言传播动力学的研究方法,拓展了人们对谣言传播动力学的认识,有益于谣言控制措施的制定.

参考文献:

- [1] 谈谷铮. 对谣言的社会学剖析 [J]. 社会科学, 1989(10): 30-34.
- [2] ZHAO L J, XIE W L, GAO H O, et al. A Rumor Spreading Model with Variable Forgetting Rate [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2013, 392(23): 6146-6154.
- [3] XIA L L, JIANG G P, SONG B, et al. Rumor Spreading Model Considering Hesitating Mechanism in Complex Social Networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2015, 437: 295-303.
- [4] HU Y H, PAN Q H, HOU W B, et al. Rumor Spreading Model with the Different Attitudes towards Rumors [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2018, 502: 331-344.
- [5] XIA Y, JIANG H J, YU Z. Global Dynamics of ILSR Rumor Spreading Model with General Nonlinear Spreading Rate in Multi-Lingual Environment [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2022, 154: 111698.
- [6] LI J R, JIANG H J, HU C, et al. Dynamical Analysis of Rumor Spreading Model in Homogeneous Complex Networks [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 359: 374-385.
- [7] WANG J L, JIANG H J, MA T L, et al. Global Dynamics of the Multi-Lingual SIR Rumor Spreading Model with Cross-Transmitted Mechanism [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2019, 126: 148-157.
- [8] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction Numbers and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission [J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180(1-2): 29-48.
- [9] LASALLE J P. New Stability Results for Nonautonomous Systems [M]//Dynamical Systems. Amsterdam: Elsevier, 1977: 175-183.
- [10] 刘萍. 具时滞与反馈控制的企业集群和第三方物流的依托型共生模型的持久性 [J]. 云南大学学报(自然科学版), 2016, 38(1): 1-10.
- [11] THIEME H R. Persistence under Relaxed Point-Dissipativity (with Application to an Endemic Model) [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1993, 24(2): 407-435.
- [12] WANG W D, ZHAO X Q. An Epidemic Model in a Patchy Environment [J]. Mathematical Biosciences, 2004, 190(1): 97-112.
- [13] LAJMANOVICH A, YORKE J A. A Deterministic Model for Gonorrhea in a Nonhomogeneous Population [J]. Mathematical Biosciences, 1976, 28(3-4): 221-236.
- [14] LI M Y, SHUAI Z S. Global-Stability Problem for Coupled Systems of Differential Equations on Networks [J]. Journal of Differential Equations, 2010, 248(1): 1-20.

责任编辑 张构