

# 求解对流扩散反应方程的高阶指数型 组合紧致差分格式<sup>①</sup>

王明镜, 田芳, 郭亚妮

宁夏大学 数学统计学院, 银川 750021

**摘要:** 针对一维对流扩散反应方程, 基于对流扩散方程的四阶指数型紧致差分格式, 采用四阶混合差分逼近算子和 Padé 公式, 间接地构造了两种求解一维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式; 针对二维对流扩散反应方程, 采用降维法, 结合高阶混合差分逼近算子和 Padé 公式构造了求解二维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式. 本文所提差分格式较经典四阶格式和文献中的组合型格式具有更低的耗散性, 因此对于对流占优等边界层问题的求解计算精度更高. 最后给出数值算例验证了本文格式的精度.

**关 键 词:** 对流扩散反应方程; 高阶紧致差分格式; 对流占优; 边界层

中图分类号: O241.82

文献标志码: A

文章编号: 1000-5471(2023)08-0041-14

## A High-Order Exponential Combination Compact Finite Difference Scheme for Convection-Diffusion-Reaction Equation

WANG Mingjing, TIAN Fang, GUO Yani

School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China

**Abstract:** For the one-dimensional convection diffusion reaction equation, based on the fourth-order exponential compact difference scheme of convection diffusion equation, two fourth-order exponential combined compact difference lattices for solving one-dimensional convection diffusion reaction equation are constructed indirectly by using fourth-order mixed difference approximation operator and Padé formula; For the two-dimensional convection diffusion reaction equation, a fourth-order exponential combined compact difference scheme for solving the two-dimensional convection diffusion reaction equation is constructed by using the dimension reduction method, combining the high-order mixed difference approximation operator and Padé formula. The difference scheme proposed in this paper is less dissipative than the classical fourth-order scheme and the combined scheme in the literature, so it has higher accuracy for solving the convection dominated boundary layer problems. Finally, a numerical example is given to verify the accuracy of the proposed scheme.

**Key words:** convection diffusion reaction equation; high order compact difference scheme; convection dominates; boundary layer

① 收稿日期: 2022-10-20

基金项目: 宁夏自然科学基金项目(2020AAC03059); 国家自然科学基金项目(11902170; 11772165; 12161067); 宁夏自治区青年拔尖人才培养工程项目.

作者简介: 王明镜, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程数值解法的研究.

通信作者: 田芳, 副教授.

对流扩散反应方程已被广泛用于研究模拟热流、污染物的扩散、化学反应等物理现象<sup>[1]</sup>。求解对流扩散反应方程的数值方法有很多<sup>[2-19]</sup>。针对此类方程，研究者们发展了许多高精度有限差分格式<sup>[12-19]</sup>。常见的差分格式依据差分格式系数的函数类型不同可分为多项式型有限差分格式<sup>[14-15]</sup>和指数型有限差分格式<sup>[2,16]</sup>，依据有限差分格式结构的区别则可以分为方程型有限差分格式<sup>[11-17]</sup>和导数型有限差分格式<sup>[18]</sup>。

本文的主要工作是基于文献[2]提出的对流扩散方程的四阶指数型有限差分格式，间接得到求解一维、二维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式，所提出的差分格式不同于导数型差分格式，其优点在于采用高阶差分算子分步迭代计算待求量的导数值，避免求解大型代数方程组，同时还兼具了指数型格式高精度的优点。

## 1 一维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式

### 1.1 对流扩散方程的四阶指数型紧致差分格式

对于如下对流扩散模型方程

$$-\epsilon u_{xx} + \mu u_x = S(x), \quad x \in [X_1, X_2] \quad (1)$$

文献[2]中给出了形如

$$-\alpha \delta_x^2 u_i + \mu \delta_x u_i = S_i + c_1 S_{xi} + c_2 S_{xxi} \quad (2)$$

的四阶指数型紧致差分格式，系数为

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\mu h}{2} \coth\left(\frac{\mu h}{2\epsilon}\right), & \mu \neq 0 \\ \epsilon, & \mu = 0 \end{cases} \quad c_1 = \begin{cases} \frac{\epsilon - \alpha}{\mu}, & \mu \neq 0 \\ 0, & \mu = 0 \end{cases} \quad c_2 = \begin{cases} \frac{\epsilon(\epsilon - \alpha)}{\mu^2} + \frac{h^2}{6}, & \mu \neq 0 \\ \frac{h^2}{12}, & \mu = 0 \end{cases} \quad (3)$$

此处  $\delta_x u_i$  和  $\delta_x^2 u_i$  分别定义为

$$\delta_x u_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} \quad (4)$$

$$\delta_x^2 u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \quad (5)$$

该格式对于求解对流占优等大梯度变化的对流扩散问题具有高精度、高分辨率的优点。本文将基于该格式构造对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式。

### 1.2 对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式

本文考虑如下对流扩散反应方程

$$-\epsilon u_{xx} + \mu u_x + b(x)u = f(x), \quad x \in [X_1, X_2] \quad (6)$$

其中： $\epsilon$  为扩散项系数且  $\epsilon > 0$ ， $\mu$  为对流项系数； $b(x)$  和  $f(x)$  是关于  $x$  的足够光滑的函数； $u(x)$  是待求未知量；当  $b(x) = 0$  时，模型方程(6) 即为文献[2] 中的对流扩散方程。

首先将求解区间  $[X_1, X_2]$  等分为  $N$  个子区间： $x_i = X_1 + ih$ ， $i = 0, 1, 2, \dots, N$ ， $h = \frac{X_2 - X_1}{N}$ 。

在点  $x_i$  处由泰勒级数展开得到

$$u_{xi} = \delta_x u_i - \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i + O(h^4) \quad (7)$$

$$u_{xxi} = \delta_x^2 u_i - \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i + O(h^4) \quad (8)$$

由(7)式得

$$u_{xxi} = \delta_x u_{xi} - \frac{h^2}{6} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i + O(h^4) \quad (9)$$

再由(8)式和(9)式可得待求量的二阶导数  $u_{xxi}$  的四阶组合差分逼近公式

$$u_{xxi} = 2\delta_x^2 u_i - \delta_x u_{xi} + O(h^4) \quad (10)$$

下面对对流扩散反应模型方程(6)的四阶指数型组合紧致差分格式进行推导。将模型方程(6)改写为如

下形式

$$\begin{cases} -\varepsilon u_{xx} + \mu u_x = S(x) \\ S(x) = f(x) - b(x)u \end{cases} \quad (11)$$

对(11)式中的第一个方程考虑其在点  $x_i$  处形如(2)式的四阶指数组合紧致差分格式

$$-\alpha\delta_x^2 u_i + \mu\delta_x u_i = S_i + c_1 S_{xi} + c_2 S_{xxi} \quad (12)$$

其中  $\alpha, c_1, c_2$  由(3)式给出。

对(11)式中的第二个方程两端的  $x$  求导得

$$S_x = f_x - b_x u - bu_x, S_{xx} = f_{xx} - 2b_x u_x - b_{xx} u - bu_{xx} \quad (13)$$

将(13)式代入(12)式中, 整理得

$$-\alpha\delta_x^2 u_i + \mu\delta_x u_i + (b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi})u_i = f_i + c_1 f_{xi} + c_2 f_{xxi} + (-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi})u_{xi} - c_2 b_i u_{xxi} \quad (14)$$

由(10)式得

$$f_{xxi} = 2\delta_x^2 f_i - \delta_x f_{xi} + O(h^4)$$

并将其代入(14)式右端, 略去高阶项整理得

$$-\alpha\delta_x^2 u_i + \mu\delta_x u_i + (b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi})u_i = (1 + 2c_2\delta_x^2)f_i + (c_1 - c_2\delta_x)f_{xi} + (-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi})u_{xi} - c_2 b_i u_{xxi} \quad (15)$$

下面通过对(15)式右端项中待求量的二阶导数采用不同的处理方法, 得到以下求解模型方程(6)的两种四阶指数组合紧致差分格式.

### 1.2.1 本文格式 1

将(10)式代入(15)式中, 消去  $u_{xx}$  项整理得

$$-(\alpha - 2c_2 b_i)\delta_x^2 u_i + \mu\delta_x u_i + (b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi})u_i = (1 + 2c_2\delta_x^2)f_i + (c_1 - c_2\delta_x)f_{xi} + (-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi} + c_2 b_i\delta_x)u_{xi}$$

即得本文格式 1:

$$-P\delta_x^2 u_i + Q\delta_x u_i + Ru_i = F_i \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} P &= \alpha - 2c_2 b_i, Q = \mu, R = b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi} \\ F_i &= (1 + 2c_2\delta_x^2)f_i + (c_1 - c_2\delta_x)f_{xi} + (-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi} + c_2 b_i\delta_x)u_{xi} \end{aligned} \quad (17)$$

### 1.2.2 本文格式 2

假设  $\varepsilon \neq 0$  时, 将原模型方程(6)改写为

$$u_{xxi} = -\frac{1}{\varepsilon}(f_i - \mu u_{xi} - b_i u_i)$$

将其代入(15)式右端项, 消去  $u_{xx}$  项整理得

$$-\alpha\delta_x^2 u_i + \mu\delta_x u_i + \left(b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi} + \frac{c_2 b_i^2}{\varepsilon}\right)u_i = \left(1 + \frac{c_2 b_i}{\varepsilon} + 2c_2\delta_x^2\right)f_i + (c_1 - c_2\delta_x)f_{xi} + \left(-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi} - \frac{c_2 \mu b_i}{\varepsilon}\right)u_{xi}$$

即得本文格式 2:

$$-P\delta_x^2 u_i + Q\delta_x u_i + Ru_i = F_i \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} P &= \alpha, Q = \mu, R = b_i + c_1 b_{xi} + c_2 b_{xxi} + \frac{c_2 b_i^2}{\varepsilon} \\ F_i &= \left(1 + \frac{c_2 b_i}{\varepsilon} + 2c_2\delta_x^2\right)f_i + (c_1 - c_2\delta_x)f_{xi} + \left(-c_1 b_i - 2c_2 b_{xi} - \frac{c_2 \mu b_i}{\varepsilon}\right)u_{xi} \end{aligned} \quad (19)$$

### 1.3 本文格式右端项 $F_i$ 的计算

若使(16)式和(18)式逼近模型方程(6)的精度达到四阶, 则需要对  $F_i$  中的  $u_{xi}, f_{xi}$  采用四阶差分逼近. 此处采用如下四阶 Padé 型紧致差分公式进行离散

$$\frac{1}{6}(U_x)_{i-1} + \frac{2}{3}(U_x)_i + \frac{1}{6}(U_x)_{i+1} = \delta_x U_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (20)$$

其中  $U$  代表  $u$  或  $f$ . 离散  $u_{xi}$  和  $f_{xi}$ , 边界条件采用如下四阶逼近公式<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} (U_x)_0 + \frac{8}{9}(U_x)_1 = \frac{1}{h} \left( -\frac{221}{90}U_0 + \frac{433}{108}U_1 - \frac{19}{6}U_2 + \frac{43}{18}U_3 - \frac{25}{27}U_4 + \frac{27}{180}U_5 \right) \\ (U_x)_N - \frac{8}{9}(U_x)_{N-1} = \frac{1}{h} \left( \frac{21}{10}U_N - \frac{641}{108}U_{N-1} + \frac{121}{18}U_{N-2} - \frac{25}{6}U_{N-3} + \frac{41}{27}U_{N-4} - \frac{43}{180}U_{N-5} \right) \end{cases} \quad (21)$$

### 1.4 Fourier 误差分析

令  $\tilde{u} = e^{ikx}$ ,  $i$  为虚数单位, 则

$$\delta_x \tilde{u} = i \frac{\sin kh}{h} \tilde{u}, \quad \delta_x^2 \tilde{u} = \frac{2}{h^2} (\cos kh - 1) \tilde{u}$$

且由(20) 式得

$$\tilde{u}_x = i \frac{3 \sin kh}{h(2 + \cos kh)} \tilde{u}, \quad \tilde{f}_x = i \frac{3 \sin kh}{h(2 + \cos kh)} \tilde{f}$$

又令  $\omega = kh$ ,  $Pe = \frac{|\mu|}{\epsilon} h$ ,  $Count = \left| \frac{b}{\mu} \right| h$ ,  $\eta = Pe \cdot Count = \frac{|b|}{\epsilon} h^2$ , 则微分方程(6) 精确的特征函数为

$$\lambda_{\text{Exact}} = \frac{\epsilon}{h^2} [(\omega^2 + \eta) + i(\omega \cdot Pe)] \quad (22)$$

经过计算可得文献中的 FOC 格式<sup>[14]</sup>、文献[18] 格式、MHOC 格式<sup>[19]</sup>、本文格式 1 和本文格式 2 的特征函数均可统一地表示为如下形式

$$\lambda = \frac{\epsilon}{h^2} \frac{M_1}{M_2} \quad (23)$$

其中相应的  $M_1$  和  $M_2$  的表达式详见表 1.

表 1 差分格式的特征函数

差分格式	$M_1$	$M_2$
FOC 格式 <sup>[14]</sup>	$\left[ \left( -2 - \frac{Pe^2}{6} \right) (\cos \omega - 1) + \frac{\eta}{6} \cdot (\cos \omega + 5) \right] + i \cdot \sin \omega \left( Pe - \frac{\eta \cdot Pe}{12} \right)$	$\frac{5 + \cos \omega}{6} - i \frac{Pe \cdot \sin \omega}{12}$
MHOC 格式 <sup>[19]</sup>	$\left[ 4(\cos \omega - 1) + \eta + \frac{3(\sin \omega)^2}{2 + \cos \omega} \right] + i \cdot Pe \cdot \frac{3 \sin \omega}{2 + \cos \omega}$	1
文献[18] 格式	$[24(1 - \cos \omega) + \eta^2 - \eta Pe^2 + 12\eta] + i \cdot (12Pe - Pe^3) \sin \omega$	$[i \cdot Pe^2 + 2(\cos \omega + 5)] - i \cdot Pe \cdot \sin \omega$
本文格式 1	$\left[ -2\gamma(\cos \omega - 1) + 4\sigma_2 \eta(\cos \omega - 1) + \eta + 3\sigma_2 \eta \cdot \frac{(\sin \omega)^2}{2 + \cos \omega} \right] + i \cdot \left( Pe \cdot \sin \omega + 3\sigma_1 \eta \cdot \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega} \right)$	$\left[ 1 + 4\sigma_2 (\cos \omega - 1) + 3\sigma_2 \frac{(\sin \omega)^2}{2 + \cos \omega} \right] + i \cdot 3\sigma_1 \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega}$
本文格式 2	$\left[ -2\gamma(\cos \omega - 1) + \eta + \sigma_2 \eta^2 \right] + i \cdot \left( Pe \cdot \sin \omega + 3\sigma_1 \eta \cdot \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega} + 3\sigma_2 Pe \cdot \eta \cdot \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega} \right)$	$\left[ 1 + \eta\sigma_2 4\sigma_2 (\cos \omega - 1) + 3\sigma_2 \frac{(\sin \omega)^2}{2 + \cos \omega} \right] + i \cdot 3\sigma_1 \frac{\sin \omega}{2 + \cos \omega}$

图 1 表示了在区间  $0 \leq kh \leq \pi$  上, 当  $Count$  数确定为常数 1.0 时, 对于不同的网格雷诺数  $Pe$ , 数值波数和精确波数之间的关系. 图中  $\kappa^2 h^2$  表示耗散误差. 结果表明: 在  $Pe = 1.0$  时, MHOC 格式耗散误差很大, 而 FOC 格式和文献[18] 格式的耗散误差曲线完全重合, 并且相比其他格式, 本文格式 1 和本文格式 2 的耗散误差较小; 当网格雷诺数  $Pe$  从 10 增大到 1 000 时, 本文格式 1 的耗散误差逐渐增大, 表现出强耗散性, 而本文格式 2 的耗散误差要明显小于其它格式的耗散误差.

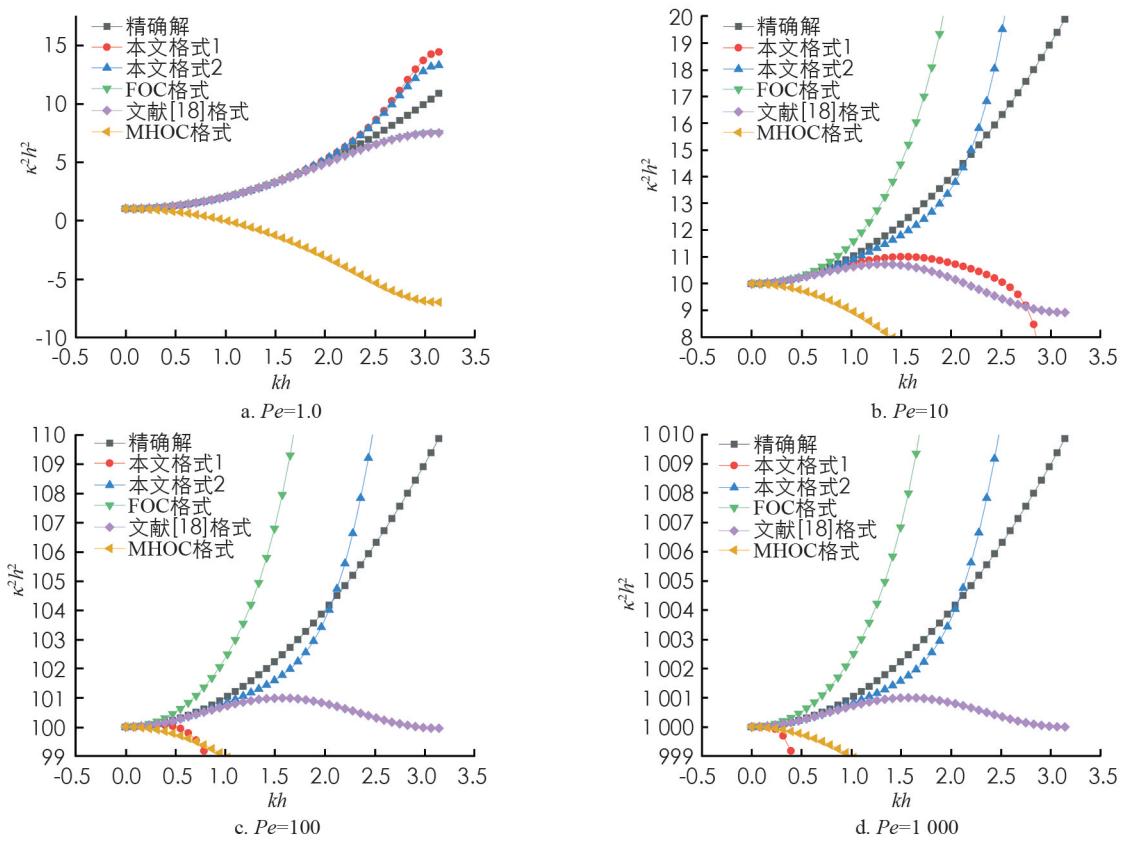
图 1  $Count = 1.0$  的耗散误差比较

图 2 表示了在区间  $0 \leq kh \leq \pi$  上, 当网格雷诺数  $Pe$  确定为常数 1.0 时, 对于不同的  $Count$  数, 数值波数和精确波数之间的关系。结果表明: 对于不同的  $Count$  数取值, 本文格式 1 和本文格式 2 的耗散误差均明显小于 FOC 格式的耗散误差, 并且在高波段上本文格式 2 的耗散误差小于本文格式 1 的耗散误差。

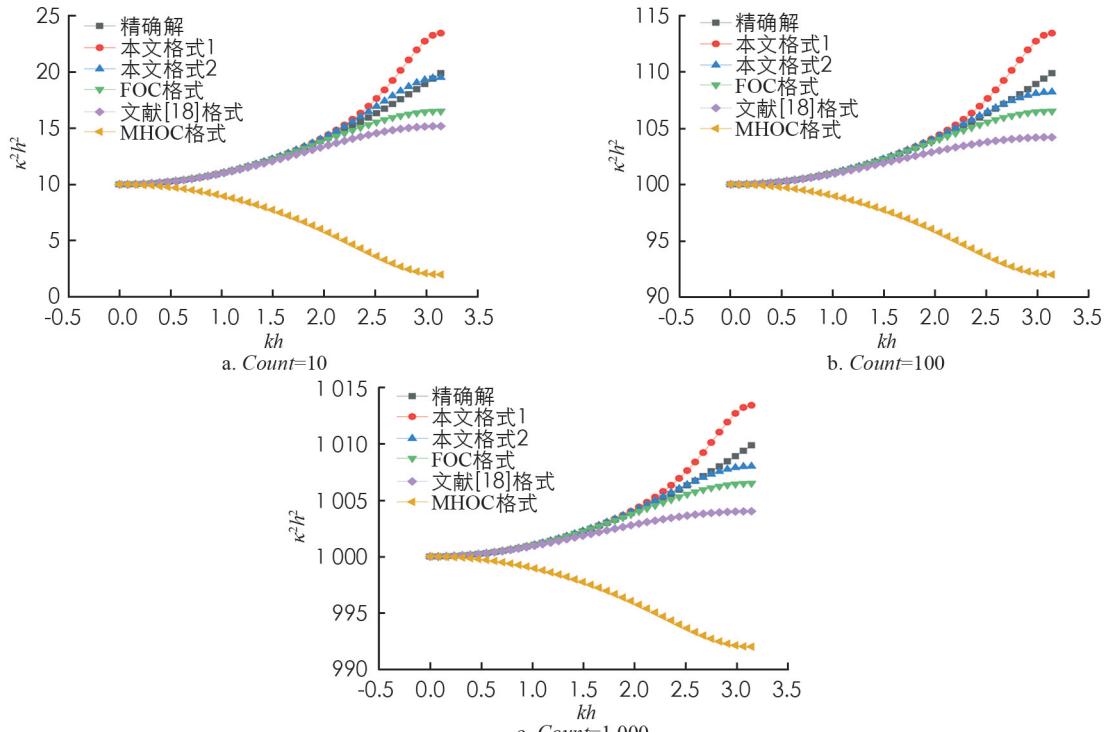
图 2  $Pe = 1.0$  时的耗散误差比较

图 3 表示了在区间  $0 \leq kh \leq \pi$  上, 当  $Pe$  数和  $Count$  数相等时, 对于不同的取值, 数值波数和精确波数之间的关系。结果表明: 对于不同的取值, 在整个波段上, 本文格式 2 的耗散误差很小, 而其它 4 种格式的耗散误差随着  $Pe$  数和  $Count$  数的增大而增大, 表现出强耗散性。特别地, 文献 FOC 格式和文献[18] 格式的耗散误差曲线完全重合。

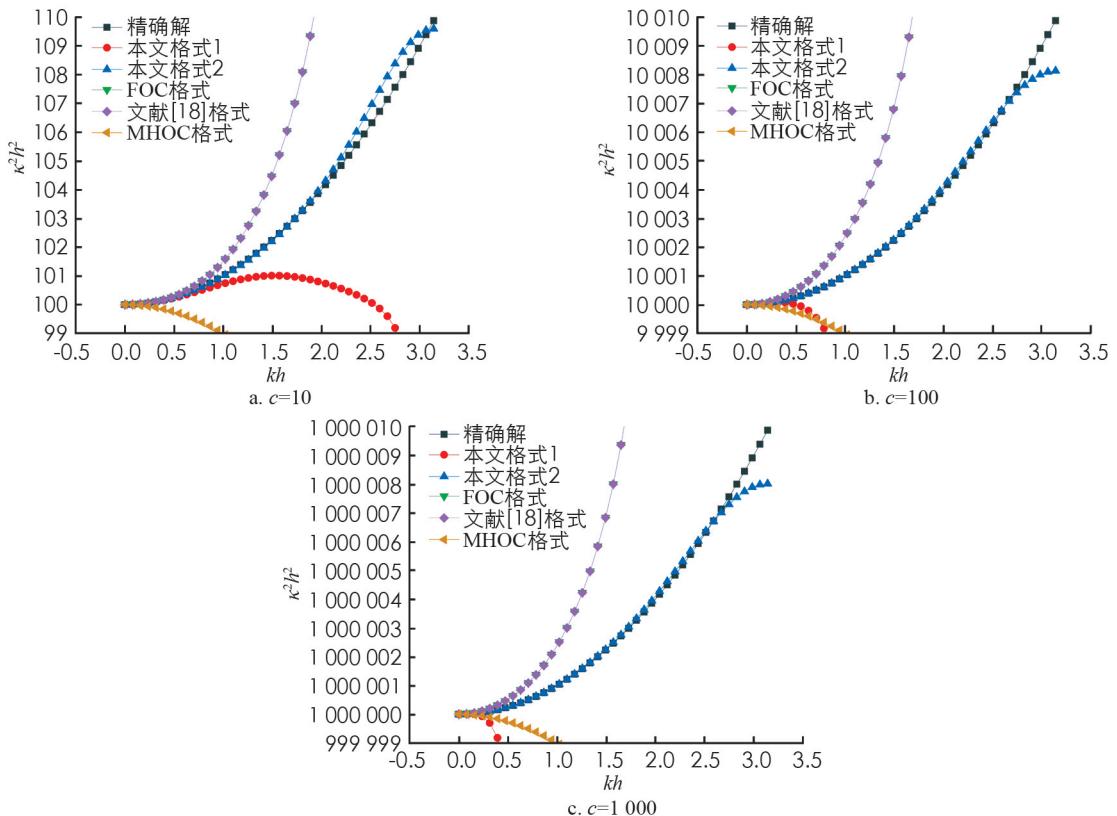


图 3  $Pe = Count = c$  时的耗散误差比较

## 1.5 算法描述

将(16)式和(18)式中的算子展开, 差分方程统一写为

$$A_{-1}u_{i-1} + A_0u_i + A_1u_{i+1} = B_{-1}f_{i-1} + B_0f_i + B_{-1}f_{i+1} + C_{-1}f_{xi-1} + C_0f_{xi} + C_1f_{xi+1} + D_{-1}u_{xi-1} + D_0u_{xi} + D_1u_{xi+1} \quad (24)$$

其中对应(24)式的系数见(17)式和(19)式。求解算法流程图如图 7 所示。

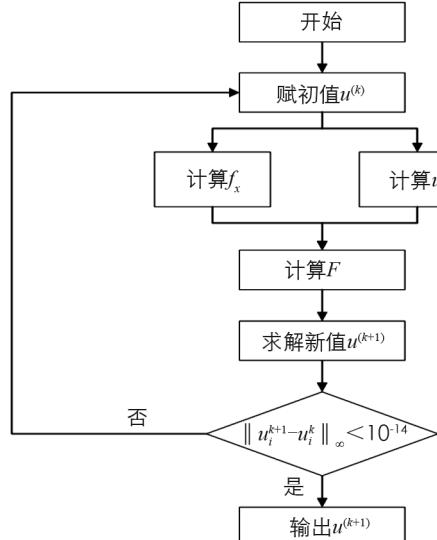


图 4 算法流程图

## 2 二维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式

### 2.1 对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式

考虑如下二维对流扩散反应问题

$$-\epsilon_1 u_{xx} - \epsilon_2 u_{yy} + \mu_1 u_x + \mu_2 u_y + b(x, y)u = f(x, y), (x, y) \in [X_1, Y_1] \times [X_2, Y_2] \quad (25)$$

其中:  $\epsilon_1, \epsilon_2$  为扩散项系数且  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ;  $\mu_1$  和  $\mu_2$  为对流项系数;  $b(x, y)$  为反应项系数;  $f(x, y)$  为源项;  $u(x, y)$  是未知函数, 函数  $u(x, y), b(x, y)$  和  $f(x, y)$  在计算区域上足够光滑.

将求解区间  $[X_1, X_2]$  等分为  $N$  个子区间:  $x_i = X_1 + ih, y_j = Y_1 + jh, i, j = 0, 1, 2, \dots, N, h = \frac{X_2 - X_1}{N}$ .

将(25)式改写为如下等价的方程组形式

$$\begin{cases} -\epsilon_1 u_{xx} + \mu_1 u_x + b(x, y)u = f_1(x, y) \\ -\epsilon_2 u_{yy} + \mu_2 u_y + b(x, y)u = f_2(x, y) \end{cases} \quad (26)$$

其中

$$\begin{cases} f_1(x, y) = f(x, y) + \epsilon_2 u_{yy} - \mu_2 u_y \\ f_2(x, y) = f(x, y) + \epsilon_1 u_{xx} - \mu_1 u_x \end{cases} \quad (27)$$

对(26)式和(27)式应用差分格式(14)得

$$\begin{cases} -P_1 \delta_x^2 u_{ij} + Q_1 \delta_x u_{ij} + R_1 u_{ij} = F_{1ij} \\ -P_2 \delta_y^2 u_{ij} + Q_2 \delta_y u_{ij} + R_2 u_{ij} = F_{2ij} \end{cases} \quad (28)$$

其中

$$F_{1ij} = f_{1ij} + c_1 f_{1xij} + c_2 f_{1xxij} + (-c_1 b_{ij} - 2c_2 b_{xij})u_{xij} - c_2 b_{ij}u_{xxij} \quad (29)$$

$$F_{2ij} = f_{2ij} + d_1 f_{2yij} + d_2 f_{2yyij} + (-d_1 b_{ij} - 2d_2 b_{yij})u_{yij} - d_2 b_{ij}u_{yyij} \quad (30)$$

$$P_1 = \alpha_1, Q_1 = \mu_1, R_1 = b_{ij} + c_1 b_{xij} + c_2 b_{xxij}$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{\mu_1 h}{2} \coth\left(\frac{\mu_1 h}{2\epsilon_1}\right), & \mu_1 \neq 0, \\ \epsilon_1, & \mu_1 = 0 \end{cases}, \quad c_1 = \begin{cases} \frac{\epsilon_1 - \alpha_1}{\mu_1}, & \mu_1 \neq 0, \\ 0, & \mu_1 = 0 \end{cases}, \quad c_2 = \begin{cases} \frac{\epsilon_1(\epsilon_1 - \alpha_1)}{\mu_1^2} + \frac{h^2}{6}, & \mu_1 \neq 0 \\ \frac{h^2}{12}, & \mu_1 = 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$P_2 = \alpha_2, \quad Q_2 = \mu_2, \quad R_2 = b_{ij} + d_1 b_{yij} + d_2 b_{yyij}$$

$$\alpha_2 = \begin{cases} \frac{\mu_2 h}{2} \coth\left(\frac{\mu_2 h}{2\epsilon_2}\right), & \mu_2 \neq 0, \\ \epsilon_2, & \mu_2 = 0 \end{cases}, \quad d_1 = \begin{cases} \frac{\epsilon_2 - \alpha_2}{\mu_2}, & \mu_2 \neq 0, \\ 0, & \mu_2 = 0 \end{cases}, \quad d_2 = \begin{cases} \frac{\epsilon_2(\epsilon_2 - \alpha_2)}{\mu_2^2} + \frac{h^2}{6}, & \mu_2 \neq 0 \\ \frac{h^2}{12}, & \mu_2 = 0 \end{cases} \quad (32)$$

将(28)式中两项相加得

$$-P_1 \delta_x^2 u_{ij} - P_2 \delta_y^2 u_{ij} + Q_1 \delta_x u_{ij} + Q_2 \delta_y u_{ij} + (R_1 + R_2)u_{ij} = F_{ij} \quad (33)$$

其中

$$F_{ij} = F_{1ij} + F_{2ij} \quad (34)$$

由

$$f_1(x, y) = f(x, y) + \epsilon_2 u_{yy} - \mu_2 u_y \quad (35)$$

直接计算得

$$\begin{aligned} f_{1x} &= f_x + \epsilon_2 u_{yyx} - \mu_2 u_{yx} \\ f_{1xx} &= f_{xx} + \epsilon_2 u_{yyxx} - \mu_2 u_{yxx} \end{aligned} \quad (36)$$

将(35)式和(36)式代入(29)式中得

$$\begin{aligned} F_{1ij} &= (f + \epsilon_2 u_{yy} - \mu_2 u_y)_{ij} + c_1(f_x + \epsilon_2 u_{yyx} - \mu_2 u_{yx})_{ij} + c_2(f_{xx} + \epsilon_2 u_{yyxx} - \mu_2 u_{yxx})_{ij} + \\ &\quad (-c_1 b_{ij} - 2c_2 b_{xij})u_{xij} - c_2 b_{ij}u_{xxij} = \end{aligned}$$

$$(f + c_1 f_x + c_2 f_{xx})_{ij} + (\epsilon_2 u_{yyij} - \mu_2 u_{yij}) + \\ c_1 (\epsilon_2 u_{yyxij} - \mu_2 u_{yxij} - b_{ij} u_{xij}) + c_2 (\epsilon_2 u_{yyxxij} - \mu_2 u_{yxxij} - b_{ij} u_{xxij} - 2b_{xij} u_{xij}) \quad (37)$$

由

$$f_2(x, y) = f(x, y) + \epsilon_1 u_{xx} - \mu_1 u_x \quad (38)$$

直接计算得

$$f_{2y} = f_y + \epsilon_1 u_{xxy} - \mu_1 u_{xy} \\ f_{2yy} = f_{yy} + \epsilon_1 u_{xxyy} - \mu_1 u_{xyy} \quad (39)$$

将(38)式和(39)式代入(30)式中得

$$F_{2ij} = (f + \epsilon_1 u_{xx} - \mu_1 u_x)_{ij} + d_1 (f_y + \epsilon_1 u_{xxy} - \mu_1 u_{xy})_{ij} + d_2 (f_{yy} + \epsilon_1 u_{xxyy} - \mu_1 u_{xyy})_{ij} + \\ (-d_1 b_{ij} - 2d_2 b_{yij}) u_{yij} - d_2 b_{ij} u_{yyij} = \\ (f + d_1 f_y + d_2 f_{yy})_{ij} + (\epsilon_1 u_{xxij} - \mu_1 u_{xij}) + \\ d_1 (\epsilon_1 u_{yyxij} - \mu_2 u_{yxij} - b_{ij} u_{yij}) + d_2 (\epsilon_1 u_{yyxyij} - \mu_1 u_{xyyij} - b_{ij} u_{yyij} - 2b_{yij} u_{yij}) \quad (40)$$

将(37)式和(40)式相加并整理得

$$F_{ij} = F_{1ij} + F_{2ij} = (f + c_1 f_x + c_2 f_{xx} + d_1 f_y + d_2 f_{yy})_{ij} + bu_{ij} + \\ c_1 (\epsilon_2 u_{yyxij} - \mu_2 u_{yxij} - b_{ij} u_{xij}) + d_1 (\epsilon_1 u_{xxij} - \mu_1 u_{xij} - b_{ij} u_{yij}) + \\ c_2 (\epsilon_2 u_{yyxxij} - \mu_2 u_{yxxij} - b_{ij} u_{xxij} - 2b_{xij} u_{xij}) + d_2 (\epsilon_1 u_{yyxyij} - \mu_1 u_{xyyij} - b_{ij} u_{yyij} - 2b_{yij} u_{yij}) \quad (41)$$

对其中的  $c_2(-\mu_2 u_{yxxij} - b_{ij} u_{xxij} - 2b_{xij} u_{xij}) + d_2(-\mu_1 u_{xyyij} - b_{ij} u_{yyij} - 2b_{yij} u_{yij})$  中各项采用二阶中心差分算子离散, 对其中的  $c_1(\epsilon_2 u_{yyxij} - \mu_2 u_{yxij} - b_{ij} u_{xij}) + d_1(\epsilon_1 u_{xxij} - \mu_1 u_{xij} - b_{ij} u_{yij})$  中各项采用以下四阶差分算子离散

$$u_{xyij} = \delta_x u_{yij} + \delta_y u_{xij} - \delta_x \delta_y u_{ij} + O(h^4) \quad (42)$$

$$u_{xxyij} = \delta_x^2 u_{yij} + \delta_x^2 \delta_y u_{ij} - \delta_x \delta_y u_{xij} + o(h^4) \quad (43)$$

$$u_{yyxij} = \delta_y^2 u_{xij} + \delta_y^2 \delta_x u_{ij} - \delta_x \delta_y u_{yij} + o(h^4) \quad (44)$$

得

$$F_{ij} = (f + c_1 f_x + c_2 f_{xx} + d_1 f_y + d_2 f_{yy})_{ij} + bu_{ij} + \\ (c_2 \epsilon_2 + d_2 \epsilon_1) \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} + (-c_2 \mu_2 + d_1 \epsilon_1) \delta_x^2 \delta_y u_{ij} + (c_1 \epsilon_2 - d_2 \mu_1) \delta_y^2 \delta_x u_{ij} - \\ (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_x \delta_y u_{ij} - c_2 b_{ij} \delta_x^2 u_{ij} - d_2 b_{ij} \delta_y^2 u_{ij} - 2c_2 b_{xij} \delta_x u_{ij} - 2d_2 b_{yij} \delta_y u_{ij} + \\ (c_1 \epsilon_2 \delta_y^2 - d_1 \epsilon_1 \delta_x \delta_y + (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_y - c_1 b_{ij}) u_{xij} + \\ (d_1 \epsilon_1 \delta_x^2 - c_1 \epsilon_2 \delta_x \delta_y + (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_x - d_1 b_{ij}) u_{yij} \quad (45)$$

将(45)式代入(33)式中并整理得

$$(-P_1 + c_2 b_{ij}) \delta_x^2 u_{ij} + (-P_2 + d_2 b_{ij}) \delta_y^2 u_{ij} + (Q_1 + 2c_2 b_{xij}) \delta_x u_{ij} + (Q_2 + 2d_2 b_{yij}) \delta_y u_{ij} + (-c_2 \epsilon_2 - d_2 \epsilon_1) \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} + \\ (c_2 \mu_2 - d_1 \epsilon_1) \delta_x^2 \delta_y u_{ij} + (d_2 \mu_1 - c_1 \epsilon_2) \delta_y^2 \delta_x u_{ij} + (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_x \delta_y u_{ij} + (R_1 + R_2 - b_{ij}) u_{ij} = \\ (f + c_1 f_x + c_2 f_{xx} + d_1 f_y + d_2 f_{yy})_{ij} + \\ (-c_1 b_{ij} + c_1 \epsilon_2 \delta_y^2 - d_1 \epsilon_1 \delta_x \delta_y + (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_y) u_{xij} + \\ (-d_1 b_{ij} + d_1 \epsilon_1 \delta_x^2 - c_1 \epsilon_2 \delta_x \delta_y + (-c_1 \mu_2 - d_1 \mu_1) \delta_x) u_{yij} \quad (46)$$

从而得到模型方程(25)的离散差分格式

$$-A \delta_x^2 u_{ij} - B \delta_y^2 u_{ij} + C \delta_x u_{ij} + D \delta_y u_{ij} + E \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} + G \delta_x^2 \delta_y u_{ij} + H \delta_y^2 \delta_x u_{ij} + K \delta_y \delta_x u_{ij} + R u_{ij} = F_{ij} \quad (47)$$

其中

$$A = P_1 - c_2 b_{ij}, B = P_2 - d_2 b_{ij}, C = Q_1 + 2c_2 b_{xij}, D = Q_2 + 2d_2 b_{yij}, E = -c_2 \epsilon_2 - d_2 \epsilon_1$$

$$G = c_2 \mu_2 - d_1 \epsilon_1, H = d_2 \mu_1 - c_1 \epsilon_2, K = -d_1 \mu_1 - c_1 \mu_2, R = R_1 + R_2 - b_{ij}$$

$$F_{ij} = f_{ij} + c_1 f_{xij} + d_1 f_{yij} + c_2 f_{xxij} + d_2 f_{yyij} + \\ (-c_1 b_{ij} - (d_1 \mu_1 + c_1 \mu_2) \delta_y + c_1 \epsilon_2 \delta_y^2 - d_1 \epsilon_1 \delta_x \delta_y) u_{xij} + \\ (-d_1 b_{ij} - (d_1 \mu_1 + c_1 \mu_2) \delta_x + d_1 \epsilon_1 \delta_x^2 - c_1 \epsilon_2 \delta_x \delta_y) u_{yij} \quad (48)$$

(48) 式中右端项中的  $f_{xij}$ ,  $f_{yij}$ ,  $f_{xxij}$ ,  $f_{yyij}$  分别采用一阶导数和二阶导数的中心差分算子计算得到. 而  $u_{xij}$ ,  $u_{yij}$  采用如下的四阶 Padé 型紧致差分公式进行离散

$$\begin{cases} \frac{1}{6}(u_x)_{i-1,j} + \frac{2}{3}(u_x)_{ij} + \frac{1}{6}(u_x)_{i+1,j} = \delta_x u_{ij} \\ \frac{1}{6}(u_y)_{i,j-1} + \frac{2}{3}(u_y)_{ij} + \frac{1}{6}(u_y)_{i,j+1} = \delta_y u_{ij} \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (49)$$

离散  $u_{xij}$  和  $u_{yij}$ , 边界条件采用文献[20] 给出的如下四阶逼近公式, 其中  $\alpha$  代表  $x$  或  $y$ .

$$\begin{cases} (u_\alpha)_0 + \frac{8}{9}(u_\alpha)_1 = \frac{1}{h} \left( -\frac{221}{90}u_0 + \frac{433}{108}u_1 - \frac{19}{6}u_2 + \frac{43}{18}u_3 - \frac{25}{27}u_4 + \frac{27}{180}u_5 \right) \\ (u_\alpha)_N - \frac{8}{9}(u_\alpha)_{N-1} = \frac{1}{h} \left( \frac{21}{10}u_N - \frac{641}{108}u_{N-1} + \frac{121}{18}u_{N-2} - \frac{25}{6}u_{N-3} + \frac{41}{27}u_{N-4} - \frac{43}{180}u_{N-5} \right) \end{cases} \quad (50)$$

## 2.2 算法描述

- 1) 给  $u$  赋初值  $u_{ij}^0$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) 采用中心差分算子计算  $f_{xij}$ ,  $f_{yij}$ ,  $f_{xxij}$ ,  $f_{yyij}$ ;
- 3) 采用四阶 Padé 型紧致差分公式(49) 和四阶一致边界条件(50) 计算  $u_{xij}$ ,  $u_{yij}$ ;
- 4) 将以上各量值代入(48) 式计算  $F_{ij}$ ;
- 5) 将  $F_{ij}$  代入(47) 式中计算  $u_{ij}$  的新值, 记为  $u_{ij}^{k+1}$ ;
- 6) 如果  $err = \left| \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{u_{ij}^k} \right| \geqslant 10^{-14}$ , 则将  $u_{ij}^{k+1}$  赋值于  $u_{ij}^0$ , 重复 2)–5), 直到  $err = \left| \frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{u_{ij}^k} \right| < 10^{-14}$ ,

输出  $u_{ij}$ .

## 3 数值算例

本节将选取典型算例, 采用 Fortran95 程序语言, 在具有 4GB 内存, Intel(R) Core(TM) i5 – 7200U CPU 处理器的计算机上编制统一程序, 采用本文格式和文献格式进行计算, 并与精确解进行比较, 验证格式的精度.

收敛阶采用如下公式

$$Rate = \frac{\log\left(\frac{E_1}{E_2}\right)}{\log\left(\frac{N_2}{N_1}\right)} \quad (51)$$

进行计算, 其中:  $E_1, E_2$  分别为网格数取  $N_1, N_2$  时采用差分格式计算得到的最大绝对误差.

**例 1**<sup>[15]</sup>  $-u_{xx} + u_x + u = 2\sin x + \cos x$ ,  $0 < x < \pi$ .

该算例的边界条件为  $u(0) = u(\pi) = 0$ . 精确解为  $u(x) = \sin x$ . 它在计算区域上是一个光滑函数. 表 2 给出了在不同网格数下采用以上 5 种格式计算的最大绝对误差和收敛阶. 从表 2 中我们可以发现, 5 种差分格式在粗网格和细网格上均能达到理论上的计算精度, 且本文格式 1 和格式 2 的误差略小于 FOC、文献 [18] 和 MHOC 3 种四阶差分格式的计算误差.

表 2 算例 1 最大绝对误差和收敛阶比较

网格数	FOC 格式 <sup>[14]</sup>		文献[18]格式		MHOC 格式 <sup>[19]</sup>		本文格式 1		本文格式 2						
	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶					
8	6.014	9e-5	6.014	9e-5	4.866	0e-4	4.734	2e-5	4.560	2e-5					
16	3.812	4e-6	3.98	3.812	4e-6	3.98	1.833	2e-5	4.73	3.002	1e-6	3.98	2.982	6e-6	3.93
32	2.373	4e-7	4.01	2.373	4e-7	4.01	6.004	2e-7	4.93	1.903	4e-7	3.98	1.900	5e-7	3.97
64	1.487	7e-8	4.00	1.487	7e-8	4.00	1.947	0e-8	4.95	1.189	6e-8	4.00	1.189	2e-8	4.00
128	9.295	9e-10	4.00	9.296	0e-10	4.00	9.006	8e-10	4.43	7.435	4e-10	4.00	7.434	5e-10	4.00
256	5.810	7e-11	4.00	5.810	6e-11	4.00	4.757	3e-11	4.24	4.647	8e-11	4.00	4.638	7e-11	4.00

**例 2**  $-\epsilon u_{xx} - u_x + u = 0, 0 < x < 1.$

边界条件为  $u(0) = 0, u(1) = \frac{e^{m_1} - e^{m_2}}{(1+m_1)e^{m_1} - (1+m_2)e^{m_2}},$  精确解为  $u(x) =$

$$\frac{e^{m_1 x} - e^{m_2 x}}{(1+m_1)e^{m_1} - (1+m_2)e^{m_2}}. \text{ 其中 } m_1 = \frac{-1 + \sqrt{1+4\epsilon}}{2\epsilon}, m_2 = \frac{-1 - \sqrt{1+4\epsilon}}{2\epsilon}.$$

如图 5 所示, 当网格数  $N = 16$  时, 随着  $\epsilon$  的减小, 该算例的精确解在计算区域的左端点  $x = 0$  处有一边界层. 表 3 比较了当  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  时本文格式和文献格式的计算结果.

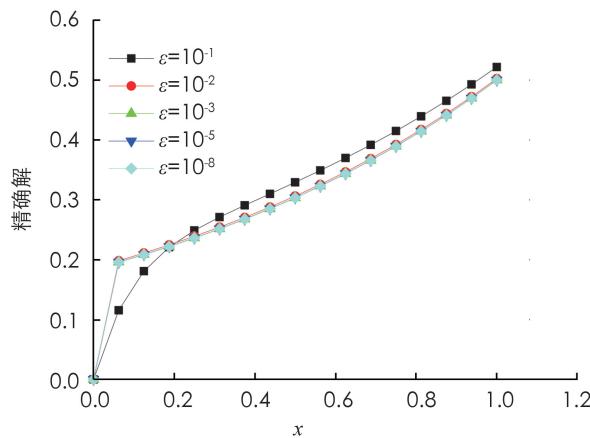


图 5 例 2 的精确解

表 3 算例 2 最大绝对误差和收敛阶比较

$\epsilon$	网格数	FOC 格式 <sup>[14]</sup>		文献[18]格式		MHOC 格式 <sup>[19]</sup>		本文格式 1		本文格式 2	
		最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
0.1	8	3.787 4e-4		1.738 6e-3		2.368 9e-3		7.609 5e-5		4.430 8e-5	
	16	2.188 7e-5	4.11	9.188 2e-5	4.24	3.910 2e-4	2.60	3.569 7e-6	4.41	2.862 1e-6	3.95
	32	1.412 8e-6	3.95	5.778 5e-6	3.99	2.956 3e-5	3.73	1.979 8e-7	4.17	1.900 4e-7	3.91
	64	8.784 8e-8	4.01	3.572 8e-7	4.02	1.451 2e-6	4.35	1.201 9e-8	4.04	1.191 3e-8	4.00
	128	2.870 7e-2		9.446 4e-1		—		3.656 0e-4		5.871 0e-4	
0.01	32	5.849 6e-3	2.29	9.150 7e-2	3.37	—		1.239 1e-4	1.56	8.019 3e-5	2.87
	64	6.030 0e-4	3.28	4.266 1e-3	4.42	—		1.599 2e-5	2.95	9.628 9e-6	3.06
	128	3.733 3e-5	4.01	2.250 5e-4	4.24	—		8.705 8e-7	4.20	6.754 2e-7	3.83
	256	2.295 5e-6	4.02	1.329 0e-5	4.08	—		4.529 4e-8	4.26	4.316 5e-8	3.97
	512	1.512 9e-1		2.315 9e-1		—		5.380 1e-4		6.650 4e-3	
0.001	32	1.255 2e-1	0.27	2.403 3e-1	-0.05	—		2.544 1e-4	1.08	2.862 2e-3	1.22
	64	8.556 2e-2	0.55	4.598 9e-1	-0.94	—		1.136 8e-4	1.16	7.072 1e-4	2.02
	128	4.017 4e-2	1.09	9.410 8e-1	-1.03	—		4.889 0e-5	1.22	1.198 4e-4	2.56
	256	1.020 5e-2	1.98	4.892 0e-1	0.94	—		1.916 8e-5	1.35	1.551 7e-5	2.95
	512	1.281 5e-3	2.99	1.076 7e-2	5.51	—		3.455 2e-6	2.47	2.018 4e-6	2.94
1.024	1 024	9.085 1e-5	3.82	5.899 1e-4	4.19	—		2.324 8e-7	3.89	1.674 4e-7	3.59
	2 048	5.446 9e-6	4.06	3.321 7e-5	4.15	—		1.143 5e-8	4.35	1.062 4e-8	3.98
	4 096	3.368 4e-7	4.02	2.021 7e-6	4.04	—		6.781 3e-10	4.08	6.665 7e-10	3.99

从表 3 可知:

1) 在细网格下, 所列格式都能到理论上的收敛阶, 但本文两种差分格式的计算精度明显优于 FOC 格式、MHOC 格式和文献[18] 格式.

2) 随着  $\epsilon$  的减小, 本文两种差分格式优势更显著. 比如当  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $N = 512$  时, 采用本文格式 1 计算得到的最大绝对误差为  $3.4552 \times 10^{-6}$ , 采用本文格式 2 计算得到的最大绝对误差为  $2.0184 \times 10^{-6}$ ; FOC 格式若要得到相同量级的计算精度(此时最大绝对误差为  $5.4469 \times 10^{-6}$ ), 至少需要 2 048 个网格点; 文献[18] 格式若要获得相同量级的计算精度(此时最大绝对误差为  $3.7697 \times 10^{-6}$ ), 至少需要 3 500 个网格点.

3) 当  $\epsilon$  很小时, 本文格式 1 在粗网格上的计算误差小于本文格式 2, 在细网格上的计算误差大于本文格式 2. 当  $\epsilon = 1$  和  $\epsilon = 10^{-1}$  时, MHOC 格式可以达到理论上的四阶精度; 但是当  $\epsilon < 0.065$  时, 不论在粗网格还是在细网格上, MHOC 格式都是发散的.

**例 3<sup>[16]</sup>**  $-\epsilon u_{xx} - u_x + \epsilon u = \sin x$ ,  $0 < x < \pi$

边界条件为  $u(0) = u(\pi) = 0$ , 精确解为  $u(x) = \frac{1}{1+4\epsilon^2}(A e^{\frac{r_1 x}{\pi}} + B e^{\frac{r_2 x}{\pi}} + 2\epsilon \sin x + \cos x)$ . 其中  $r_1 = -\pi(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2}) / 2\epsilon$ ,  $r_2 = 2\pi\epsilon(1 + \sqrt{1 + 4\epsilon^2})^2$ ,  $A = \frac{(1 + e^{r_2})}{(e^{r_1} - e^{r_2})}$ ,  $B = \frac{(1 + e^{r_1})}{(e^{r_2} - e^{r_1})}$ .

如图 6 所示, 随着  $\epsilon$  的减小, 该算例的精确解在计算区域的左端点  $x = 0$  处有一边界层. 表 4 中比较了当  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  时本文格式和文献格式的计算结果. 从表 4 可知:

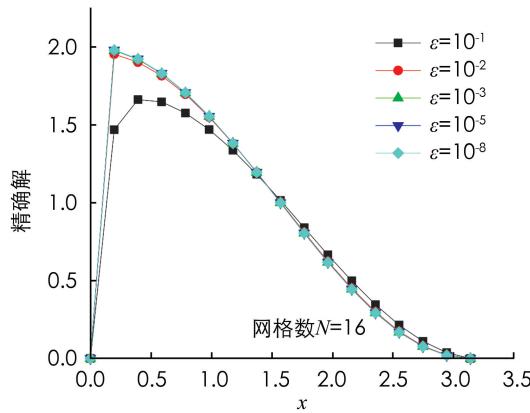


图 6 例 3 的精确解( $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-8}$ , 网格数  $N = 16$ )

1) 在细网格下, 所列格式都能达到理论上的收敛阶, 但本文两种差分格式的计算精度明显优于 FOC 格式、MHOC 格式和文献[18] 格式.

2) 随着  $\epsilon$  的减小, 本文两种差分格式的计算误差比所列其它文献格式高出 2~6 个数量级. 当  $\epsilon = 10^{-3}$ ,  $N = 32$  时, 本文格式 1 的最大绝对误差为  $3.6641 \times 10^{-5}$ , 本文格式 2 的最大绝对误差为  $4.5278 \times 10^{-4}$ ; 而 FOC 格式(此时最大绝对误差为  $3.5389 \times 10^{-4}$ )若要得到相同量级的计算精度, 则至少需要 4 096 个网格点; 文献[18] 格式若要得到相同量级的计算精度(此时最大绝对误差为  $5.2628 \times 10^{-4}$ ), 则至少需要 6 000 个网格点.

3) 当  $\epsilon$  很小时, 本文格式 1 在粗网格上的计算误差小于本文格式 2, 而在细网格上的计算误差大于本文格式 2. 当  $\epsilon = 1$  时, MHOC 格式可以达到理论上的四阶精度; 但是当  $\epsilon < 0.23$  时, 不论在粗网格还是在细网格上, MHOC 格式都是发散的.

表 4 算例 3 最大绝对误差和收敛阶比较

$\epsilon$	网格数	FOC 格式 <sup>[14]</sup>		文献[18]格式		MHOC 格式 <sup>[19]</sup>		本文格式 1		本文格式 2	
		最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
0.1	8	9.579 9e-2		1.777 8e+0		—		1.861 7e-3		1.520 9e-3	
	16	1.218 0e-2	2.98	1.895 6e-1	3.23	—	—	3.312 0e-4	2.49	1.972 8e-4	2.95
	32	8.715 5e-4	3.80	2.232 1e-2	3.09	—	—	2.238 9e-5	3.89	1.617 9e-5	3.61
	64	5.219 2e-5	4.06	4.662 1e-3	2.26	—	—	1.103 5e-6	4.34	1.025 9e-6	3.98
0.01	16	1.068 5e+0		3.961 8e+1		—		2.382 5e-4		1.361 5e-3	
	32	5.821 2e-1	0.88	4.598 3e+0	3.11	—	—	6.931 2e-5	1.78	2.446 9e-4	2.48
	64	1.850 0e-1	1.65	2.806 6e+0	0.71	—	—	2.928 3e-5	1.24	3.280 5e-5	2.90
	128	2.909 2e-2	2.67	3.292 1e-1	3.09	—	—	7.348 8e-6	1.99	4.346 7e-6	2.92
	256	2.434 0e-3	3.58	1.975 5e-2	4.06	—	—	6.560 7e-7	3.49	4.337 9e-7	3.32
	512	1.425 8e-4	4.09	1.588 7e-3	3.64	—	—	3.083 6e-8	4.41	2.762 8e-8	3.97
0.001	16	1.807 5e+0		3.892 0e+4		—		2.894 4e-4		1.833 7e-3	
	32	1.762 5e+0	0.04	2.455 2e+3	3.99	—	—	3.664 1e-5	2.98	4.527 8e-4	2.02
	64	1.563 8e+0	0.17	1.551 0e+2	3.98	—	—	4.542 4e-6	3.01	1.067 7e-4	2.08
	1 024	5.778 7e-2		9.169 3e-1		—		1.296 0e-7		8.413 6e-8	
	2 048	5.810 9e-3	3.31	4.350 9e-2	4.40	—	—	1.602 5e-8	3.02	9.838 4e-9	3.10
	4 096	3.538 9e-4	4.04	2.323 1e-3	4.23	—	—	8.555 5e-10	4.23	6.744 9e-10	3.87

例 4<sup>[21]</sup>  $-\epsilon u_{xx} - \epsilon u_{yy} + 2u_x + u_y = f(x, y), 0 < x, y < 1.$

边界条件为  $u(0, y) = e^y + 2^{-\frac{1}{\epsilon}}(1+y)^{1+\frac{1}{\epsilon}}$ ,  $u(1, y) = e^{y-1} + 2^{-\frac{1}{\epsilon}}(1+y)^{1+\frac{1}{\epsilon}}$ ,  $u(x, 0) = e^{-x} + 2^{-\frac{1}{\epsilon}}$ ,

$u(x, 1) = e^{1-x} + 2$ . 精确解为  $u(x, y) = e^{y-x} + \left(\frac{1+y}{2}\right)^{\frac{1}{\epsilon}}(1+y).$

表 5 算例 4 最大绝对误差和收敛阶比较

$\epsilon$	网格数	文献[18]格式		本文格式(47)	
		最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1	8×8	4.095 6e-6		1.685 8e-4	
	16×16	2.552 2e-7	4.00	2.533 9e-5	2.53
	32×32	1.595 3e-8	4.00	3.481 4e-6	2.86
	64×64	9.985 1e-10	4.00	4.567 2e-7	2.93
0.1	16×16	2.030 5e-3		2.948 3e-4	
	32×32	1.101 6e-4	4.20	3.747 8e-5	2.98
	64×64	6.659 2e-6	4.05	4.718 5e-6	2.99
	128×128	4.130 5e-7	4.01	5.934 0e-7	2.99
0.01	64×64	1.438 4e+0		2.462 7e-3	
	128×128	6.536 8e-3	7.78	1.529 7e-4	4.01
	256×256	3.222 5e-4	4.34	9.732 0e-6	3.97
	512×512	1.922 8e-5	4.07	6.356 1e-7	3.94
0.001	512×512	overflow		5.615 5e-3	
	1 024×1 024	1.853 4e-2	—	3.418 7e-4	4.04
	2 048×2 048	8.140 6e-4	4.51	2.230 5e-5	3.94

表 5 列出了当  $\epsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$  时本文格式和文献格式的最大绝对误差和收敛阶比较. 从表 5 中数据不难发现,  $\epsilon$  越小, 本文格式的优势越明显. 特别地, 当  $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}$  时, 本文格式较文献格式在计算精度上要高出 1~2 个数量级.

**例 5**  $-\epsilon u_{xx} - \epsilon u_{yy} - u_x - u_y + \epsilon u = \sin x + \sin y, 0 < x, y < \pi.$

边界条件为

$$\begin{aligned} u(0, y) &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} (A(1+e^{\frac{r_1 y}{\pi}}) + B(1+e^{\frac{r_2 y}{\pi}}) + 2\epsilon(\sin y) + (1+\cos y)) \\ u(\pi, y) &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} (A(e^{\frac{r_1 y}{\pi}} + e^{\frac{r_2 y}{\pi}}) + B(e^{\frac{r_2 y}{\pi}} + e^{\frac{r_1 y}{\pi}}) + 2\epsilon(\sin y) + (-1+\cos y)) \\ u(x, 0) &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} (A(e^{\frac{r_1 x}{\pi}} + 1) + B(e^{\frac{r_2 x}{\pi}} + 1) + 2\epsilon(\sin x) + (\cos x + 1)) \\ u(x, \pi) &= \frac{1}{1+4\epsilon^2} (A(e^{\frac{r_1 x}{\pi}} + e^{r_1}) + B(e^{\frac{r_2 x}{\pi}} + e^{r_2}) + 2\epsilon(\sin x) + (-1+\cos x)) \end{aligned}$$

精确解为  $u(x, y) = \frac{1}{1+4\epsilon^2} (A(e^{\frac{r_1 x}{\pi}} + e^{\frac{r_1 y}{\pi}}) + B(e^{\frac{r_2 x}{\pi}} + e^{\frac{r_2 y}{\pi}}) + 2\epsilon(\sin x + \sin y) + (\cos x + \cos y)).$

其中  $r_1 = \frac{-\pi(1+\sqrt{1+4\epsilon^2})}{2\epsilon}$ ,  $r_2 = 2\pi\epsilon(1+\sqrt{1+4\epsilon^2})^2$ ,  $A = \frac{(1+e^{r_2})}{(e^{r_1}-e^{r_2})}$ ,  $B = \frac{(1+e^{r_1})}{(e^{r_2}-e^{r_1})}$ .

表 6 列出了当  $\epsilon = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$  时本文格式和文献格式的最大绝对误差和收敛阶比较. 从表 6 中数据不难看出, 当  $\epsilon = 1$  时, 本文格式和文献格式的计算精度相当. 但是, 当  $\epsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$  时, 本文格式的计算精度远远高于文献格式.

表 6 例 5 最大绝对误差和收敛阶比较

$\epsilon$	网格数	文献[18]格式		本文格式(47)	
		最大绝对误差	收敛阶	最大绝对误差	收敛阶
1	8×8	4.275 8e-5		2.442 7e-4	
	16×16	2.764 2e-6	3.95	2.224 8e-5	3.46
	32×32	1.735 4e-7	3.99	1.597 5e-6	3.80
	64×64	1.087 4e-8	4.00	1.053 9e-7	3.92
0.1	16×16	4.791 0e-1		3.007 5e-3	
	32×32	1.718 8e-2	4.80	1.775 7e-4	4.08
	64×64	9.460 0e-4	4.18	9.158 6e-6	4.28
	128×128	5.746 1e-5	4.04	9.864 8e-7	3.22
0.01	128×128	2.046 7e+0		6.449 3e-5	
	256×256	5.837 5e-2	6.17	5.436 8e-6	3.57
	512×512	2.823 6e-3	3.33	3.125 5e-7	4.12
	1 024×1 024	1.652 0e-4	4.10	1.834 2e-8	4.09

## 4 结论

本文基于对流扩散方程的指数型差分格式<sup>[2]</sup>, 构造了求解一维和二维对流扩散反应方程的四阶指数型组合紧致差分格式, 所选取的典型算例的计算结果充分表明对于对流(反应)占优问题, 本文提出的差分格式的计算精度要明显高于文献中的多项式格式<sup>[14]</sup>和多项式型组合格式<sup>[18-19]</sup>.

## 参考文献:

- [1] MORTON K W. Numerical Solution of Convection-Diffusion Problems [M]. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [2] TIAN Z F, DAI S Q. High-Order Compact Exponential Finite Difference Methods for Convection-Diffusion Type Prob-

- lems [J]. Journal of Computational Physics, 2007, 220(2): 952-974.
- [3] 陈文兴, 戴书洋, 田小娟, 等. 利用重心有理插值配点法求解一、二维对流扩散方程 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2020, 45(8): 35-43.
- [4] PENG D Y. High-Order Numerical Method for Two-Point Boundary Value Problems [J]. Journal of Computational Physics, 1995, 120(2): 253-259.
- [5] AYUSO B, MARINI L D. Discontinuous Galerkin Methods for Advection-Diffusion-Reaction Problems [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2009, 47(2): 1391-1420.
- [6] PHONGTHANAPANICH S, DECHAUMPHAI P. Combined Finite Volume and Finite Element Method for Convection-Diffusion-Reaction Equation [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2009, 23(3): 790-801.
- [7] SHIH Y, KELLOGG R B, TSAI P. A Tailored Finite Point Method for Convection-Diffusion-Reaction Problems [J]. Journal of Scientific Computing, 2010, 43(2): 239-260.
- [8] ANGELINI O, BRENNER K, HILHORST D. A Finite Volume Method on General Meshes for a Degenerate Parabolic Convection-Reaction-Diffusion Equation [J]. Numerische Mathematik, 2013, 123(2): 219-257.
- [9] BAUSE M, SCHWEGLER K. Higher Order Finite Element Approximation of Systems of Convection-Diffusion-Reaction Equations with Small Diffusion [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2013, 246: 52-64.
- [10] ADAK D, NATARAJAN E, KUMAR S. A New Nonconforming Finite Element Method for Convection Dominated Diffusion-Reaction Equations [J]. International Journal of Advances in Engineering Sciences and Applied Mathematics, 2016, 8(4): 274-283.
- [11] 朱海涛, 欧阳洁. 对流-扩散-反应方程的变分多尺度解法 [J]. 工程数学学报, 2009, 26(6): 997-1004.
- [12] 兰斌, 薛文强, 葛永斌. 对流扩散反应方程基于坐标变换的高阶紧致差分格式 [J]. 青岛科技大学学报(自然科学版), 2014, 35(1): 100-106.
- [13] JHA N, SINGH B. Exponential Basis and Exponential Expanding Grids Third (Fourth)-Order Compact Schemes for Nonlinear Three-Dimensional Convection-Diffusion-Reaction Equation [J]. Advances in Difference Equations, 2019, 2019(1): 1-27.
- [14] SPOTZ W F. High-Order Compact Finite Difference Schemes for Computational Mechanics [D]. Austin: The University of Texas at Austin, 1995.
- [15] SUN H W, ZHANG J. A High-Order Finite Difference Discretization Strategy Based on Extrapolation for Convection Diffusion Equations [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 2004, 20(1): 18-32.
- [16] RADHAKRISHNA PILLAI A C. Fourth-Order Exponential Finite Difference Methods for Boundary Value Problems of Convective Diffusion Type [J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2001, 37(1): 87-106.
- [17] 田芳, 葛永斌. 求解变系数对流扩散反应方程的指数型高精度紧致差分方法 [J]. 工程数学学报, 2017, 34(3): 283-296.
- [18] 杨苗苗, 葛永斌. 求解对流扩散反应方程的一种高精度紧致差分方法 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2021, 44(4): 470-478.
- [19] 梁昌弘, 马廷福, 葛永斌. 两点边值问题的混合型高精度紧致差分格式 [J]. 宁夏大学学报(自然科学版), 2017, 38(1): 1-4.
- [20] 王涛, 刘铁钢. 求解对流扩散方程的一致四阶紧致格式 [J]. 计算数学, 2016, 38(4): 391-404.
- [21] SANYASIRAJU Y V S S, MISHRA N. Spectral Resolutiond Exponential Compact Higher Order Scheme (SRECHOS) for Convection-Diffusion Equations [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008, 197(51/52): 4737-4744.